

差分法の基礎と応用

～地震動・波動場や弾性振動解析～

原田隆典・本橋英樹

2022年10月 Ver.1

原田隆典（はらだ たかのり）

1952年 山口県生まれ

1980年 東京大学大学院工学研究科博士課程修了(土木工学専攻、工学博士)

2018年 宮崎大学名誉教授

本橋英樹（もとはし ひでき）

1973年 中国遼寧省生まれ(旧名：王宏沢（おう こうたく）)

2006年 宮崎大学大学院工学研究科博士後期課程修了(システム工学専攻、博士(工学))

2009年 帰化（日本名：本橋英樹）

2017年 ㈱IABC 地震・津波研究室取締役室長

まえがき

微分方程式を差分式に書き変えて数値計算をする Finite Difference Time Domain (FDTD)法は、境界条件が複雑で解析解が得られ難い微分方程式に広く使われる。本書では、3次元地震動や波動伝播問題（1次元と2次元）を主に取り扱う。差分式の精度や数値計算上の安定性の基礎を例題も含めて丁寧に説明し、応用として1次元波動伝播と2次元のSH波動・P・SV波動問題や震源断層を考慮した3次元地震動問題を解説する。この応用の中で、通常の格子点と食い違い格子点による差分式の精度や特徴と、地表面境界条件や吸収境界条件を解説する。

変位に関する通常の格子点による2次元波動方程式と食い違い格子点による1次元波動方程式ならば、エクセルで例題の計算は可能である。しかし、食い違い格子点による2次元や3次元波動方程式では、数値計算に適したフォートラン等による計算機言語によるプログラミングを必要とする。

目次

まえがき	2
1章 差分法の基礎	5
1.1 差分式	5
例題 1.1-1 1階微分の2n精度の差分式の形式的導出	9
例題 1.1-2 1階微分の間接点評価の差分式の精度	15
1.2 差分式の安定性	19
2.1 拡散方程式と厳密解	25
2.2 差分式による解法	26
2.3 数値計算例	29
(1) 重み $p = 1$ の場合 (陰の中央差分式)	29
(2) 重み $p = 1/2$ の場合 (クランク・ニコルソンの差分式)	30
(3) 重み $p = 0$ の場合 (陽の中央差分式)	33
3章 1次元波動方程式	36
3.1 波動方程式の差分式	36
3.2 数値計算例	38
(1) 計算で用いる波動方程式の解析解	38
(2) 差分式による解	40
(3) 安定条件を満たす数値計算例	42
(4) 安定条件を満たさない数値計算例	44
3.3 材料減衰定数の導入	45
4章 2次元波動方程式	49
4.1 2次元波動方程式と差分式	49
4.2 数値計算上の安定性	50
4.3 減衰無しの数値計算例	52
(1) 固定境界条件の数値計算例	52
(2) 吸収境界条件の数値計算例	55
4.4 材料減衰を考慮した数値計算例	57
4.5 地表面の境界条件	59
4.6 吸収境界の条件式	61
5章 1次元波動方程式の食い違い格子点	65
5.1 基礎事項	65
5.2 通常の格子点による差分式	69
5.3 食い違い格子点による差分式	70
例題 5.3-1 食い違い格子点の差分式から変位の差分式を導出	72

5.4	食い違い格子点による漸化式の安定性.....	74
5.5	地表面の境界条件.....	76
5.6	吸収境界の条件式.....	77
5.7	リックカー波外力による1次元1層弾性体の数値計算例.....	78
	例題 5.7-1 地表面と固定境界への入射波と反射波の位相に関する地中波形の理論解(1次元波動方程式)	84
	(1) 地表面の場合.....	85
	(2) 固定境界の場合.....	87
5.8	リックカー波外力による1次元2層弾性体の数値計算例.....	89
	例題 5.8-1 反射率と透過率.....	93
6章	2次元SH波の食い違い格子点差分式.....	96
6.1	2次元SH波と食い違い格子点差分式.....	96
6.2	2次元SH波と通常の格子点差分式.....	99
6.2	外力や入射速度.....	101
6.3	地表面の境界条件.....	102
6.4	数値計算例.....	104
	(1) 地中のリックカー波による半無限弾性体の波動場.....	104
	(2) リッカー波の鉛直入射による不整形弾性体の地表面波.....	105
7章	2次元P・SV波の食い違い格子点差分式.....	107
7.1	2次元P・SV波と食い違い格子点差分式.....	107
7.2	地表面の境界条件.....	111
7.3	剛壁の境界条件.....	112
7.4	吸収境界条件.....	113
7.5	数値計算例.....	114
8章	3次元波動の食い違い格子点差分式.....	117
8.1	波動方程式の状態方程式表示.....	117
8.2	差分式の漸化式.....	118
8.3	地表面の境界条件.....	121
8.4	吸収境界条件.....	122
8.5	震源断層モデルと体積力.....	122
8.6	数値計算例.....	130
	参考文献.....	132

1章 差分法の基礎

ここでは、差分法の基礎として1階と2階微分の1次精度～4次精度の差分式とその導出方法および、差分式による数値計算上の安定条件（フォン・ノイマン（Von Neumann）によるフーリエ解析法）を説明する。

数値計算上の安定性と計算精度は別問題である。計算精度は離散間隔に関する1次精度や2次精度に依存する。安定性の方は、時間と空間の離散間隔と偏微分方程式の係数に依存し、この安定性条件を満たさない場合には、いくら時間と空間の離散間隔を小さくしても、または高次精度の差分式を採用しても、数値計算は安定しない。

1.1 差分式

偏微分方程式は、変数を離散化した格子点に関する差分式で表すことができる。この差分式に初期条件と境界条件を考慮し、差分式を数値的に解くことができる。1階微分と2階微分の差分式を整理すると、表1.1-1と表1.1-2のように

なる。

表 1.1-1 1 階微分の差分式と精度

精度	1 階微分
1 次精度	$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (\text{前進差分})$ $u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (\text{後退差分})$
2 次精度	$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \quad (\text{中央差分})$
4 次精度	$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 8u(x+h) - 8u(x-h) + u(x-2h)}{12h}$

表 1.1-2 2 階微分の差分式と精度

精度	2 階微分
1 次精度	$u''(x) = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} \quad (\text{前進差分})$
2 次精度	$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \quad (\text{中央差分})$
4 次精度	$u''(x) = \frac{-u(x+2h) + 16u(x+h) - 30u(x) + 16u(x-h) - u(x-2h)}{12h^2}$

表 1.1-1 や表 1.1-2 の差分式は、次式のテイラー展開を用いた方法で求められる (2n 次精度の形式的差分式の導出は例題 1.1-1 参照)。簡単のため、次式では 1 つの空間変数の関数 $u(x)$ で示す。記号の簡単化のため、 $dx = h$ として、

$x + dx = x + h$ と表す。

$$\begin{aligned}
 u(x + dx) = u(x) + u'(x)dx + \frac{1}{2!}u''(x)dx^2 + \frac{1}{3!}u'''(x)dx^3 + \dots \\
 + \frac{1}{n!}u^{(n)}(x)dx^n + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.1-1}$$

上式で $dx = \pm h, \pm 2h, \dots$ と置くと、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 u(x + h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + c(h) \\
 u(x - h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + c(-h) \\
 u(x + 2h) &= u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + c(2h) \\
 u(x - 2h) &= u(x) - 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + c(-2h) \\
 &\dots\dots\dots \\
 c(h) &= \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \frac{1}{24}h^4u^{(4)}(x) + \frac{1}{120}h^5u^{(5)}(x) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.1-2}$$

上式において 1 階微分を左辺に移すと、1 階微分の差分式が次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \frac{1}{h}u(x + h) - \frac{1}{h}u(x) - \frac{1}{2}hu''(x) - \frac{1}{h}c(h) \\
 u'(x) &= \frac{1}{h}u(x) - \frac{1}{h}u(x - h) - \frac{1}{h}c(-h) \\
 u'(x) &= \frac{1}{2h}u(x + 2h) - \frac{1}{2h}u(x) - hu''(x) - \frac{1}{2h}c(2h) \\
 u'(x) &= \frac{1}{2h}u(x) - \frac{1}{2h}u(x - 2h) + hu''(x) - \frac{1}{2h}c(-2h) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{1.1-3}$$

上式の上段式を使うと、次式が得られる。

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{1}{2}hu''(x) - \frac{1}{6}h^2u'''(x) - \dots \quad (1.1-4a)$$

この式右辺の 3 項以降は微小項 h, h^2 の式であるため、1 次オーダー $O(h)$ 、2 次オーダー $O(h^2)$ の項として、次式のように表わすものとする。

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) + O(h^2) + \dots \quad (1.1-4b)$$

この表現を使うと、次式は 1 次精度の差分式（**前進差分式**）である。

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (1.1-4c)$$

同様に、式(1.1-3)の 2 段目の式から、次式の 1 次精度の**後退差分式**が得られる。

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (1.1-4d)$$

式(1.1-3)の上段と 2 段目の式の和および、3 段目と 4 段目の式の和は、次式のようになる。

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2u'''(x) - \frac{1}{120}h^4u^{(5)}(x) + O(h^5) \quad (1.1-5a)$$

$$u'(x) = \frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} - \frac{2}{3}h^2u'''(x) - \frac{1}{15}h^4u^{(5)}(x) + O(h^5)$$

上式右辺の 3 項以降は微小長 h の 2 次と 4 次項になるので、2 次精度の差分式（**中央差分式**）は、次式のようになる。

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (1.1-5b)$$

$$u'(x) = \frac{u(x+2h) - u(x-2h)}{4h} + O(h^2)$$

4次精度の中央差分式は、式(1.1-3)の上段と2段目の3項を消去すると、次式のように得られる。

$$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 8u(x+h) - 8u(x-h) + u(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad (1.1-6a)$$

ここに、

$$O(h^4) = \frac{1}{90} h^4 u^{(5)}(x) \quad (1.1-6b)$$

例題 1.1-1 1階微分の 2n 精度の差分式の形式的導出

次式のテイラー展開から差分式の形式的な導出を整理する。

$$u(x \pm jh) = u(x) \pm jhu'(x) + (jh)^2 \frac{1}{2!} u''(x) \pm (jh)^3 \frac{1}{3!} u'''(x) + \dots + (jh)^{2n} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n+1}) \quad (A1.1-1.1)$$

ここに、 $j = 1, 2, 3, \dots, 2n$ とする。

最初に、上式の $u(x + jh)$ から $u'(x)$ を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - h \frac{1}{2!} u''(x) - h^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \\
&\quad \dots - h^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
u'(x) &= \frac{u(x+2h) - u(x)}{2h} - 2h \frac{1}{2!} u''(x) - (2h)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \\
&\quad \dots - (2h)^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
u'(x) &= \frac{u(x+3h) - u(x)}{3h} - 3h \frac{1}{2!} u''(x) - (3h)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \quad (A1.1-1.2a) \\
&\quad \dots - (3h)^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
&\quad \vdots \\
u'(x) &= \frac{u(x+2nh) - u(x)}{2nh} - 2nh \frac{1}{2!} u''(x) - (2nh)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \\
&\quad \dots - (2nh)^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n})
\end{aligned}$$

上式に $\sum_{j=1}^{2n} C_j = 1$ となるような係数 C_j を掛けて、全てを足し合わせると、次

式が得られる。

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \sum_{j=1}^{2n} C_j \frac{u(x+jh) - u(x)}{jh} - \frac{h}{2!} u''(x) \sum_{j=1}^{2n} j C_j - \\
&\quad \frac{h^2}{3!} u'''(x) \sum_{j=1}^{2n} j^2 C_j - \dots - \frac{h^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) \sum_{j=1}^{2n} j^{2n-1} C_j \quad (A1.1-1.2b)
\end{aligned}$$

ここに、 $2n$ 次精度のためには、 h, h^2, \dots, h^{2n-1} の項は零でなければならないので、係数 C_j は、次式から求められる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & \dots & (2n)^{2n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A1.1-1.3b)$$

例えば、 $n=1$ では、

$$u'(x) = C_1 \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + C_2 \frac{u(x+2h) - u(x)}{2h} - \frac{h}{2!} u''(x)(C_1 + 2C_2) - O(h^2) \quad (\text{A1.1-1.3c})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

これより、2次精度の前進差分式は、次式で与えられる。

$$u'(x) = \frac{-u(x+2h) + 4u(x+h) - 3u(x)}{2h} \quad (\text{A1.1-1.3d})$$

次の例題として、式(A1.1-1.1)の $u(x-jh)$ ($j=1,2$) を使った2次精度の $u'(x)$ の後退差分式を示す。

$$u'(x) = -\frac{u(x-2h) - u(x)}{2h} + 2h \frac{1}{2!} u''(x) - (2h)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \dots + (2h)^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \quad (\text{A1.1-1.4a})$$

$$u'(x) = -\frac{u(x-h) - u(x)}{h} + h \frac{1}{2!} u''(x) - h^2 \frac{1}{3!} u'''(x) + \dots + h^{2n-1} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n})$$

係数 C_j を掛けて、全てを足し合わせると、次式が得られる。

$$u'(x) = -C_{-2} \frac{u(x-2h) - u(x)}{2h} - C_{-1} \frac{u(x-h) - u(x)}{h} + h \frac{1}{2!} u''(x)(2C_{-2} + C_{-1}) + O(h^2) \quad (\text{A1.1-1.4b})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_{-2} \\ C_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

これより、2次精度の後退差分式は、次式で与えられる。

$$u'(x) = \frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h} \quad (\text{A1.1-1.4d})$$

上記事項の後退・前進差分式を一般化する。式(A1.1-1.1)の $u(x-jh)$ も考

慮したテイラー展開から $u'(x)$ を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \frac{u(x - kh) - u(x)}{-kh} - \frac{(-k)h}{2!} u''(x) - \dots - \\
 &\quad \frac{(-kh)^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
 &\quad \vdots \\
 u'(x) &= \frac{u(x - h) - u(x)}{-h} - \frac{-h}{2!} u''(x) - \dots - \\
 &\quad \frac{(-h)^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
 &\quad \vdots \\
 u'(x) &= \frac{u(x + h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2!} u''(x) - \dots - \\
 &\quad \frac{(h)^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \\
 &\quad \vdots \\
 u'(x) &= \frac{u(x + (2n - k)h) - u(x)}{(2n - k)h} - \frac{(2n - k)h}{2!} u''(x) - \dots - \\
 &\quad \frac{((2n - k)h)^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n}) \tag{A1.1-1.5a}
 \end{aligned}$$

上式に $\sum_{j=-k}^{2n-k} C_j = 1$ となるような係数 C_j を掛けて、全てを足し合わせると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \sum_{j=-k}^{2n-k} C_j \frac{u(x + jh) - u(x)}{jh} - \frac{h}{2!} u''(x) \sum_{j=-k}^{2n-k} j C_j - \dots - \\
 &\quad \frac{h^{2n-1}}{(2n)!} u^{(2n)}(x) \sum_{j=-k}^{2n-k} j^{2n-1} C_j + O(h^{2n}) \tag{A1.1-1.5b}
 \end{aligned}$$

上式で、 $2n$ 精度のためには、 h, h^2, \dots, h^{2n-1} の項は零でなければならないので、係数 C_j は、次式から求められる。

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
-k & -k+1 & \vdots & (-1)^1 & 1^1 & \vdots & (2n-k)^1 \\
(-k)^2 & (-k+1)^2 & \vdots & (-1)^2 & 1^2 & \vdots & (2n-k)^2 \\
(-k)^3 & (-k+1)^3 & \vdots & (-1)^3 & 1^3 & \vdots & (2n-k)^3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(-k)^{2n-1} & (-k+1)^{2n-1} & \cdots & (-1)^{2n-1} & 1^{2n-1} & \cdots & (2n-k)^{2n-1}
\end{pmatrix} \quad (\text{A1.1-1.5c})$$

$$\times \begin{pmatrix} C_{-k} \\ C_{-k+1} \\ C_{-k+2} \\ C_{-k+3} \\ \vdots \\ C_{2n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $2n$ 次精度の1階微分の後退差分式は、次式で与えられる。

$$u'(x) = \sum_{j=-k}^{2n-k} C_j \frac{u(x+jh) - u(x)}{jh} + O(h^{2n}) \quad (\text{A1.1-1.5d})$$

ここで、寄り道をする。前進差分式や後退差分式は1次精度であり、中央差分式は2次精度になるという「格子と微分の評価点の関係」(図 1.1-1 参照)を考慮すると、前進差分式や後退差分式においても、微分評価点をその中間点に取れば、次式の2次精度の中央差分式になることを覚えておくとよい。

$$u'(x+h/2) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h^2)$$

$$u'(x-h/2) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h^2)$$

(1.1-7a)

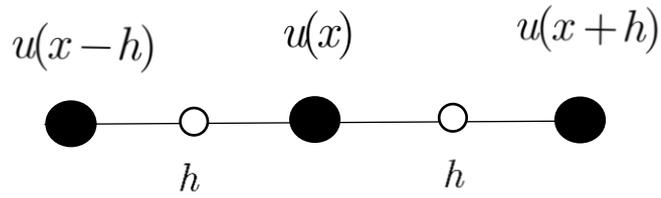


図 1.1-1 差分格子点 (●) と微分の評価点 (○：差分格子点の中間点)

厳密には、上式は次式のテイラー展開の差から求められる式において、
 $x \rightarrow x \pm h/2$ と置き換えて求められる (2n 次精度の形式的中間点評価の差分式
 の導出は例題 1.1-2 参照)。

$$u(x + h/2) = u(x) + \frac{h}{2}u'(x) + \frac{1}{8}h^2u''(x) + \dots \quad (1.1-7b)$$

$$u(x - h/2) = u(x) - \frac{h}{2}u'(x) + \frac{1}{8}h^2u''(x) + \dots$$

ここに、中間点での微分評価による高次精度の 1 階微分の差分式を例題 1.1-2
 に示す (5 章以降の食い違い格子差分式による波動方程式の高精度化に利用で
 きる)。

例題 1.1-2 1 階微分の間中点評価の差分式の精度

次式のような関数 $u(x + jh/2)$ のテイラー展開から、1 階微分の間中点評価の差分式を整理する。

$$u\left(x \pm \frac{jh}{2}\right) = u(x) \pm \left(\frac{jh}{2}\right) u'(x) + \left(\frac{jh}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} u''(x) \pm \left(\frac{jh}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} u'''(x) + \cdots + \left(\frac{jh}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(2n)!} u^{(2n)}(x) + O(h^{2n+1}) \quad (\text{A1.1-2.1})$$

ここに、 $j = 1, 3, 5, \dots$ とする。

上式から $u'(x)$ を求めると、次式が得られる。

$$u'(x) = \frac{u(x + h/2) - u(x - h/2)}{h} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \cdots - \left(\frac{h}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{(2n-1)!} u^{(2n-1)}(x)$$

$$u'(x) = \frac{u(x + 3h/2) - u(x - 3h/2)}{3h} - \left(\frac{3h}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \cdots - \left(\frac{3h}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{(2n-1)!} u^{(2n-1)}(x) \quad (\text{A1.1-2.2a})$$

$$\vdots$$

$$u'(x) = \frac{u(x + jh/2) - u(x - jh/2)}{jh} - \left(\frac{jh}{2}\right)^2 \frac{1}{3!} u'''(x) - \cdots - \left(\frac{jh}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{(2n-1)!} u^{(2n-1)}(x)$$

上式に $\sum_{j=1}^{2n-1} C_j = 1$ となるような係数 C_j を掛けて、全てを足し合わせると、次

式が得られる。

$$u'(x) \sum_{j=1}^{2n-1} C_j = \sum_{j=1}^{2n-1} C_j \frac{u(x + jh/2) - u(x - jh/2)}{jh} - \dots - \quad (\text{A1.1-2.3a})$$

$$\left(\frac{h}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{(2n-1)!} u^{(2n-1)}(x) \sum_{j=1}^{2n-1} j^{(2n-2)} C_j + O(h^{2n})$$

ここに、係数 C_j は、次式から求められる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3^2 & \cdots & (2n-1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3^{2n-2} & \cdots & (2n-1)^{2n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1-2.3b})$$

例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/8 \\ -1/8 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1-2.3c})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3^2 & 5^2 \\ 1 & 3^4 & 5^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1-2.3d})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \\ C_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 75 & -11.333 & 0.333 \\ -12.5 & 13 & 0.333 \\ 1.5 & -1.666 & 0.1666 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75/64 \\ -25/128 \\ 3/128 \end{pmatrix}$$

式(A1.1-1.3a)は、 $j = 2l - 1, l = 1, 2, 3, \dots$ として、次式のように書き変えて

用いることも多い。

$$u'(x) = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^n c_{2l-1} (u(x + (2l-1)h/2) - u(x - (2l-1)h/2)) \quad (\text{A1.1-2.4})$$

$$c_{2l-1} = \frac{C_{2l-1}}{2l-1}$$

上式で、 $l = 1$ ($n = 1$) では $c_1 = 1$ であり (式(A1.1-1.2a)上段式に相当する)、次式の 2 次精度の差分式 (中央差分式) となる。

$$u'(x) = \frac{u(x + h/2) - u(x - h/2)}{h} \quad (\text{A1.1-2.5a})$$

$n = 2$ では $(c_1, c_2) = (9/8, -1/24)$ であり、次式の 4 次精度の差分式となる。

$$u'(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{9}{8}(u(x + h/2) - u(x - h/2)) - \frac{1}{24}(u(x + 3h/2) - u(x - 3h/2)) \right) \quad (\text{A1.1-2.5b})$$

$n = 3$ では $(c_1, c_2, c_3) = (75/64, -25/384, 3/640)$ であり、次式の 6 次精度の差分式となる。

$$u'(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{75}{64}(u(x + h/2) - u(x - h/2)) - \frac{25}{384}(u(x + 3h/2) - u(x - 3h/2)) + \frac{3}{640}(u(x + 5h/2) - u(x - 5h/2)) \right) \quad (\text{A1.1-2.5c})$$

$n = 4$ では $(c_1, c_2, c_3, c_4) = (1225/1024, -245/3072, 49/5120, -5/7168)$ であり、次式の 8 次精度の差分式となる。

$$u'(x) = \frac{1}{h} \left(\frac{1225}{1024}(u(x + h/2) - u(x - h/2)) - \frac{245}{3072}(u(x + 3h/2) - u(x - 3h/2)) + \frac{49}{5120}(u(x + 5h/2) - u(x - 5h/2)) - \frac{5}{7168}(u(x + 7h/2) - u(x - 7h/2)) \right) \quad (\text{A1.1-2.5c})$$

参考までに、10 と 12 次精度の係数は、式(A1.1-1.3b)を解いて、次式の

ように求められる。

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19845 / 16384 \\ -735 / 8192 \\ 567 / 40960 \\ -405 / 229376 \\ 35 / 294912 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160083 / 131072 \\ -12705 / 131072 \\ 22869 / 131072 \\ -5445 / 1835008 \\ 847 / 2359296 \\ -63 / 2883584 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.1-2.5d})$$

2 階微分の差分式の説明に移る。式(1.1-2)の上段と 2 段の式を 2 階微分に関して次式のように書き直す。

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{2}{h^2}(u(x+h) - u(x)) - \frac{2}{h}u'(x) - \frac{1}{3}hu'''(x) - \dots \\ u''(x) &= \frac{2}{h^2}(u(x-h) - u(x)) + \frac{2}{h}u'(x) + \frac{1}{3}hu'''(x) - \dots \end{aligned} \quad (1.1-8)$$

$$2u''(x) = \frac{1}{h^2}(u(x+2h) - u(x)) - \frac{2}{h}u'(x) - \frac{4}{3}hu'''(x) - \dots$$

$$2u''(x) = \frac{1}{h^2}(u(x-2h) - u(x)) + \frac{2}{h}u'(x) + \frac{4}{3}hu'''(x) - \dots$$

上式の 3 段目の式から上段式を差し引くと、次式が得られる。

$$u''(x) = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} - hu'''(x) + \dots \quad (1.1-9a)$$

また、上段と 2 段目の式の和より、次式が得られる。

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2u^{(4)}(x) + \dots \quad (1.1-9b)$$

したがって、次式のように 1 次と 2 次精度の 2 階微分の差分式が得られる。

$$u''(x) = \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} + O(h) \quad (1.1-9c)$$

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

1 階微分の中央点評価の差分式を使うと、次式のように 2 階微分の 2 次精度の中央差分式が得られる。

$$u''(x) = \frac{u'(x+h/2) - u'(x-h/2)}{h}$$

$$= \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} + O(h) \quad (1.1-10)$$

$$= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

4 精度の 2 階微分の差分式は、7 階微分までのテイラー展開をして、微小長 h^3 までの項を消去して求めることができる。ここでは、次式の結果のみを示す。

$$u''(x) = \frac{-u(x+2h) + 16u(x+h) - 30u(x) + 16u(x-h) - u(x-2h)}{12h^2} + O(h^4) \quad (1.1-11)$$

1.2 差分式の安定性

差分式の数値計算上の安定性を調べる有用な方法は、フォン・ノイマン (Von

Neumann) のよるフーリエ解析法である。ただし、この方法は、線形系の方程式にしか使えない。この方法を空間と時間の関数 $u(x,t)$ で説明すると、以下のようになる。

空間のみに関するフーリエ変換は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\kappa,t) e^{i\kappa x} d\kappa \\ U(\kappa,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\kappa x} dx \end{aligned} \quad (1.2-1)$$

ここで、時間と空間の離散点 $t_n = ndt, x_j = jdx$ における $u(x,t)$ を $u(x_j, t_n) = u_j^n$ と表す。この離散点の波数領域の解を次式のように表すものとする。

$$u(x_j, t_n) = u_j^n = U^n(\kappa) e^{i\kappa jdx} \quad (1.2-2a)$$

この表現を使うと、次の時刻の離散点の波数領域の解は、次式で表される。

$$u(x_j, t_{n+1}) = u_j^{n+1} = U^{n+1}(\kappa) e^{i\kappa jdx} \quad (1.2-2b)$$

同じ空間座標点における波数領域の解が、時間ステップの増加による増幅率は、次式で与えられる。

$$\rho(\kappa) = \frac{u_j^{n+1}}{u_j^n} = \frac{U^{n+1}(\kappa)}{U^n(\kappa)} \quad (1.2-3a)$$

$|\rho(\kappa)| \leq 1$ であれば、時間ステップの増加に対して、振幅が減少または一定なので、数値計算上の安定性が保証される。これが、フォン・ノイマンの条件である。

具体的には、差分式に $u_j^n = U^n(\kappa) e^{i\kappa jdx}$ を代入して増幅率を求めるため、簡単

化して、次式のように増幅率を与える場合が一般的である。

$$\rho(\xi) = \frac{U^{n+1}}{U^n}, \xi = \kappa j dx \quad (1.2-3b)$$

後で示す次式の拡散方程式を時間微分は 1 次精度、空間 2 階微分は中央差分式で表す場合、増幅率は以下のようなになる。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (1.2-4)$$

離散点 $t_n = ndt, x_j = jdx, n = 0, \dots, N, j = 1, \dots, J-1$ における差分式は、次式のようになる。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = a \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{dx^2} \quad (1.2-5)$$

この差分式は、時刻 $t_n = ndt$ の値 u_j^n から直接的に u_j^{n+1} が求められない構造になっているので、陰の差分式と呼ばれる。

ここで、 $r = adt / dx^2$ として、上式を書き変えると、次式のようなになる。

$$-ru_{j+1}^{n+1} + (1 + 2r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1} = u_j^n \quad (1.2-6a)$$

上式に波数領域の解 $u_j^n = U^n e^{i\kappa j dx}$ を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (-re^{i\xi} + (1 + 2r) - re^{-i\xi})U^{n+1} &= U^n \\ \xi &= \kappa dx \end{aligned} \quad (1.2-6b)$$

上式をオイラーの公式を使って三角関数で表すと、次式のようなになる。

$$(1 + 4r \sin^2 \xi / 2)U^{n+1} = U^n \quad (1.2-6c)$$

したがって、増幅率は、

$$\rho(\xi) = \frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \xi / 2} \quad (1.2-6d)$$

上式では、 $4r \sin^2 \xi / 2 \geq 0$ が成立するので、 $|\rho(\xi)| \leq 1$ となる。このことは dt / dx^2 の値に依存せずに数値的に安定を意味するので、これを無条件安定と呼ぶ。

その他、次式のクランク・ニコルソン (Crank・Nicolson) の差分式も、無条件安定の差分式である。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = \frac{a}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} + \frac{a}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{dx^2} \quad (1.2-7a)$$

上式を書き変えると、次式のようになる。

$$-ru_{j+1}^{n+1} + 2(1+r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1} = ru_{j+1}^n + 2(1-r)u_j^n + ru_{j-1}^n \quad (1.2-7b)$$

上式に波数領域の解 $u_j^n = U^n e^{ikjdx}$ を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} (-re^{i\xi} + 2(1+r) - re^{-i\xi})U^{n+1} &= (re^{i\xi} + 2(1-r)re^{-i\xi})U^n \\ \xi &= \kappa dx \end{aligned} \quad (1.2-7c)$$

上式を三角関数で表すと、次式のようになる。

$$(1 + 2r \sin^2 \xi / 2)U^{n+1} = (1 - 2r \sin^2 \xi / 2)U^n \quad (1.2-7d)$$

したがって、増幅率は、

$$\rho(\xi) = \frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{1 - 2r \sin^2 \xi / 2}{1 + 2r \sin^2 \xi / 2} \quad (1.2-7e)$$

$r \sin^2 \xi / 2 \geq 0$ なので、分母 ≥ 1 、分子 ≤ 1 となるので、 $|\rho(\xi)| \leq 1$ である。これより、クラック・ニコルソンの差分式は無条件安定となる。

上式の中央差分式右辺の時刻を $t_n = ndt$ の値に置き換えた次式の中央差分式の安定性は、無条件安定とはならないことを以下に示す。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (1.2-8a)$$

この差分式は時刻 $t_n = ndt$ の値から時間ステップの値が求められる簡単な構造になっているので陽の差分式と呼ばれる。

陰の差分式と同様に上式の陽の差分式を書き変えると、次式のようになる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (1.2-8b)$$

上式に波数領域の解 $u_j^n = U^n e^{ikjdx}$ を代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} U^{n+1} &= (1 + r(e^{i\xi} + e^{-i\xi} - 2))U^n \\ \xi &= \kappa dx \end{aligned} \quad (1.2-8c)$$

上式は次式のように表される。

$$U^{n+1} = (1 - 4r \sin^2 \xi / 2)U^n \quad (1.2-8d)$$

したがって、増幅率は、

$$\rho(\xi) = \frac{U^{n+1}}{U^n} = 1 - 4r \sin^2 \xi / 2 \quad (1.2-8e)$$

安定条件は、 $|\rho(\xi)| \leq 1$ なので、この場合には無条件安定とはならず、次式の条

件を満たさなければならない。

$$4r \sin^2 \xi / 2 \leq 2 \quad (1.2-8f)$$

上式の条件において、 $0 \leq \sin^2 \xi / 2 \leq 1$ なので、厳しい条件として最大値を採用すると、係数は次式を満足する必要となる。

$$r = a dt / dx^2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2a} \quad (1.2-8g)$$

上式を満足するように dt, dx を決める必要がある（分母は dx^2 なので、 dx を小さく取ると分母はその2乗で大きくなることに注意せよ）。この条件は、数値計算上の安定条件であって、計算精度（微分の1次精度、2次精度、4次精度の差分式に依存）を示すものではないことにも注意せよ。

2章 時間と1空間変数の偏微分方程式

ここでは、3章以後の波動方程式の前に、差分式の適用として簡単な時間と1空間変数 $u(x,t)$ の拡散方程式（熱伝導方程式）を取り上げて、3つの差分表示を求める。また、数値計算例により、安定条件について考察する。

2.1 拡散方程式と厳密解

次式の拡散方程式の初期条件と境界条件を満たす解析解を説明する。

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.1-1a)$$

$$\text{初期条件： } u(x,0) = \sin \pi x \quad (2.1-1b)$$

$$\text{境界条件： } u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (2.1-1c)$$

この厳密解は、次式で与えられる。

$$u(x,t) = \sin \pi x e^{-a\pi^2 t} \quad (2.1-2)$$

上式の厳密解は、次式の変数分離により、以下のように求めたものである。

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2.1-3a)$$

これを拡散方程式に代入・整理すると、時間のみの関数が空間変数のみの関数に等しい式が得られる。この式は次式のように定数でなければならない(両辺を時間、または空間で微分すると零となるので定数でなければならない)。

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (2.1-3b)$$

上式より、次式が成り立つ。

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \frac{dT}{dt} = -a\lambda^2 T \quad (2.1-3c)$$

上式の一般解は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} X &= C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \\ T &= C_3 e^{-a\lambda^2 t} \end{aligned} \quad (2.1-3d)$$

したがって、次式が拡散方程式の一般解となる。

$$u(x,t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-a\lambda^2 t} \quad (2.1-3e)$$

初期条件より、 $A = 0, B = 1, \lambda = \pi$ となり、境界条件も満たす解は次式である。

$$u(x,t) = \sin \pi x e^{-a\pi^2 t} \quad (2.1-3f)$$

2.2 差分式による解法

この場合、時間と空間を dt, dx の間隔で離散化し、離散点 $t_n = ndt, x_j = jdx$ における $u(x, t)$ を $u(x_j, t_n) = u_j^n$ と表す。なお、 $n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, J$ とする。初期条件は u_j^0 、境界条件は u_0^n, u_J^n である。

拡散方程式の差分式として、次式のような時間に関する 1 次精度、時刻 t_{n+1} と t_n における空間に関する 2 次精度の中央差分式の重み p の平均値を与える。

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt} = p \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{dx^2} + (1-p) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (2.2-1)$$

重み $p = 1$ は、上式右辺の第 1 項のみ（時間 1 次精度と空間 2 次精度の陽差分式）、 $p = 0$ は、第 2 項のみ（時間 1 次精度と空間 2 次精度の陰差分式）、 $p = 1/2$ は、クランク・ニコルソン（Crank・Nicolson）の差分式となる。

クランク・ニコルソンの差分式左辺の時間微分は 1 次精度のように見えるが、時間の中間点 $n + 1/2$ で評価した 2 次精度の差分式である。ただし、時間の中間点は存在しないため、右辺の空間 2 階微分の 2 次精度の中央差分式の時刻 n と $n + 1$ の平均値を用いているのが特徴である。クランク・ニコルソンの差分式は、無条件安定であることが広く知られており、拡散方程式の差分式としてよく用いられる。3 つの重み毎の差分式の模式図を示すと図 2.2-1 のようになる。

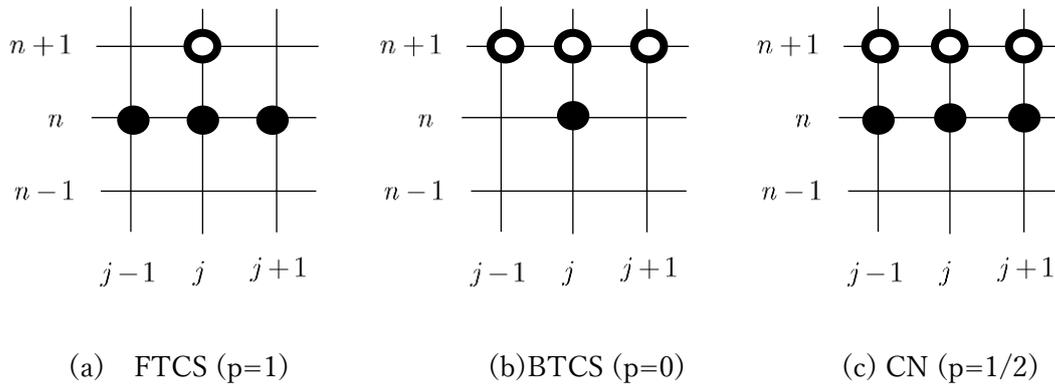


図 2.2-1 拡散方程式の 3 つの差分式の模式図

(● : 時刻 n の値、○: 時刻 $n+1$ の値、FTCS(Forward Time Centered Space)、BTCS(Backward Time Centered Space)、CN(Crank-Nicolson))

上式の差分式より、左辺が時刻 t_{n+1} の値、右辺が時刻 t_n の値となるように整理すると、次式が得られる。

$$-rp u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2rp)u_j^{n+1} - rp u_{j-1}^{n+1} = v_j^n = rqu_{j+1}^n + (1 - 2rq)u_j^n + rqu_{j-1}^n \quad (2.2-2a)$$

ここに、

$$r = \frac{adt}{dx^2}, \quad q = 1 - p \quad (2.2-2b)$$

上式は 3 地点 x_{j+1}, x_j, x_{j-1} を含んだ時間に関する漸化式なので、初期条件と境界条件から次の時刻と他点の値が求められる。このことをわかり易くするために、上式を次式の行列で表す。なお、次式では、境界条件 $u_0^n = u_J^n = 0$ を考慮しているため、 $j = 1, 2, \dots, J-1$ となっている。

$$\begin{pmatrix} (1+2rp) & -rp & & & 0 \\ -rp & (1+2rp) & -rp & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -rp & (1+2rp) & -rp \\ 0 & & & & -rp & (1+2rp) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{pmatrix} \quad (2.2-2c)$$

$$\begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2rq) & rq & & & 0 \\ rq & (1-2rq) & rq & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & rq & (1-2rq) & rq \\ 0 & & & & rq & (1-2rq) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix} \quad (2.2-2d)$$

上式より、 u_j^n を与えて v_j^n を求め、この v_j^n を上式上段に代入し、 u_j^{n+1} を求めることができる。

2.3 数値計算例

(1) 重み $p = 1$ の場合 (陰の中央差分式)

この場合、次式の漸化式となる。フォン・ノイマンの安定条件は無条件安定である。

$$-ru_{j-1}^{n+1} + (1+2r)u_j^{n+1} - ru_{j+1}^{n+1} = u_j^n \quad (2.3-1a)$$

$$\begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-r) & r/2 & & & 0 \\ r/2 & (1-r) & r/2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & r/2 & (1-r) & r/2 \\ 0 & & & & r/2 & (1-r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{pmatrix} \quad (2.3-2c)$$

数値計算では、中央差分式と同じ値を用いる。

これも行列を使って連立 1 次方程式を解く方法も考えられるが、漸化式から解く方が数値計算上楽である。

図 2.3-1 は、拡散方程式の厳密解と中央差分式、クランク・ニコルソンの差分式の 3 つを時刻 $t = 0, 0.02, 0.04, 0.08$ 毎に比較した結果を示す。実線は厳密解、破線は中央差分式、一点破線はクランク・ニコルソンの差分式による結果を示す。

この図から、破線の中央差分式の結果は、時間の経過につれて厳密解からの誤差が見られる。しかし、一点破線のクランク・ニコルソン差分式の数値解は、厳密解との誤差はないように見えるので、クランク・ニコルソン差分式の精度は高い。

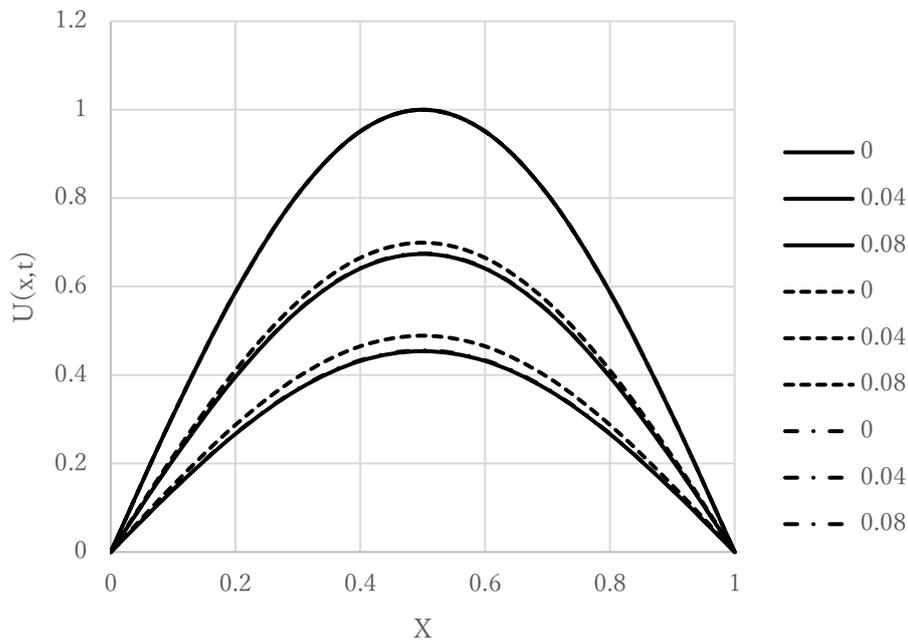


図 2.3-1 拡散方程式の厳密解と中央差分式、クランク・ニコルソンの差分式の 3 つの解の時刻 $t = 0, 0.02, 0.04, 0.08$ 毎の比較 (実線は厳密解、破線は中央差分式、一点破線はクランク・ニコルソンの差分式)

図 2.3-2 は、 $u(0.5, t)$ の厳密解と中央差分、クランク・ニコルソンの差分による数値解を比較したものである。実線の厳密解と一点破線のクランク・ニコルソン (CN) の数値解は、ほぼ同じであるが、破線の中央差分の数値解の精度はやや落ちる。

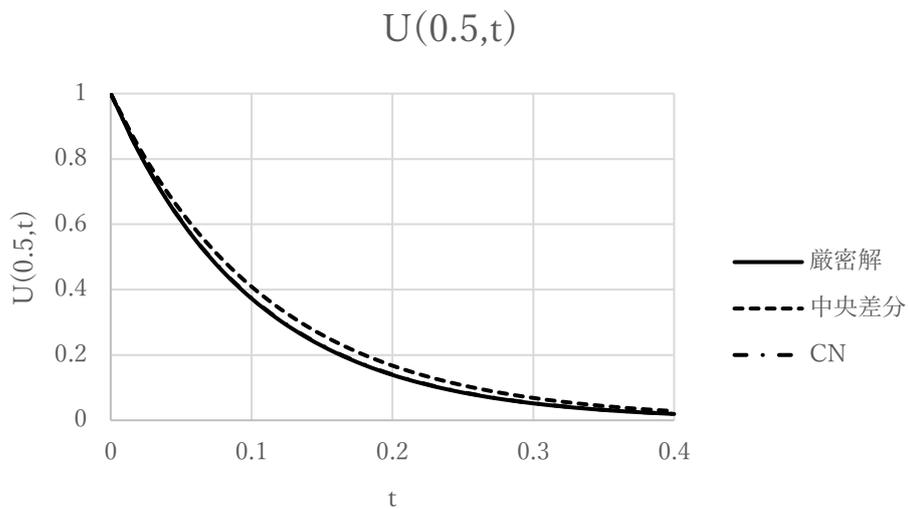


図 2.3-2 $u(0.5,t)$ の厳密解と中央差分、クランク・ニコルソンの差分式による数値解の比較

(3) 重み $p = 0$ の場合 (陽の中央差分式)

この場合、次式の漸化式となる。また、フォン・ノイマンの安定条件は次式である。

$$\frac{dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2a} \tag{2.3-3a}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{2.3-3b}$$

行列表示すると、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{j-2}^{n+1} \\ u_{j-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2r) & r & & & 0 \\ r & (1-2r) & r & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ 0 & & & & r & (1-2r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \end{pmatrix} \quad (2.3-3c)$$

数値計算では、中央差分式と同じ値を用いる。これも行列を使って連立 1 次方程式を解く方法も考えられるが、漸化式から解く方が数値計算上容易である。

この数値計算では、次式のように安定条件を満たしていない。

$$\frac{dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2a} \rightarrow \frac{0.02}{(0.1)^2} = 2 > 0.5 (= \frac{1}{2a}) \quad (2.3-3d)$$

事実、 $u(0.5, t)$ の厳密解と陽の差分式の結果を比較した図 2.3-3 のように時刻 0.34 以後、数値計算は発散する。

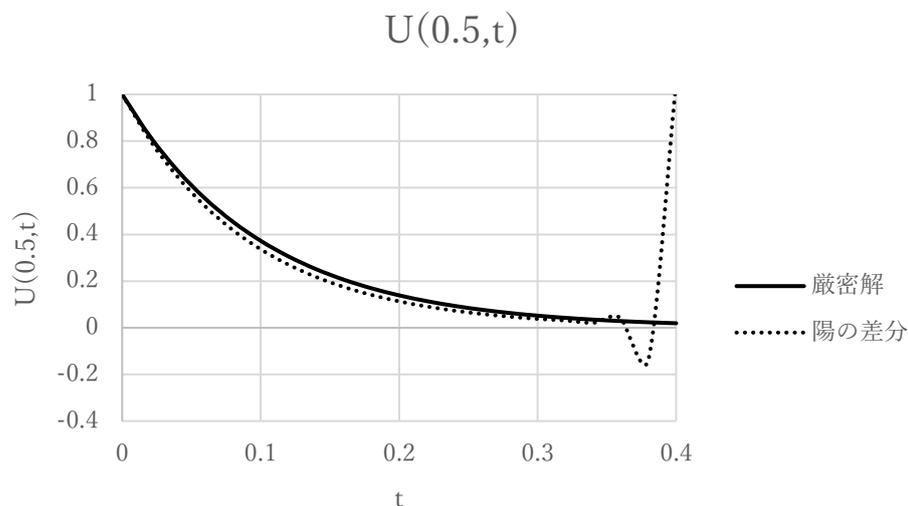


図 2.3-3 $u(0.5, t)$ の厳密解と陽の差分式による数値解の比較

そこで、安定条件を満たすように次式の値を使った陽の差分式の計算を
 と、図 2.3-4 のように発散しなくなる。実線は厳密解、破線は陽の中央差分式の
 結果を示す。

$$\frac{dt}{dx^2} \leq \frac{1}{2a} \rightarrow \frac{0.006}{(0.125)^2} = 0.384 < 0.5 (= \frac{1}{2a}) \quad (2.3-3e)$$

$$r = 0.384$$

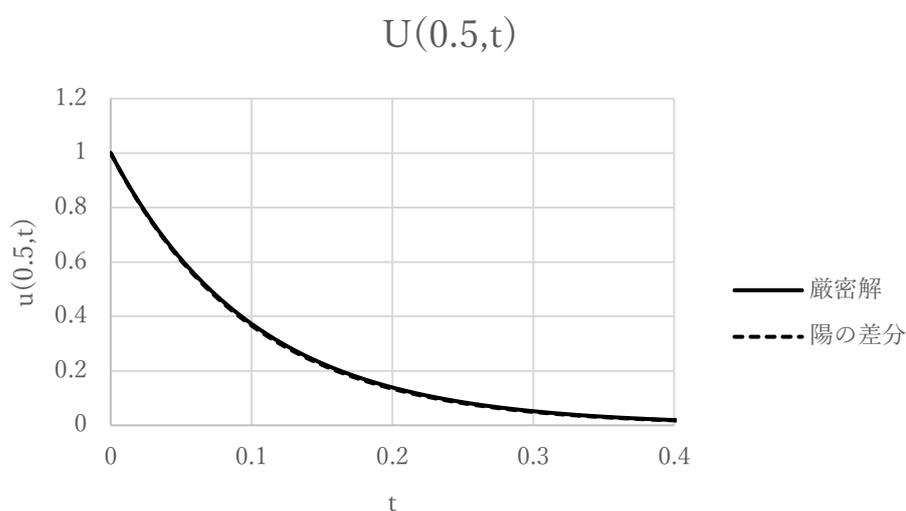


図 2.3-4 $u(0.5,t)$ の厳密解と安定条件を満たす格子間隔による陽の差分式の解の比較

3章 1次元波動方程式

1次元波動方程式の変位に関する時間と空間の2次精度の中心差分式の数値計算上の安定条件（CFL条件）の説明と数値計算例を示す。

3.1 波動方程式の差分式

次式の波動方程式の差分式を求める。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1-1)$$

時間と空間に関する2次精度の中心差分式は次式のようにになる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (3.1-2a)$$

上式から、次式の漸化式が得られる。

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.1-2b)$$

ここに、

$$r = \frac{Cdt}{dx} \quad (3.1-2c)$$

この漸化式により、時刻 t_n, t_{n-1} の変位から時刻 t_{n+1} の変位が得られる。したがって、時刻 $t_0, t_1 (n = 1, 2)$ の初期変位が与えられると、逐次的に変位の時間と空間変化が求められる。

ここで、1.2節のフーリエ変換を用いたフォン・ノイマンの数値計算上の安定性を調べておく。

$$u_j^n = U^n(\kappa) e^{i\kappa j dx} \quad (3.1-3a)$$

上式を差分式に代入すると、次式が得られる。

$$\rho(\xi) + \frac{1}{\rho(\xi)} = 2(1 - 2r^2 \sin^2 \xi / 2) \quad (3.1-3b)$$

上式を整理すると、次式の増幅率 $\rho(\xi)$ に関する2次方程式が得られる。

$$\rho^2(\xi) - 2(1 - 2\lambda^2)\rho(\xi) + 1 = 0 \quad (3.1-4a)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \xi &= \kappa dx, \quad r = \frac{C dt}{dx}, \quad \lambda = r \sin \xi / 2 \\ \rho(\xi) &= \frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{U^n}{U^{n-1}} \end{aligned} \quad (3.1-4b)$$

上式の2次方程式の根から、次式の2つの増幅率が得られる。

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 1 - 2\lambda^2 \pm i2\lambda\sqrt{1 - \lambda^2}, & |\lambda| \leq 1 \\ 1 - 2\lambda^2 \mp 2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1}, & |\lambda| > 1 \end{cases} \quad (3.1-4c)$$

この根を考察すると以下のようなになる。

1) $\lambda \leq 1$ の場合 ($C dt / dx \leq 1$ の時、無条件安定) :

$$|\rho(\xi)|^2 = (1 - 2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(1 - \lambda^2) = 1 \quad (3.1-4d)$$

したがって、 $|\rho_1(\xi)| = |\rho_2(\xi)| = 1$ なので、 $|\lambda| \leq 1$ の時、無条件安定となる。安全側の評価として、 $|\sin \xi / 2| = 1$ とすると、 $Cdt / dx \leq 1$ の時、無条件安定となる。

この条件は、CFL条件（Courant-Friedrichs-Lewy）とも呼ばれ、あくまでも安定条件で、数値計算精度を示すものではない。

2) $\lambda > 1$ の場合（ $Cdt / dx > 1$ の時、不安定）：

$$\begin{aligned} \rho_1(\xi) &= 1 - 2\lambda^2 - 2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} \\ \rho_2(\xi) &= 1 - 2\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1} \end{aligned} \quad (3.1-4e)$$

この場合、2つの異なる根は実数で、かつ $\rho_1(\xi)\rho_2(\xi) = 1$ が成立する。したがって、

$|\rho_1(\xi)|, |\rho_2(\xi)|$ の一方は1より大きくなり、不安定である。

3.2 数値計算例

(1) 計算で用いる波動方程式の解析解

次式の初期条件と境界条件の波動方程式の厳密解を求める。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.2-1a)$$

$$\text{初期条件： } u(x, 0) = \sin \pi x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad (3.2-1b)$$

$$\text{境界条件： } u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (3.2-1c)$$

基本的には、変数分離法を使うが、この場合の初期条件を考慮して、次式を仮定する。

$$u(x,t) = a(t) \sin \pi x \quad (3.2-2a)$$

これを波動方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + (C\pi)^2 a = 0 \quad (3.2-2b)$$

この一般解は、次式で与えられ。

$$\begin{aligned} a(t) &= A \cos C\pi t + B \sin C\pi t \\ \frac{da(t)}{dt} &= -AC\pi \sin C\pi t + BC\pi \cos C\pi t \end{aligned} \quad (3.2-2c)$$

初期条件より、 $A = \sin \pi x, B = 0$ が得られるので、初期条件と境界条件を満たす解は、次式で与えられる。

$$u(x,t) = \sin \pi x \cos C\pi t \quad (3.2-2d)$$

図 3.2-1 は、上式の厳密解において $C = 1$ の時の時刻 $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ 毎の変位の厳密解を示す。

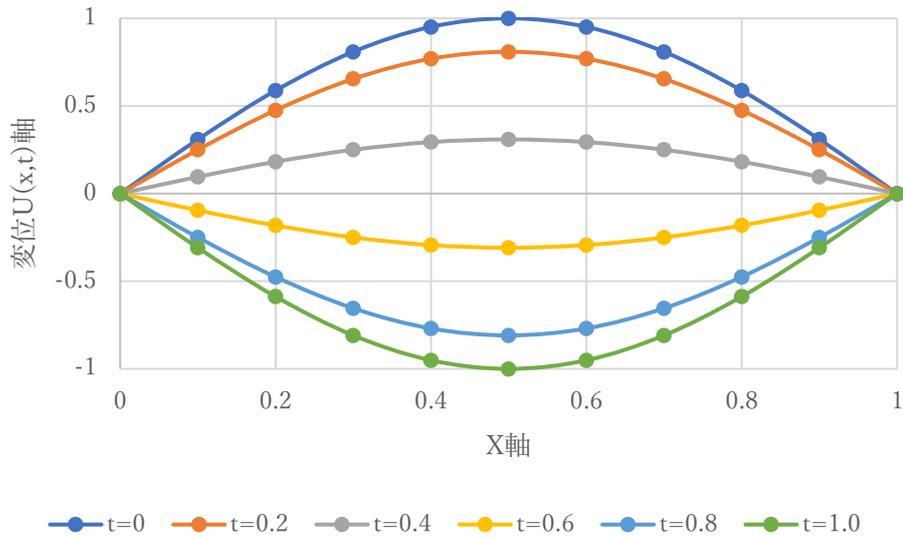


図 3.2-1 初期条件と境界条件下での波動方程式（弦の振動）の厳密解

(2) 差分式による解

時間と空間に関する 2 次精度の中心差分式は次式のようなになる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (3.2-3a)$$

$$(j = 1, \dots, J, n = 0, \dots, N)$$

上式から、次式の漸化式が得られる。

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.2-3b)$$

ここに、

$$r = \frac{Cdt}{dx} \quad (3.2-3c)$$

上式の漸化式は、時刻 t_n, t_{n-1} の 2 つ前までの時刻の変位から時刻 t_{n+1} の変位を

求める構成式となっている。このため、次式のようにテイラー展開を用いて、初期条件の変位と速度および波動方程式を利用した漸化式を考慮しなければならない。

$$u(x, dt) = u(x, 0) + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} dt^2 + O(dt^3) \quad (3.2-4a)$$

上式に初期条件の変位と速度（今回の例題は、 $\dot{u}(x, 0) = 0$ ）および波動方程式を考慮すると、次式が得られる。

$$u(x, dt) \simeq u(x, 0) + \frac{C^2 dt^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} \quad (3.2-4b)$$

上式を差分式（2階微分は中央差分式を使う）に書き直すと、次式が得られる。

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{r^2}{2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) \quad (3.2-4c)$$

この差分式の右辺は、時刻 t_0 の初期条件のみのため、これより時刻 t_1 の変位が求められる。したがって、初期条件のみから、 $u_j^0 (= \sin \pi x)$, u_j^1 が求められ、 u_j^2 以降の時刻の変位は、波動方程式の漸化式(3.2-3b)から計算できる。この計算においては、境界条件 $u_0^n = u_{j+1}^n = 0$ を忘れてはならない。以下にこの手順を列記する。

- (a) 境界条件 $u_0^n = u_{j+1}^n = 0$ を入力する。
- (b) 初期条件 $u_j^0 (= \sin \pi x)$ と $u_j^1 = u_j^0 + \frac{r^2}{2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)$ より、 u_j^1 を求める。
- (c) 漸化式 $u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + r^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$ より、 $u_j^2, u_j^3, \dots, u_j^{n-1}$ を求める。

差分法の数値安定性には、CFL 条件 $r = Cdt / dx \leq 1$ が重要である。図 3.2-2 は、 $C = 1$ として、 $r = 0.5, 1.0, 5.0$ の 3 つの場合の時間間隔と空間間隔の関係を示す。 $r = 1.0$ では数値計算上安定であるが、精度は良くない。そこで、以下には精度良く数値計算上安定な $r = 0.5$ の場合と、数値計算上不安定な $r = 5$ (計算精度も悪いのは当然である) の場合の 2 つの例題を示す。

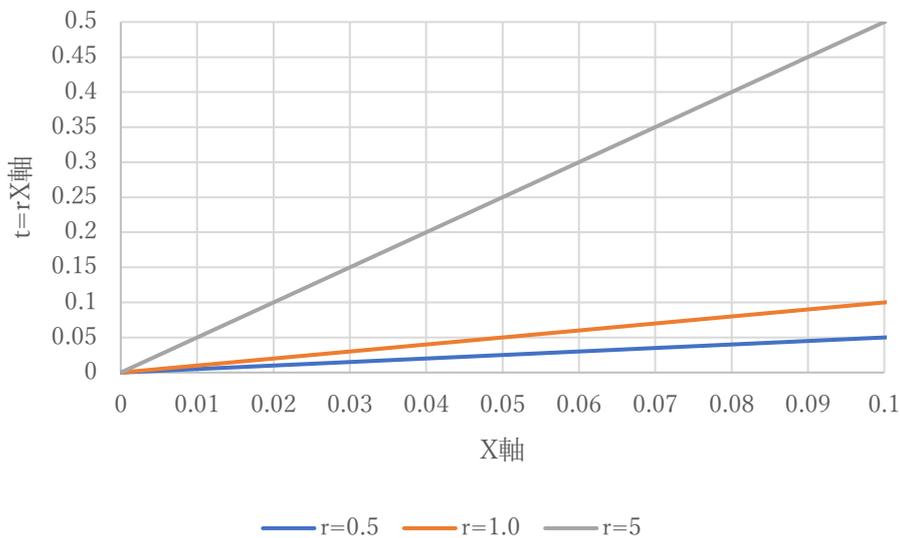


図 3.2-2 $C = 1$ の時の $r = 0.5, 1.0, 5.0$ の 3 つの場合の時間間隔と空間間隔の関係 (CFL 条件の時間間隔と空間間隔: $r \leq 1.0$ 安定、 $r > 1.0$ 不安定)

(3) 安定条件を満たす数値計算例

数値計算例として、CFL 条件 $Cdt / dx \leq 1$ を満足する次式の条件の差分式の解を示す。

$$C = 1, \quad dt = 0.05, \quad dx = 0.1, \quad r = \frac{Cdt}{dx} = 0.5 < 1 \quad (3.2-5a)$$

$$\text{初期条件: } u_j^0 (= \sin \pi x), u_j^1, (j = 1, \dots, 9) \quad (3.2-5b)$$

$$\text{境界条件: } u_0^0 (= \sin \pi x), u_{j+1}^0, (j = 0, 9) \quad (3.2-5c)$$

$$u_0^1, u_{j+1}^1, (j = 0, 9)$$

図 3.2-3 は、上式の初期条件と境界条件を考慮した $u_j^0 (= \sin \pi x), u_j^1$ を示す。

横軸の両端が境界条件を満たす時刻 t_0, t_1 の変位 $(u_0^0, u_{10}^0), (u_0^1, u_{10}^1)$ である。

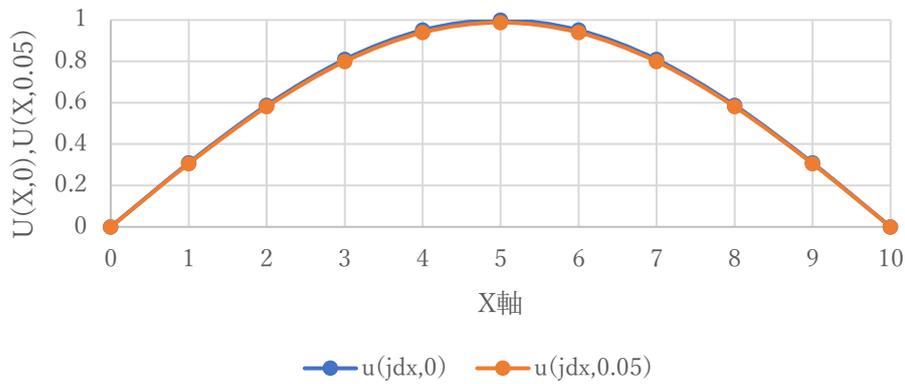


図 3.2-3 初期条件と境界条件を考慮した $u_j^0 (= \sin \pi x), u_j^1$

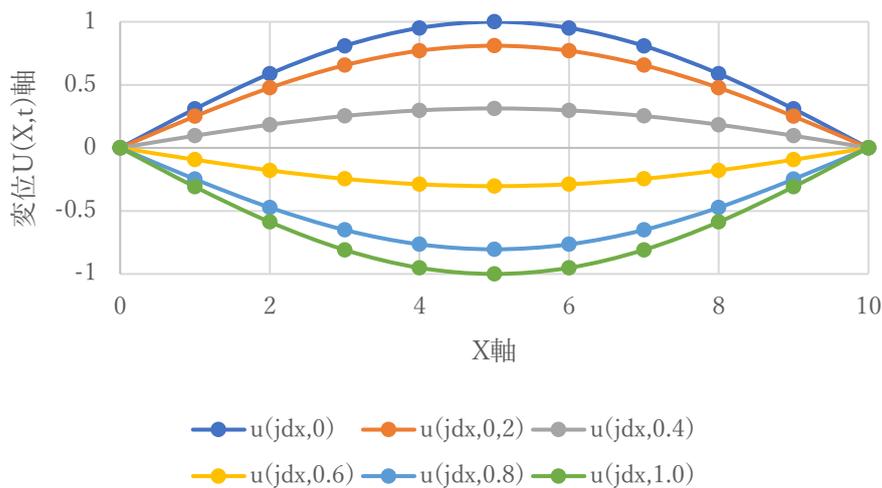


図 3.2-4 時刻 $t=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ における差分法による変位

図 3.2-4 は、 u_j^2 以降の時刻の変位を波動方程式の漸化式から求めたものを示す。

図 3.2-5 は、時刻 $t=0, 0.4, 0.6, 1.0$ の 4 時刻における厳密解（実線や破線）と差分法による変位（○）の比較を示す。この図より両者の完全一致がわかる。

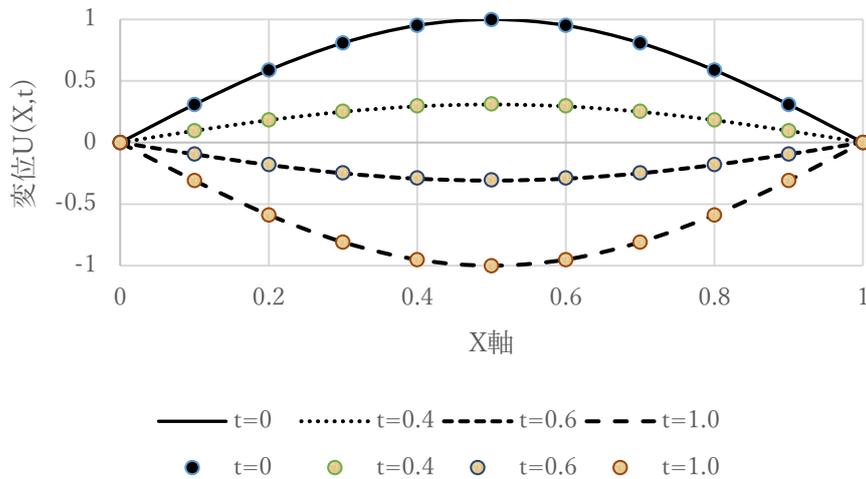


図 3.2-5 時刻 $t=0, 0.4, 0.6, 1.0$ の 4 時刻における厳密解（実線や破線）と差分法による変位（○）の比較

(4) 安定条件を満たさない数値計算例

次の数値計算例として、CFL 条件 $Cdt / dx \leq 1$ を満足しない次式の条件の差分式の解を示す。離散化の時間間隔と空間間隔を小さくすると、数値計算の安定性は増すように思われがちであるが、CFL 条件を満たさなければ差分法の数値安定性は無くなることを示す例題である。

$$C = 1, \quad dt = 0.05, \quad dx = 0.01, \quad r = \frac{Cdt}{dx} = 5 > 1 \quad (3.2-6a)$$

$$\text{初期条件: } u_j^0(= \sin \pi x), u_j^1, (j = 1, \dots, 9) \quad (3.2-6b)$$

$$\text{境界条件: } u_0^0(= \sin \pi x), u_{j+1}^0, (j = 0, 9) \quad (3.2-6c)$$

$$u_0^1, u_{j+1}^1, (j = 0, 9)$$

図 3.2-6 は、時刻 $t=0, 0.2, 0.4$ における差分法による変位を示す。図を見やすくするために、横 $x=0 \sim 1$ を 0.1 刻み ($j=0, 10, 20, \dots, 100$) の点の値をプロットして曲線で表示している。この図から、時刻 $t=0.2$ までの解は厳密解と同じであるが、時刻 $t=0.4$ 以降の解は不安定であることが読み取れる。

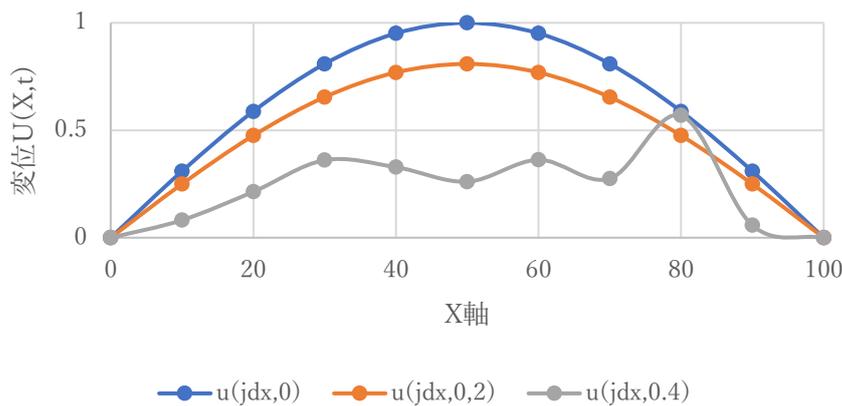


図 3.2-6 時刻 $t=0, 0.2, 0.4$ における差分法による変位

3.3 材料減衰定数の導入

せん断歪とせん断歪速度に比例する Voigt モデルの場合、せん断応力は次式

で表される。なお、 μ =せん断剛性率、 μ' =せん断歪速度に比例するせん断剛性率、 γ =せん断歪とする。

$$\tau = \mu\gamma + \mu' \frac{d\gamma}{dt} \quad (3.3-1)$$

せん断歪が振動数 ω の調和振動 $e^{-i\omega t}$ の場合、せん断応力は次式で与えられる。

$$\tau = (\mu - i\omega\mu')\gamma = \mu(1 - i2D)\gamma \quad (3.3-2a)$$

ここに、 $2D = \omega\mu' / \mu$ で、 D は1質点振動系の減衰定数に相当する。地震学では、粘弾性体の減衰を Q 値で表す。両者の関係は、次式で与えられる。

$$D = \frac{1}{2Q} \quad (3.3-2b)$$

さて、次式の力のつり合い式と歪 (γ =せん断歪) と変位の関係を考慮する。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \tau = \mu(1 - i2D)\gamma, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.3-3a)$$

上式から、次式が得られる。

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu(1 - i2D) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3-3b)$$

上式は、複素速度を有する次式のような波動方程式に書き換えられる。

$$\frac{1}{C^{*2}} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.3-3c)$$

ここに、 C^* は次式のように定義される複素速度である。

$$C^* = \sqrt{\frac{\mu(1 - i2D)}{\rho}} = C\sqrt{1 - i2D} \simeq C(1 - iD) = C\left(1 - i\frac{1}{2Q}\right) \quad (3.3-3d)$$

複素速度を有する波動方程式の軸方向に伝播する振幅 1 の平面波は、次式のように表される。

$$u^*(x, t) = e^{i(\kappa x - \omega t)}, \kappa = \frac{\omega}{C^*} \quad (3.3-4a)$$

この平面波は、次式のように書き換えられる。

$$u^*(x, t) = e^{-x\omega D/C} e^{i\omega(x/C - t)} = e^{-\omega D t} e^{i\omega(x/C - t)} \quad (3.3-4b)$$

ここに、上式右辺の 2 段目の式は、時間は距離を速度で割ったものなので、 $t = x/C$ を用いた。また、 $e^{i\omega(x/C - t)}$ は、速度 C で伝播する振幅 1 の平面波である。

したがって、 $e^{-x\omega D/C}$ または、 $e^{-\omega D t}$ は、次式のように表す平面波の空間的減衰や時間的減衰を意味する係数である。

$$A = \exp(-\omega D t) = \exp\left(-\frac{\omega D x}{C}\right) \quad (3.3-5a)$$

または、 Q 値で表すと、

$$A = \exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right) = \exp\left(-\frac{\omega x}{2QC}\right) \quad (3.3-5b)$$

差分式に時間的減衰関数を導入する場合、変位に関する中央差分式と食い違い差分式によって導入の仕方が異なる。

初めに、時間的減衰と変位に関する中央差分式の関係 (4.4 節の例題参照) で説明する。差分式は、2 つと 1 つ前の時間ステップの変位振幅から次の時間ステップの辺振幅を計算する漸化式であるため、減衰係数は 2 つ前と 1 つ前の変位

振幅に次式の減衰関数を掛けて次の時間ステップの変位を計算する。

$$\begin{aligned} A(2dt) &= \exp(-2D\omega dt) \\ A(dt) &= \exp(-D\omega dt) \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

色々な振動数を含む広帯域の波動の場合には、上式を使う。上式の減衰係数は、一定の Q 値では、高振動の波動になるほど減衰が大きく、低振動数の波動になるほど減衰は小さい。このような性質は観測記録の性質に合致する。一方、卓越振動数 ω_0 の狭帯域波動の場合、減衰係数は、次式のように与えられる。

$$A = \exp\left(-\frac{\omega_0 dt}{2Q(\omega)}\right) \quad (3.3-7a)$$

ここに、 Q 値は次式のような振動数依存の関数で与えられる。

$$Q(\omega) = Q_0 \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.3-7b)$$

この $Q(\omega)$ 値は、振動数 $\omega = \omega_0$ の時、 $Q(\omega) = Q_0$ となる。ただし、このモデルでは、 $\omega > \omega_0$ で $Q(\omega) > Q_0$ 、 $\omega < \omega_0$ で $Q(\omega) < Q_0$ となるため、高振動数では減衰を過少に、低振動数で減衰を過大に評価することに注意せよ。

次に、5章～8章に示す食い違い格子点による差分式の場合の材料減数による時間的減衰関数を説明する。時間の次のステップの速度と応力に時間的減数関数を掛けて次の時間時間ステップの速度と応力を求める。

4章 2次元波動方程式

2次元波動方程式の変位に関する時間と空間の2次精度の中心差分式の数値計算上の安定条件（CFL条件）および、固定境界や地表面境界と吸収境界の条件式を解説する。固定境界と吸収境界や材料減衰を考慮した数値計算例を示す。

4.1 2次元波動方程式と差分式

次式の2次元波動方程式の差分法を説明する。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.1-1)$$

時間と空間を $dt, h(= dx = dy)$ 間隔で離散化し、格子点の変位 $u(x, y, t)$ を次式のように表す。

$$u(x, y, t) = u(jh, kh, ndt) = u_{j,k}^n \quad (4.1-2a)$$

2次元波動方程式を中央差分式（2次精度）で表すと、次式のようになる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_{j,k}^{n+1} - 2u_{j,k}^n + u_{j,k}^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1,k}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j-1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{j,k+1}^n - 2u_{j,k}^n + u_{j,k-1}^n}{h^2} \quad (4.1-2b)$$

上式から、次式の漸化式が得られる。

$$u_{j,k}^{n+1} = -u_{j,k}^{n-1} + r^2(u_{j+1,k}^n + u_{j-1,k}^n + u_{j,k+1}^n + u_{j,k-1}^n) + 2(1 - 2r^2)u_{j,k}^n \quad (4.1-2c)$$

ここに、

$$r = \frac{Cdt}{h} \quad (4.1-2d)$$

この漸化式により、時刻 t_n, t_{n-1} の変位から時刻 t_{n+1} の変位が得られる。したがって、時刻 t_0, t_1 ($n = 1, 2$) の初期変位が与えられると、逐次的に変位の時間と空間変化が求められる。

4.2 数値計算上の安定性

1次元波動方程式の差分法と同様に、フォン・ノイマンの安定条件を示す。

$$u_{j,k}^n = U^n(\kappa_x, \kappa_y) e^{i(\kappa_x jh + \kappa_y kh)} \quad (4.2-1a)$$

上式を差分式に代入すると、次式が得られる。

$$\rho^2(\xi_x, \xi_y) - 2(1 - 2\lambda^2)\rho(\xi_x, \xi_y) + 1 = 0 \quad (4.2-1b)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \xi_x &= \kappa_x h, \quad \xi_y = \kappa_y h, \quad \lambda^2 = r^2(\sin^2 \xi_x / 2 + \sin^2 \xi_y / 2) \\ \rho(\xi_x, \xi_y) &= \frac{U^{n+1}}{U^n} = \frac{U^n}{U^{n-1}} \end{aligned} \quad (4.2-1c)$$

上式は、 λ^2 の定義式に y 軸方向の波数の関数 $\sin^2 \xi_y / 2$ が追加している点を除けば、1次元波動方程式の安定条件の時と同じ増幅率 $\rho(\xi_x, \xi_y)$ の2次方程式である。したがって、(1) $\lambda \leq 1$ の時、無条件安定、(2) $\lambda > 1$ の時、不安定となる。安全側の評価として、 $\sin^2 \xi_x / 2 = \sin^2 \xi_y / 2 = 1$ とすると、次式の際に無条件安定となる。

$$\frac{Cdt}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad : 2 \text{次元波動方程式の安定条件} \quad (4.2-2)$$

蛇足だが、3次元波動方程式の安定条件では、 λ^2 の定義式に z 軸方向の波数の関数 $\sin^2 \xi_z / 2$ が追加する点を除けば、1次元波動方程式の安定条件と同じ増幅率 $\rho(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$ の2次方程式である。したがって、次式の際に無条件安定となる。

$$\frac{Cdt}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad : 3 \text{次元波動方程式の安定条件} \quad (4.2-3)$$

4.3 減衰無しの数値計算例

(1) 固定境界条件の数値計算例

数値計算例として、CFL 条件 $Cdt/dx \leq 1/\sqrt{2}$ を満足する次式の条件の差分式の解を示す。なお、領域は $0 \leq x, y \leq 1$ で、時間は $0 \leq t \leq 1$ とする。このため、 $j = k = 1, 2, \dots, 20, n = 1, 2, \dots, 100$ となる。

$$C = 1, \quad dt = 0.01, \quad h(= dx = dy) = 0.05$$
$$r = \frac{Cdt}{h} = 0.2 < 1/\sqrt{2} (= 0.707) \quad (4.3-1a)$$

$$\text{初期条件: } u(x, y, 0) = \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{0.01}\right) \quad (4.3-1b)$$
$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0$$

$$\text{境界条件: } u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(1, y, t) = u(x, 1, t) = 0 \quad (4.3-1c)$$

1次元波動方程式と同様に、漸化式は、2つ前までの時刻の変位から時刻 t_{n+1} の変位を求める構成なので、次式のテイラー展開を用いて、初期条件の変位と速度および波動方程式を利用した漸化式を考慮しなければならない。

$$u(x, y, dt) = u(x, y, 0) + \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y, 0)}{\partial t^2} dt^2 + O(dt^3) \quad (4.3-2a)$$

上式に初期条件の変位と速度（今回の例題は、 $\dot{u}(x, y, 0) = 0$ ）および波動方程式を考慮すると、次式が得られる。

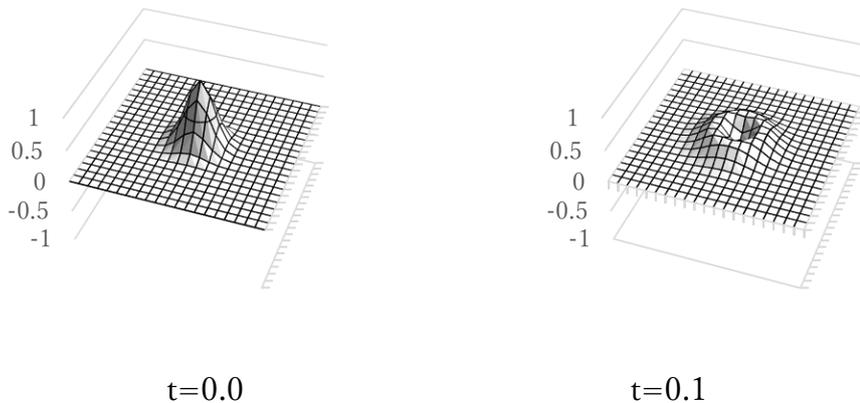
$$u(x, y, dt) \simeq u(x, y, 0) + \frac{C^2 dt^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, 0)}{\partial y^2} \right) \quad (4.3-2b)$$

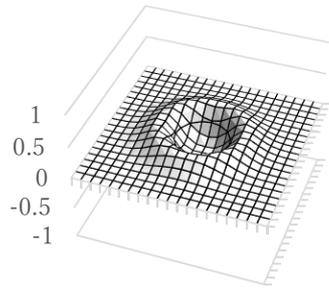
上式を差分式（2階微分は中央差分式を使う）に書き直すと、次式が得られる。

$$u_{j,k}^1 = (1 - 2r^2)u_{j,k}^0 + \frac{r^2}{2} (u_{j+1,k}^0 + u_{j-1,k}^0 + u_{j,k+1}^0 + u_{j,k-1}^0) \quad (4.3-2c)$$

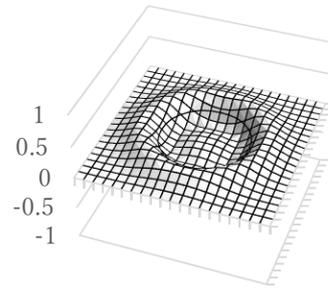
この差分式の右辺は、時刻 t_0 の初期条件のみのため、これより時刻 t_1 の変位が求められる。したがって、初期条件のみから、 $u_{j,k}^0, u_{j,k}^1$ が求められ、 $u_{j,k}^2$ 以降の時刻の変位は、波動方程式の漸化式から計算できる。この計算においては、境界条件 $u_{0,k}^n = u_{j,0}^n = u_{j,k}^n = u_{j,K}^n = 0$ を忘れてはならない。

図 4.3-1 は、 $t=0$ から $t=0.9$ までの変位分布 $u(x, y, t)$ を 0.1 秒毎に示す。初期変位の変動が時間の経過とともに振幅を減少させながら円形状に広がってゆく様子が見られる。約 0.4 秒で初期変位の裾が四方の境界の壁（固定境界）に到達し、0.5 秒以降は固定境界からの反射波が加わるため、変位場は複雑になっている。

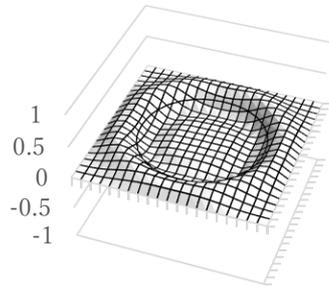




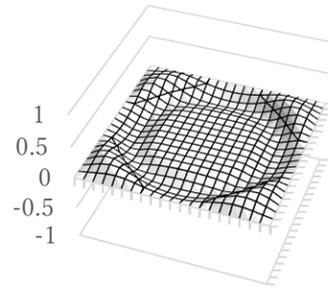
$t=0.2$



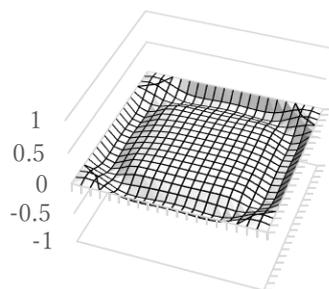
$t=0.3$



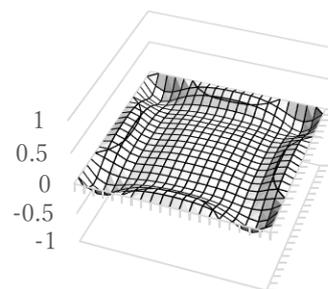
$t=0.4$



$t=0.5$



$t=0.6$



$t=0.7$

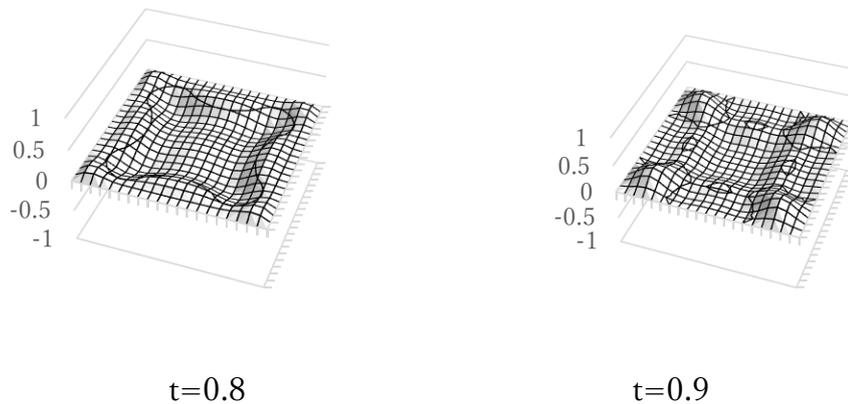
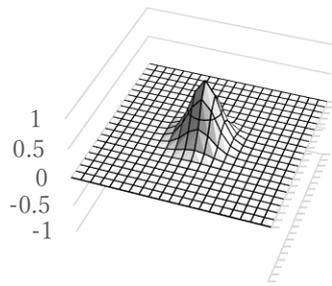


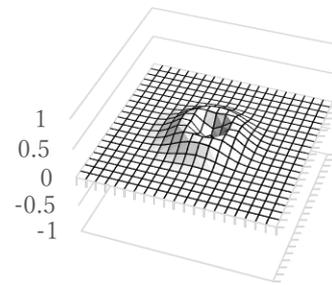
図 4.3-1 $t=0$ から $t=0.9$ までの 0.1 秒毎の変位分布 $u(x, y, t)$
(固定境界条件)

(2) 吸収境界条件の数値計算例

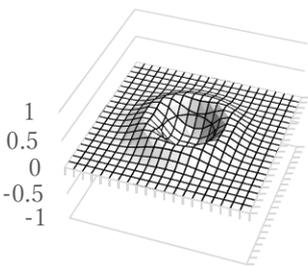
図 4.3-2 は、4.6 節の吸収境界を 4 つの固定境界壁を設置して固定境界で波動を吸収する境界条件 (無限領域を考慮した境界) とした場合の $t=0$ から $t=0.9$ までの変位分布 $u(x, y, 0)$ を 0.1 秒毎に示す。初期変位の変動が時間の経過とともに振幅を減少させながら円形状に広がってゆく様子が見られる。約 0.4 秒で初期変位の裾が四方の境界の壁 (固定境界) に到達するが、0.5 秒以降は固定境界で波動が吸収されるため、反射波の振幅は抑えられて、変位場は図 4.3-2 に比べるとなだらかである。4.6 節の吸収境界は境界に垂直に入射する波動を吸収する境界であるため、斜めに入射する波動を完全には吸収できないため、反射波がわずかに残り、波動場が零ではない。しかし、ほとんどの反射波は抑えられているため実用的であることがわかる。



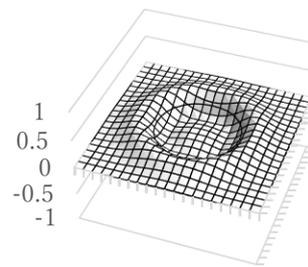
$t = 0$



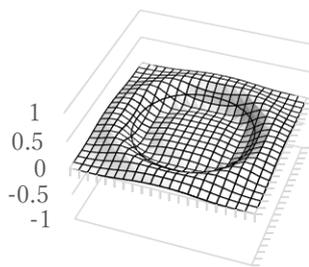
$t=0.1$



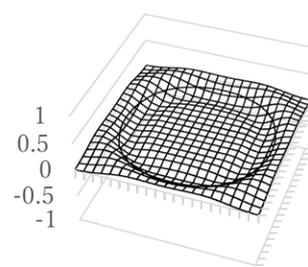
$t = 0.2$



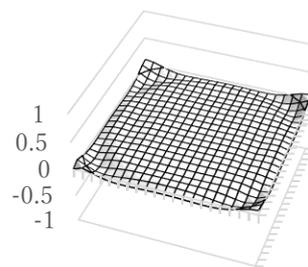
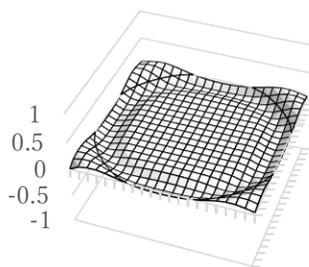
$t=0.3$



$t = 0.4$



$t=0.5$



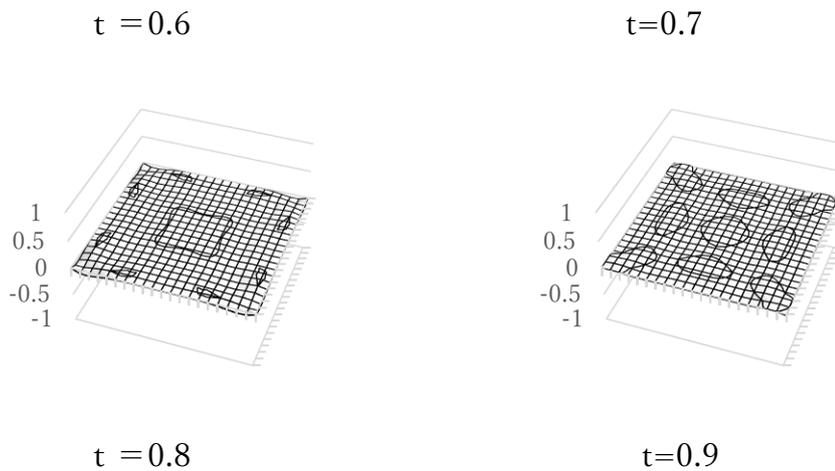


図 4.3-2 $t=0$ から $t=0.9$ までの 0.1 秒毎の変位分布 $u(x, y, t)$
(吸収境界条件)

4.4 材料減衰を考慮した数値計算例

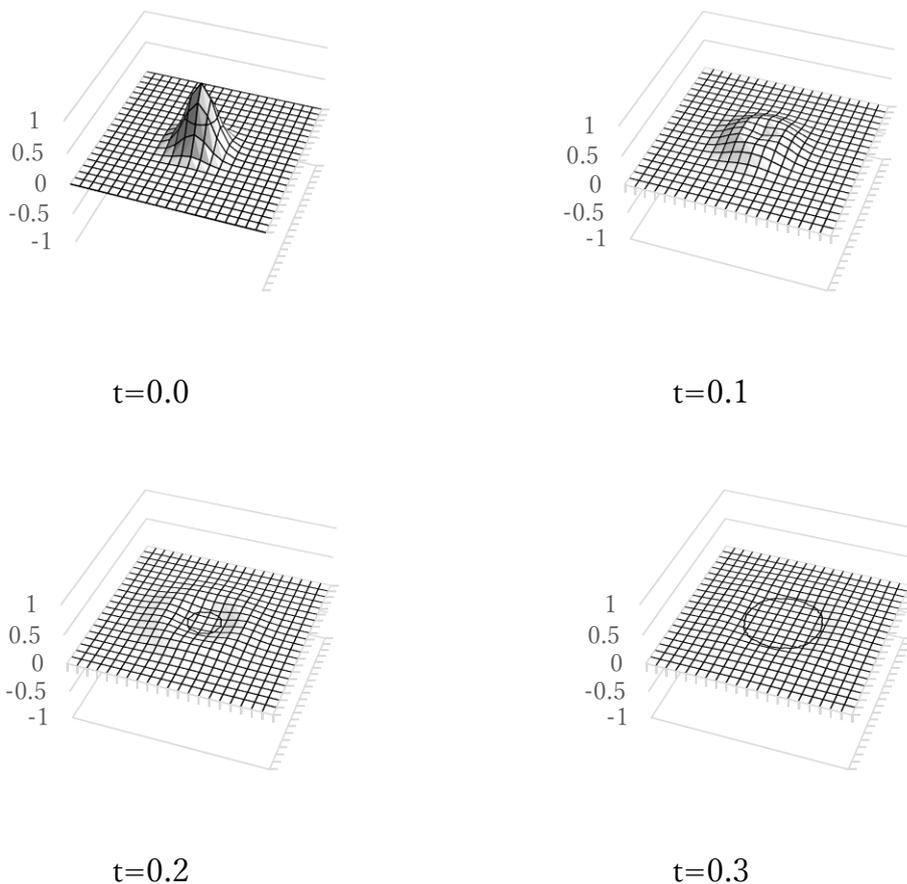
材料減衰が無い場合、0.4 秒で波動は固定境界に到達し 0.5 秒以降は反射波が加わった複雑な波動場となった。材料減衰係数 $A=\exp(-\omega Dt)$ を導入した計算例を示す。この計算例では、0.4 秒で振幅が 0.056 程度に減少する次式を用いた。

$$\omega=\omega_0 = 24, \quad D = 0.3 \quad (4.4-1)$$

したがって、2 つ前と 1 つ前の時間ステップの振幅に、次式の値を掛けて次の時間ステップの変位を計算した。

$$\begin{aligned} A(2dt) &= 0.866 \\ A(dt) &= 0.930 \end{aligned} \quad (4.4-2)$$

図 4.4-1 は、材料減衰を考慮した波動場を示す。この場合も、 $t=0$ から $t=0.5$ までの変位分布 $u(x,y,t)$ を 0.1 秒毎に示す。初期変位の変動が時間の経過とともに振幅を減少させながら円形状に広がってゆく様子がわかる。約 0.4 秒で初期変位の裾が四方の境界の壁（固定境界）に到達するが、振幅は材料減衰を考慮したためかなり小さくなっている。したがって、0.5 秒は固定境界からの反射波が加わるが、その振幅はかなり小さいため、変位場はほぼ零になっている。



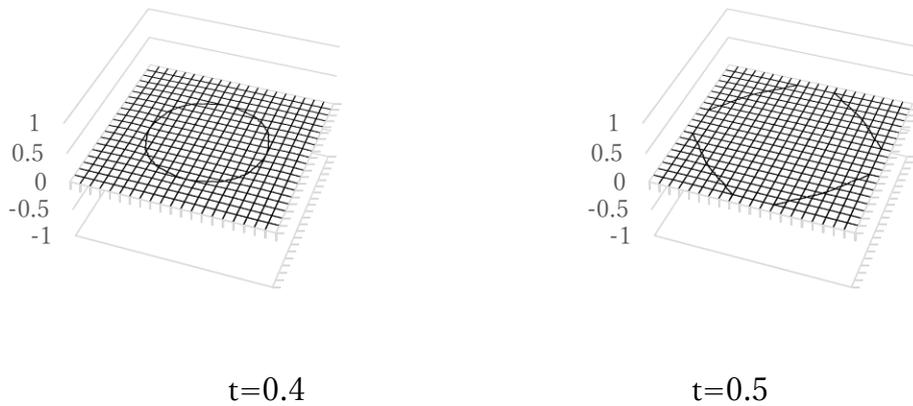


図 4.4-1 $t=0$ から $t=0.5$ までの 0.1 秒毎変位分布 $u(x, y, t)$
 (材料減衰を考慮した場合の固定境界条件)

4.5 地表面の境界条件

地表面を $(x, 0)$ とする場合、地表面に対応する格子点上に仮想点 ($k = 0$) を設置し、地表面 $(j, k = 1), (j = 1, 2, \dots, N)$ では、 y 軸方向のせん断応力が零であるので、次式が成立する。

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.5-1a)$$

上式の差分式は、2 次精度の中央差分式を用いると、次式のようにになる。

$$\tau_{xy}(x, 0, t) = \frac{\mu}{2h} (u_{j,2}^n - u_{j,0}^n) = 0 \quad (4.5-1b)$$

したがって、地表面の境界条件を満たすためには、任意の時刻で次式が成立しな

ければならない。

$$u_{j,0}^n = u_{j,2}^n \quad (4.5-2)$$

この条件式を初速度零の初期条件式(4.3-2c)の漸化式に代入して、次式から次の時間ステップの地表面の変位 $u_{j,1}^1$ を求める。

$$\begin{aligned} u_{j,1}^1 &= (1 - 2r^2)u_{j,1}^0 + \frac{r^2}{2}(u_{j+1,1}^0 + u_{j-1,1}^0 + 2u_{j,2}^0) \\ u_{j,2}^1 &= (1 - 2r^2)u_{j,2}^0 + \frac{r^2}{2}(u_{j+1,2}^0 + u_{j-1,2}^0 + u_{j,3}^0 + u_{j,1}^0) \end{aligned} \quad (4.5-3a)$$

ここに、 $u_{j,1}^0, u_{j+1,1}^0, u_{j-1,1}^0, u_{j,2}^0$ は初期条件として与えられる。また、上式右辺の最後の項 $2u_{j,2}^0 = u_{j,2}^0 + u_{j,0}^0$ では、地表面境界条件式 (4.5-2) を用いて、仮想点の初期条件を使わない式とした。

次の時間ステップ以降の地表面変位 $u_{j,1}^2, u_{j,1}^3, \dots, u_{j,1}^{N-1}$ は、式(4.1-2c)の漸化式に地表面境界条件式(4.5-2)を考慮して、次式から地表面変位を求める。

$$u_{j,1}^{n+1} = -u_{j,1}^{n-1} + r^2(u_{j+1,1}^n + u_{j-1,1}^n + 2u_{j,2}^n) + 2(1 - 2r^2)u_{j,1}^n \quad (4.5-3b)$$

上式を具体的に表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_{j,1}^2 &= -u_{j,1}^0 + r^2(u_{j+1,1}^1 + u_{j-1,1}^1 + 2u_{j,2}^1) + 2(1 - 2r^2)u_{j,1}^1 \\ u_{j,1}^3 &= -u_{j,1}^1 + r^2(u_{j+1,1}^2 + u_{j-1,1}^2 + 2u_{j,2}^2) + 2(1 - 2r^2)u_{j,1}^2 \\ &\vdots \\ u_{j,1}^N &= -u_{j,1}^{N-2} + r^2(u_{j+1,1}^{N-1} + u_{j-1,1}^{N-1} + 2u_{j,2}^{N-1}) + 2(1 - 2r^2)u_{j,1}^{N-1} \end{aligned} \quad (4.5-3c)$$

上式のように地表面変位がわかれば、式(4.1-2c)の漸化式から地表面以下の各格子点の変位が求められる。

4.6 吸収境界の条件式

2次元や3次元の波動方程式の差分式では、地表面境界とともに適当な固定境界を設定した有限領域を扱わなければならない。固定境界では波動が反射するので、固定境界からの反射した波動が観測点に到達する前の波動場を見るためには領域を広く取る必要があり、計算時間が増加する。したがって、固定境界から反射がないような吸収境界について多くの研究がある。その中で Clayton and Engquist (1977)の吸収境界は、1次元波動方程式の平面波の考察から簡単であるとともに、2次元や3次元問題の固定境界線や境界面での反射波を吸収でき(非常に柔らかい層を設置すると固定境界での反射は極めて小さく柔らかい層では固定境界に垂直に入射するため1次元波動のようになる)、実用的なので、ここで説明する。

次式の1次元波動方程式を使って、吸収境界条件式を求める。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.6-1)$$

上式の振動数・波数領域の解として、任意の振幅 A の次式の平面波を仮定する。

$$u = Ae^{i(\kappa x - \omega t)} \quad (4.6-2a)$$

この平面波を波動方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\left[\left(\frac{\omega}{C} \right)^2 - \kappa^2 \right] u = 0 \quad (4.6-2b)$$

変位が零でない解のためには、次式が成立しなければならない。

$$\left(\frac{\omega}{C} \right)^2 - \kappa^2 = 0 \rightarrow \kappa = \pm \frac{\omega}{C} \quad (4.6-2c)$$

したがって、一般解は、次式のようになる。

$$u = A_1 e^{i\omega(x/C - t)} + A_2 e^{-i\omega(x/C + t)} \quad (4.6-2d)$$

上式右辺第1項はx軸の正の方向に進む平面波を、第2項はx軸の負の方向に進む平面波を表す。

x軸を $j = 0, 1, \dots, J$ のように J 個の格子点に離散化する場合を例に、吸収境界条件式を示す。x軸の両端が無限領域の場合、 $j = 0$ では後退波はx軸の負の方向に進む平面波となるため、吸収境界は、 $\kappa = -\omega / C$ の後退波が零の条件となる。この場合、式(4.6-2a)の時間と空間微分は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -i\omega u \rightarrow \omega = -\frac{\partial u}{\partial t} / iu \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= i\kappa u \rightarrow \kappa = \frac{\partial u}{\partial x} / iu \end{aligned} \quad (4.6-3)$$

したがって、 $\kappa = -\omega / C$ に上式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.6-4a)$$

上式の1次精度の差分式は、次式のようになる。

$$\frac{u_1^n - u_0^n}{h} = \frac{1}{C} \frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{dt} \quad (4.6-4b)$$

上式の漸化式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= (1-r)u_0^n + ru_1^n \\ r &= \frac{Cdt}{h} \end{aligned} \quad (4.6-4c)$$

一方、 $j = J$ では進行波はx軸の正の方向に進む平面波となるため、吸収境界は、 $\kappa = \omega / C$ の進行波が零の条件となる。式(4.6-3)を $\kappa = \omega / C$ に代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.6-5a)$$

上式の1次精度の差分式は、次式のようになる。

$$\frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} = -\frac{1}{C} \frac{u_J^{n+1} - u_J^n}{dt} \quad (4.6-5b)$$

上式の漸化式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} u_J^{n+1} &= (1-r)u_J^n + ru_{J-1}^n \\ r &= \frac{Cdt}{h} \end{aligned} \quad (4.6-5c)$$

以上をまとめると、次式のような吸収境界条件式となる。

x軸の両端が無限領域とし、x軸を $j = 0, 1, \dots, J$ のように J 個の格子点に離散化する時の吸収境界条件式 (図 5.6-1 参照) :

$$j = 0 \text{ の吸収境界条件式 } \quad u_0^{n+1} = (1-r)u_0^n + ru_1^n \quad (4.6-6a)$$

$$j = J \text{ の吸収境界条件式 } \quad u_J^{n+1} = (1-r)u_J^n + ru_{J-1}^n \quad (4.6-6b)$$

ここに、 $r = Cdt/h$ 。上式で右辺の係数は同じであるが、上段式では u_0^n, u_1^n のように空間格子点が増えるが、下段式では、 u_J^n, u_{J-1}^n のように空間格子点が減る方向の値を用いる点にあるのが特徴である。

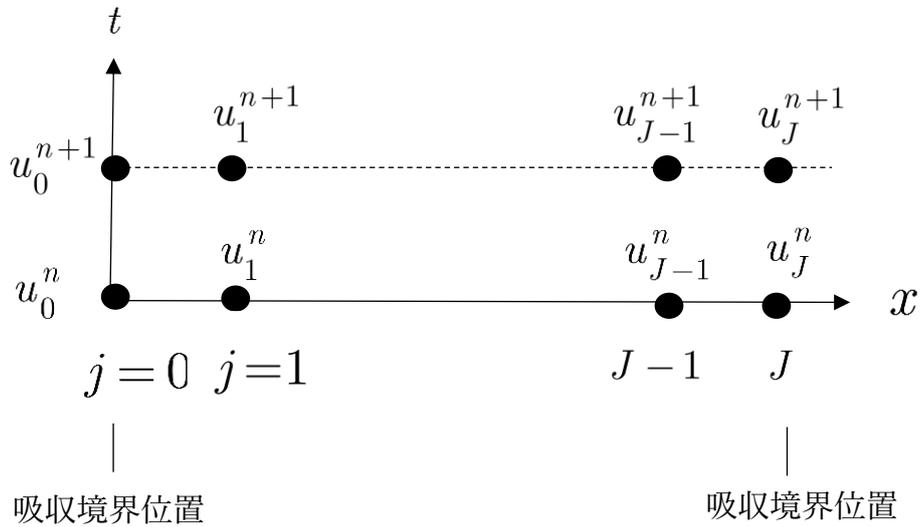


図 4.6-1 x 軸両端が無限領域の場合、x 軸を $j = 0, 1, \dots, J-1$ のように J 個の格子点に離散化する時の吸収境界条件の説明図

5章 1次元波動方程式の食い違い格子点

3章と4章では、1次元と2次元波動方程式の変位に関する2次精度の中央差分式を説明した。これらは時間と空間に関する通常の格子点を使う方法である。もう一つの方法として、波動方程式を速度と応力に関する連立1階微分方程式に書き変えて、速度と応力の格子点を別々の格子点で与える食い違い格子点で差分式を計算する方法がある。

ここでは、この食い違い格子点による波動方程式の差分式の優位性や計算法と数値計算例を説明する。地震学分野では、震源特性を等価応力で与えるので、応力格子点と速度格子点の両方を有する食い違い格子点を使って、2次元SH波動方程式、P・S V波動方程式、3次元波動方程式の差分式が多用される(6章、7章、8章参照)。

5.1 基礎事項

波動方程式の変位に関する時間と空間の2階微分方程式を中央差分式に変換

し、漸化式により初期変位を与えて、その時間と空間変化が求められる。しかし、例えば弾性波動では、境界条件は変位と応力で与えられるのが普通なので、応力に比例する歪は変位の空間微分となり、これが応力の境界条件に使われる。したがって、波動方程式を次式の連立1階微分方程式（状態方程式）に変換し、これを差分式で解くのが一般的である。

例えば、地盤のせん断波の場合、次式の力のつり合い式とせん断応力とせん断歪の関係式から構成される波動方程式となる。

力のつり合い式（ u = せん断変位、 ρ = 弾性体の密度、 τ = せん断応力）：

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (5.1-1a)$$

応力と歪・変位の関係（ μ = せん断剛性率、 γ = せん断歪）：

$$\tau = \mu \gamma, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.1-1b)$$

上式を力のつり合い式に代入すると、次式の変位の波動方程式が得られる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.1-1c)$$

ここに、 $C = \sqrt{\mu / \rho}$ = せん断波速度である。せん断変位 u をせん断速度 $\dot{u} = \partial u / \partial t$ に代えて、書き変えると次式のようなになる。

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (5.1-2a)$$

後の記号の簡単化のため、 $v = \dot{u}$ と置き換えて行列表示すると、次式の連立 1 階微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau \end{pmatrix} \quad (5.1-2b)$$

この連立微分方程式を差分式で近似する。2 つの変数の差分式は、図 5.1-1a のように 2 変数を同じ空間格子間隔で離散化する方法(通常格子点;Unstaggered grid method) と、図 5.1-1b のように一方の変数の空間格子点を他方の変数の空間格子点の中央に取るような食い違い格子点とする方法 (食い違い格子点; Staggered grid method) の 2 つがある。

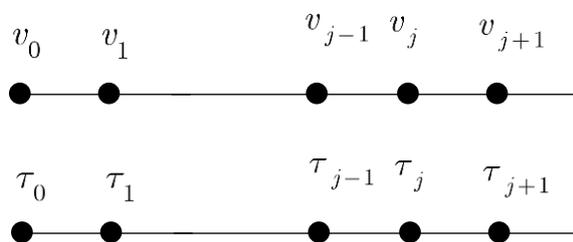


図 5.1-1a 通常格子点 (Unstaggered grid)

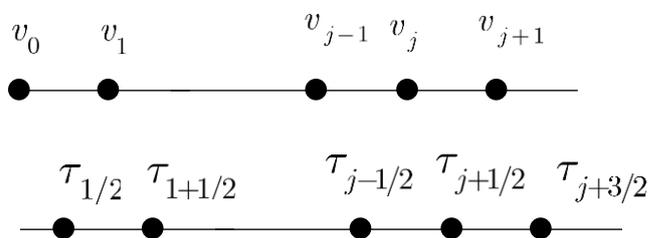


図 5.1-1b 食い違い格子点 (Staggered grid)

この連立微分方程式は、せん断応力速度が速度の空間微分であるため、空間微分の階数が 1 つだけ異なる構成になっている。このような場合、速度とせん断応力の格子点をずらすと（食い違い格子点）、中間点で評価することになるため 1 次精度の差分式は、2 次精度の中央差分式となる。この点は、2.2 節の拡散方程式の差分式で用いられるクランク・ニコルソンの差分式や、1.1 節の寄り道で説明した考え方（1 次精度の差分式の中間点で微分を評価すると 2 次精度の差分式となる）と共通する。

食い違い格子点法の方の精度が高いため、この方法が多用される。また、2 次元や 3 次元問題の変位の波動方程式に関する波動方程式を導く場合にも、微小長方形（2 次元問題 $dxdy$ ）や微小直方体（3 次元問題 $dxdydz$ ）の微小要素の中心点で変位を評価し、微小要素の表面中央で応力成分を評価するので、変位と応力の評価点をずらす食い違い格子点を使うのは、自然である。ただし、3 次元問題の食い違い格子法による差分式では、微小要素の 1 つの中心点で 3 つの変位 u, v, w を評価せずに、その速度成分を微小要素の 3 つの格子点を使って評価する（8 章）。

上記の通常の格子点と食い違い格子点による差分式の精度を具体的に示すために、初めに、通常の格子点の場合、速度とせん断応力の 2 つの変数の連立微分方程式を次式の 1 次精度の差分式にすると、変位に関する波動方程式の差分式

は、以下の 1 次精度の差分式になることから説明する (5.2 節)。次に、食い違い格子点による差分式は、中間点で評価するので、2 次精度の中央差分式になることを説明する (5.3 節)

5.2 通常の格子点による差分式

連立 1 階微分方程式(5.1-2)を通常の格子点で離散化する場合、時間格子点 n と空間格子点 j の速度 $v_j^n = v(jh, ndt)$ とせん断応力 $\tau_j^n = \tau(jh, ndt)$ の時間微分と空間微分は、1 次精度の差分式を使えば、次式で与えられる。

$$\frac{\partial v_j^n}{\partial t} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{dt}, \quad \frac{\partial \tau_j^n}{\partial x} = \frac{\tau_{j+1}^n - \tau_j^n}{dx} \quad (5.2-1a)$$

$$\frac{\partial \tau_j^n}{\partial t} = \frac{\tau_j^{n+1} - \tau_j^n}{dt}, \quad \frac{\partial v_j^n}{\partial x} = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{dx}$$

連立 1 階微分方程式は、次式である。

$$\frac{\partial v_j^n}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_j^n}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_j^n}{\partial t} = \mu \frac{\partial v_j^n}{\partial x} \quad (5.2-1b)$$

したがって、連立 1 階微分方程式の 1 次精度の差分式は、次式で与えられる。

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{j+1}^n - \tau_j^n}{dx}, \quad \frac{\tau_j^{n+1} - \tau_j^n}{dt} = \mu \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{dx} \quad (5.2-1c)$$

ここで、時刻 t_n と位置 x_j の速度とせん断応力は、次式のように変位の 1 次精度の差分式で与えられる。

$$v_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{dt}, \quad \tau_j^n = \mu \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{dx} \quad (5.2-2a)$$

上式を連立 1 階微分方程式の 1 次精度の差分式の上段式に代入すると、次式の変位に関する波動方程式の 1 次精度の差分式が得られる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_j^{n+2} - 2u_j^{n+1} + u_j^n}{dt^2} = \frac{u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{dx^2} \quad (5.2-2b)$$

下段式に代入すると、次式のように両辺が同じ式となる。

$$(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_{j+1}^n + u_j^n) = (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_{j+1}^n + u_j^n) \quad (5.2-2c)$$

以上示したように、通常の格子点による連立 1 階微分方程式の差分式は、変位に関する 1 次精度の差分式になるので、精度が落ちると言える。

5.3 食い違い格子点による差分式

この場合、時間と空間微分を中間点で評価するので、次式のように速度とせん断応力の微分の差分式は、次式の 2 次精度の中央差分式となる。

$$\frac{\partial v_j^n}{\partial t} = \frac{v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}}{dt}, \quad \frac{\partial \tau_j^n}{\partial x} = \frac{\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j-1/2}^n}{dx} \quad (5.3-1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{j+1/2}^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{\tau_{j+1/2}^{n+1} - \tau_{j+1/2}^n}{dt}, \quad \frac{\partial v_{j+1/2}^{n+1/2}}{\partial x} = \frac{v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}}{dx}$$

上式を連立 1 階微分方程式(5.2-1b)に代入すると、次式の 2 次精度の中央差分式が得られる。

$$\frac{v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j-1/2}^n}{dx} \quad (5.3-1a)$$

$$\frac{\tau_{j+1/2}^{n+1} - \tau_{j+1/2}^n}{dt} = \mu \frac{v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}}{dx}$$

上式の漸化式は、次式のように表される。

$$v_j^{n+1/2} = v_j^{n-1/2} + \frac{dt}{\rho h} (\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j-1/2}^n) \quad (5.3-1b)$$

$$\tau_{j+1/2}^{n+1} = \tau_{j+1/2}^n + \frac{\mu dt}{h} (v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2})$$

したがって、 $n+1/2$ の時刻の速度が、 $n-1/2$ の速度と n のせん断応力から計算できる。また、 $n+1$ の時刻のせん断応力が、 n のせん断応力と $n+1/2$ の速度から計算できる。このため、初期条件を与えて、空間と時間ステップを増やしてゆけば、格子点の速度とせん断応力が逐次的に求められる。

上式の定式化の特徴としては、図 5.3-1 のように速度に関しては、時間を食い違い点 ($n+1/2, n-1/2$) で、空間を通常格子点 ($j, j+1$) で評価する。せん断応力では、時間を通常の格子点 ($n, n+1$) で、空間を食い違い格

子点 ($j + 1/2, j - 1/2$) で評価する。

地震学分野では、震源特性を等価応力で与えるので、応力格子点と速度格子点の両方を有する食い違い格子点を使って、2次元 SH 波動方程式、P・S V 波動方程式、3次元波動方程式の差分式が多用される (6章、7章、8章参照)。

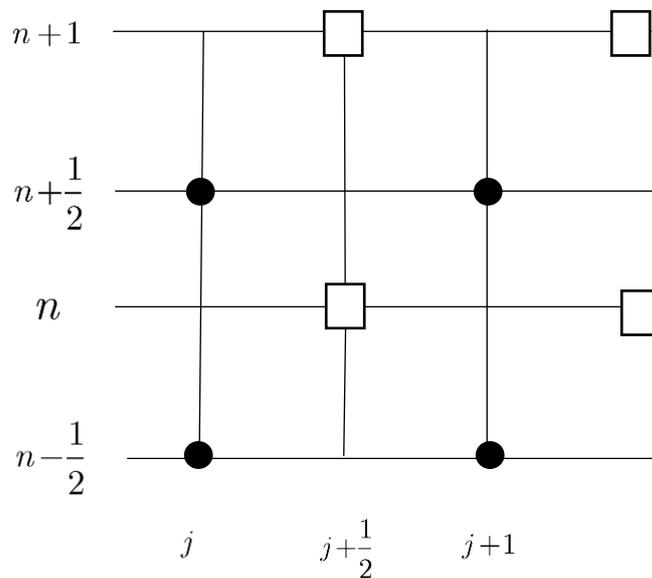


図 5.3-1 食い違い格子点法の構造 (●は速度 v の格子点、□はせん断応力 τ の格子点)

例題 5.3-1 食い違い格子点の差分式から変位の差分式を導出

$$\frac{v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j-1/2}^n}{dx}$$

(A5.3-1a)

$$\frac{\tau_{j+1/2}^{n+1} - \tau_{j+1/2}^n}{dt} = \mu \frac{v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}}{dx}$$

上式の食い違い格子の差分式から次式の変位の差分式を導く。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (\text{A5.3-1b})$$

式(A5.3-1a)より、次式が得られる。

$$v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2} = \frac{1}{\rho} \frac{dt}{dx} (\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j-1/2}^n)$$

$$\tau_{j-1/2}^n - \tau_{j-1/2}^{n-1} = \mu \frac{dt}{dx} (v_j^{n-1/2} - v_{j-1}^{n-1/2})$$

(A5.3-1b)

$$\tau_{j+1/2}^n - \tau_{j+1/2}^{n-1} = \mu \frac{dt}{dx} (v_{j+1}^{n-1/2} - v_j^{n-1/2})$$

$$v_j^{n-1/2} - v_j^{n-3/2} = \frac{1}{\rho} \frac{dt}{dx} (\tau_{j+1/2}^{n-1} - \tau_{j-1/2}^{n-1})$$

上式の 3 段目の式から 2 段目の式を差し引いて得られる式に第 4 段目の式を代入して、せん断応力を消去すると、速度のみの次式が得られる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{v_j^{n+1/2} - 2v_j^{n-1/2} + v_j^{n-3/2}}{dt^2} = \frac{v_{j+1}^{n-1/2} - 2v_j^{n-1/2} + v_{j-1}^{n-1/2}}{dx^2} \quad (\text{A5.3-1b})$$

この式で $n - 1/2$ を n と書き換え、 $v = du / dt$ として変位に書き変えると、求める変位の差分式が得られる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{dt^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{dx^2} \quad (\text{A5.3-1b})$$

これは、波動方程式の 2 次精度の中央差分式である。

5.4 食い違い格子点による漸化式の安定性

食い違い格子点による漸化式の安定性をフォン・ノイマンの方法で調べるため、次式を用いる。

$$v_j^n = V^n(\kappa)e^{i\kappa jdx}, \quad \tau_j^n = T^n(\kappa)e^{i\kappa jdx} \quad (5.4-1a)$$

これを2つの漸化式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} V^{n+1} \\ T^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i2\lambda_0 \\ i2\lambda_1 & 1 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^n \\ T^n \end{pmatrix} \quad (5.4-1b)$$

ここに、 $\xi = \kappa dx$ 。また、

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{dt}{\rho dx} \sin \xi / 2, & \lambda_1 &= \frac{\mu dt}{dx} \sin \xi / 2 \\ \lambda &= \frac{C dt}{dx} \sin \xi / 2 \rightarrow \lambda^2 = \lambda_0 \lambda_1 \end{aligned} \quad (5.4-1c)$$

上式の $V^{n+1}, T^{n+1}, V^n, T^n$ の連立1次方程式を次式のようなベクトル表示すると、その係数行列 $\mathbf{r}(\xi)$ が増幅率である。

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{r}(\xi)\mathbf{U}^n \quad (5.4-2a)$$

ここに、

$$\mathbf{U}^{n+1} = \begin{pmatrix} V^{n+1} \\ T^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & i2\lambda_0 \\ i2\lambda_1 & 1 - 4\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (5.4-2b)$$

初期 ($n=0$) の場合、 $\mathbf{U}^1 = \mathbf{r}(\xi)\mathbf{U}^0$ となるので、上式より時刻 t_n では、増幅率

の乗 n ($\mathbf{r}^n(\xi)$) を使い、次式が得られる。

$$\mathbf{U}^n(\kappa) = \mathbf{r}^n(\xi) \mathbf{U}^0(\kappa) \quad (5.4-2c)$$

したがって、 $\mathbf{r}^n(\xi) \leq 1$ ならば、振幅は一定か減少するので、数値計算上安定すると言える。このことは、次式の固有値問題における増幅率の固有値 $\rho(\xi)$ が 1 以下であることと同等である。

$$\mathbf{r}(\xi) \mathbf{U}^n(\kappa) = \rho(\xi) \mathbf{U}^n(\kappa) \quad (5.4-3a)$$

増幅率の固有値は、次式から求められる。

$$\begin{vmatrix} 1 - \rho(\xi) & i2\lambda_0 \\ i2\lambda_1 & 1 - 4\lambda^2 - \rho(\xi) \end{vmatrix} = \rho^2(\xi) - 2(1 - 2\lambda^2)\rho(\xi) + 1 = 0 \quad (5.4-3b)$$

この固有値 $\rho(\xi)$ の 2 次方程式の根は、変位に関する波動方程式の中央差分式の変位の増幅率と同じである。したがって、 $\lambda \leq 1$ の場合 ($Cdt / dx \leq 1$ の時)、無条件安定である。

以上のように食い違い格子点による差分式の 1 次元波動方程式の安定性は、変位に関する波動方程式の安定性と同じであるため、4.2 節の 2 次元と 3 次元波動方程式の数値計算上の安定性の考察から n 次元波動方程式の無条件安定条件は、次式のように与えられる。

食い違い格子点による n 次元波動方程式の差分式の無条件安定性：

$$n \text{ 次元波動方程式} : C \frac{dt}{dx} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (5.4-4)$$

5.5 地表面の境界条件

通常格子点の波動方程式の差分式の地表面の境界条件式は、4.5 節で説明した。ここでは、食い違い格子点の差分式の地表面の境界条件式はせん断応力のみの条件式であることを説明する。

地表面を $j = 0$ とし変位を評価する。その上に仮想点 $j = -1/2$ のせん断応力の評価点を設置する。 $j = 1/2$ は内部のせん断応力の評価点となる。地表面のせん断応力は零であるが、その評価点はないので、地表面のせん断応力を次式のように仮想点 $j = -1/2$ と $j = 1/2$ の内部のせん断応力の平均値で評価する。

$$\tau_{j=0}^n = \frac{\tau_{j=-1/2}^n + \tau_{j=1/2}^n}{2} = 0 \quad (5.5-1)$$

したがって、食い違い格子点の差分式では、地表面条件は、次式で与えられる。

$$\tau_{j=-1/2}^n = -\tau_{j=1/2}^n \quad (5.5-2)$$

仮想点を含めたすべての格子点に上式を考慮して、式(5.3-1a)の2つの漸化式から、時刻 t_n の速度とせん断応力から、次の時刻 t_{n+1} の速度とせん断応力が求められる。具体的定式化は、以下のようなになる。

$$v_0^{n+1/2} = v_0^{n-1/2} + \frac{dt}{\rho h} (\tau_{1/2}^n - \tau_{-1/2}^n) \quad (5.5-3a)$$

$$\tau_{-1/2}^{n+1} = \tau_{-1/2}^n + \frac{\mu dt}{h} (v_0^{n+1/2} - v_{-1}^{n+1/2})$$

ここで、地表面の条件 $\tau_{j=0}^n (= \mu \partial u / \partial x) = \mu(u_{-1}^n - u_1^n) / h = 0$ を考慮すると、次式のせん断応力と速度の2つの地表面条件が得られる。

$$\tau_{j=-1/2}^n = -\tau_{j=1/2}^n, \quad v_{-1}^n = v_1^n \quad (5.5-3b)$$

上式を考慮すると、式(5.5-3a)は次式のように書き換えられる。

$$v_0^{n+1/2} = v_0^{n-1/2} + 2 \frac{dt}{\rho h} \tau_{1/2}^n \quad (5.5-4)$$

$$\tau_{-1/2}^{n+1} = \tau_{-1/2}^n + \frac{\mu dt}{h} (v_0^{n+1/2} - v_1^{n+1/2})$$

上式右辺の3空間格子点 $j = 0, 1/2, 1$ の速度とせん断応力を初期条件で与えると、逐次的に3空間格子点 $j = 0, 1/2, 1$ の速度とせん断応力の時間変動が求められる。その他の空間格子の速度とせん断応力は、式(5.3-1b)の漸化式から求められる。

5.6 吸収境界の条件式

4.6節のように調和平面波の進行波と後退波は、次式のように与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t}: \text{進行波} \quad (5.6-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{C} \frac{\partial u}{\partial t}: \text{後退波}$$

食い違い格子点の差分式では、5.3 節の図 5.3-1 のように変位の評価点は、空間では、 $(j, j+1)$ 、時間では、 $(n-1/2, n+1/2)$ の格子点となる。4.6 節の図 5.6-1 のように x 軸の両端に吸収境界を設置する場合、上式を 1 次精度の差分式で表すと、次式のようになる。

$$\frac{u_J^{n-1/2} - u_{J-1}^{n-1/2}}{h} = -\frac{1}{C} \frac{u_J^{n+1/2} - u_J^{n-1/2}}{dt}: \text{進行波} \quad (5.6-2)$$

$$\frac{u_1^{n-1/2} - u_0^{n-1/2}}{h} = \frac{1}{C} \frac{u_0^{n+1/2} - u_0^{n-1/2}}{dt}: \text{後退波}$$

上式より、 x 軸両端の吸収境界条件は次式のように得られる。

$$j=0 \text{ の吸収境界条件式 } u_0^{n+1/2} = (1-r)u_0^{n-1/2} + ru_1^{n-1/2} \quad (5.6-3a)$$

$$j=J \text{ の吸収境界条件式 } u_J^{n+1/2} = (1-r)u_J^{n-1/2} + ru_{J-1}^{n-1/2} \quad (5.6-3b)$$

5.7 リッカー波外力による 1 次元 1 層弾性体の 数値計算例

x 軸を深さ方向にとり、 $x=0$ が地表面であるような深さ 1 km の地盤の x

=0.25km の点にリッカー波外力が作用する時の 1 次元波動方程式を食い違い格子点の差分式に近似した数値計算例を示す。差分式の空間は $x = 0 \sim 1$ km の有限領域とするが、深さ 1 km の底辺に吸収境界を設置するので、この地盤モデルは深さ方向に無限に長い地盤である。この数値計算では、次式のような波動速度と時間と空間の離散化パラメータは次式のものを用いる。

$$\begin{aligned}
 C &= 1\text{km/s}, \quad dt = 0.002\text{s}, \quad h = 0.0025\text{km} \\
 t &= 0 \sim 2\text{s}, \quad x = 0 \sim 1\text{km} \rightarrow t_n = ndt, \quad x = jh \\
 r &= \frac{Cdt}{h} = \frac{1 \times 0.002}{0.0025} = 0.8 < 1
 \end{aligned} \tag{5.7-1a}$$

ここに、 $r = 0.8 < 1$ なので、数値計算は無条件安定である。ただし、後の図 5.7-2 や図 5.7-3 の波形の後部にやや小さいノイズがみられるので精度は極めて高いとは言えない。計算結果を省略するが、同じ $r=0.8$ でも離散化幅が 2 倍の $dt=0.004$ と $h=0.005$ では、計算結果の精度は悪くなる。きわめて高い精度の結果を得るには、この例題の離散化幅の半分が必要となる。卓越周期や波長の 1/50 程度の離散化幅で、精度は極めて高くなる。この例題の離散化幅は、卓越周期や波長の 1/25、1/20 である。

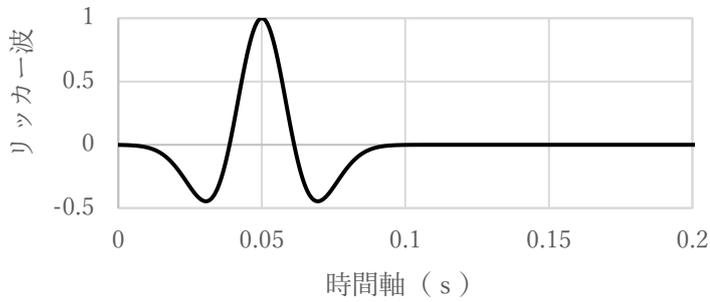
また、外力は、6.2 節の卓越振動数 0.05 秒の次式のリッカー波の振幅を 1 に基準化したものとする。

$$\frac{f_x(t)}{F} = (1 - \tau^2)e^{-\tau^2/2}, \quad F = \frac{D\omega_0^2}{2} \quad (6.7-1b)$$

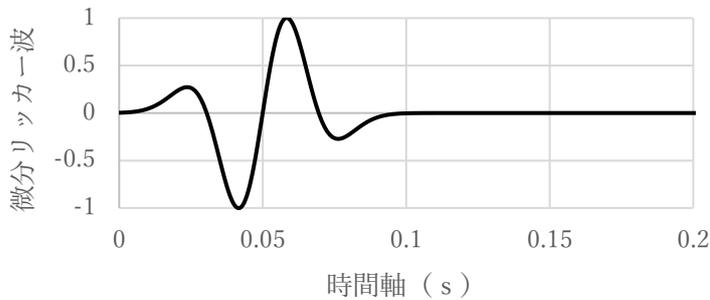
$$\tau = \pi\sqrt{2}(t/T_0 - 1), \quad T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0.05$$

上式のリックカー波の微分は、中央差分により求める。

図 5.7-1 は、振幅を 1 に基準化した卓越振動数 0.05 秒のリックカー波(a)と振幅を 1 に基準化した微分リックカー波(b)を示す。



(a) 卓越周期 0.05 秒の振幅 1 の基準化リックカー波



(b) 卓越周期 0.05 秒の振幅 1 の微分リックカー波

図 5.7-1 卓越周期 0.05 秒の振幅 1 のリックカー波と微分リックカー波

図 5.7-2 は、卓越周期 0.05 秒の微分リックカー波を $x = 0.25\text{km}$ の速度格子点

に外力として作用させた時、地表面から深さ 1 kmの吸収境界点までの 0.15 km 毎の格子点の速度波形を示す。横軸は 0 ～2 秒である。速度波形の振幅は、外力格子点の速度波形の振幅を 1 になるように調整している。

図 5.7-2 より、外力格子点の最初の速度波形が地表と下方に速度 $C=1\text{km/s}$ で伝播し、地表面で振幅が 2 倍になり、地表面で反射した同位相（例題 5.7-1 参照）の波が下方に伝播し吸収境界まで到達する様子がわかる。吸収境界で反射波はほぼ零となるが、反射波は逆位相（例題 5.7-1 参照）で上方に伝播する。外力格子点の下方に伝播する波も同様に、吸収境界に到達し、ほぼ零の反射波は逆位相で上方に伝播する。これらの吸収境界で反射した波は、地表面まで到達するため、地表面波の時間 1.75 秒に逆位相の振幅の小さい波が見られる。

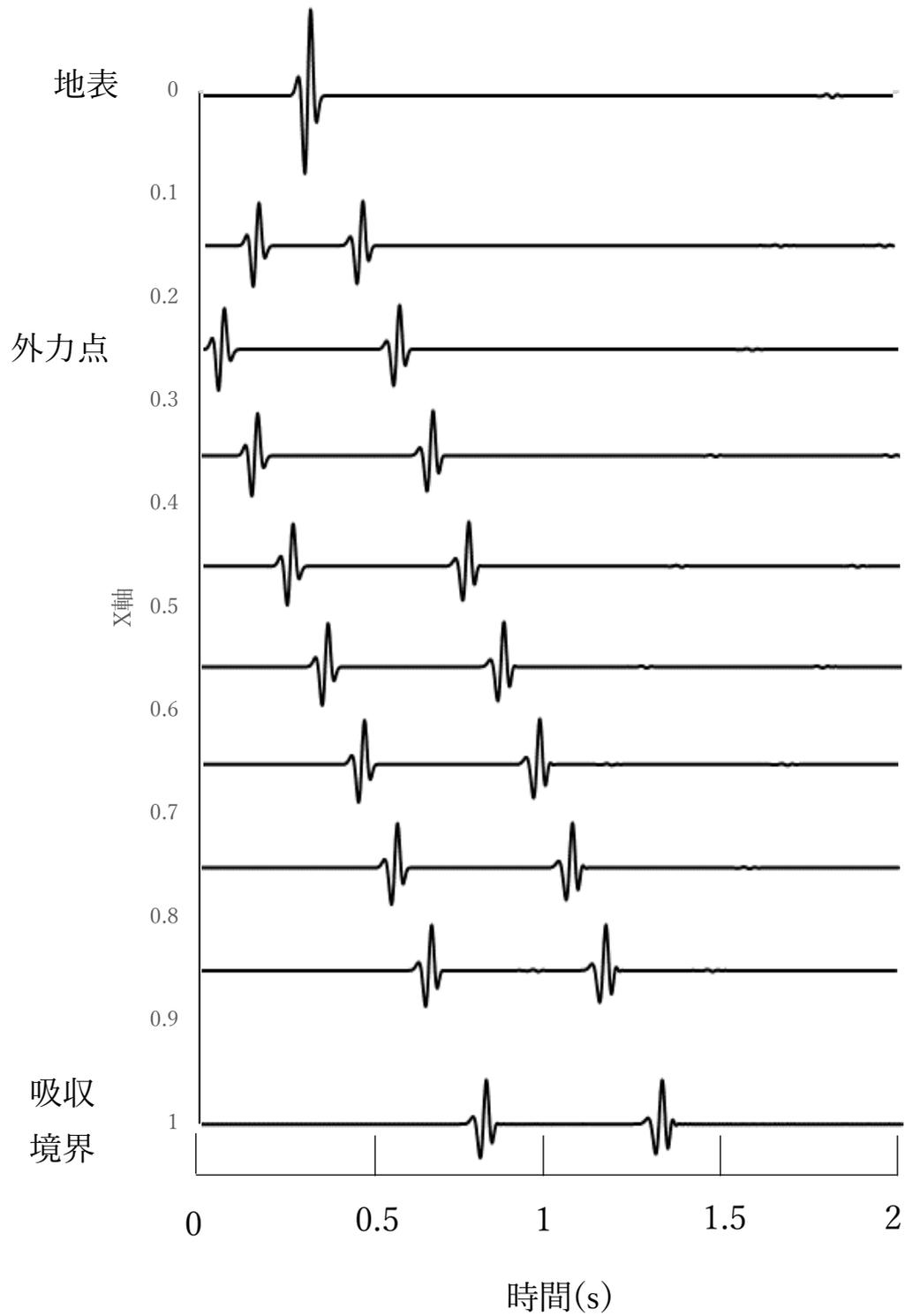
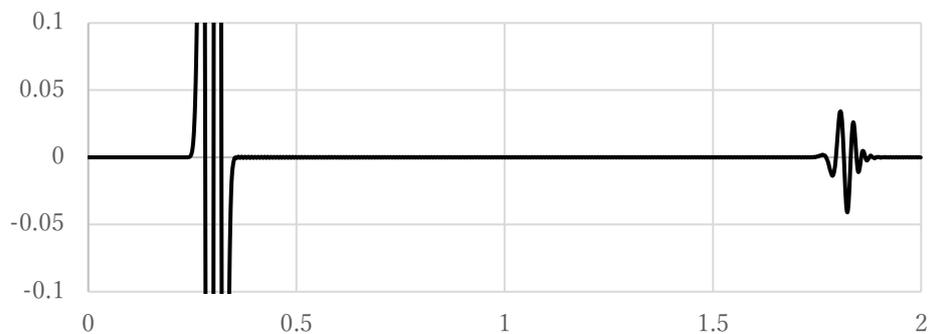


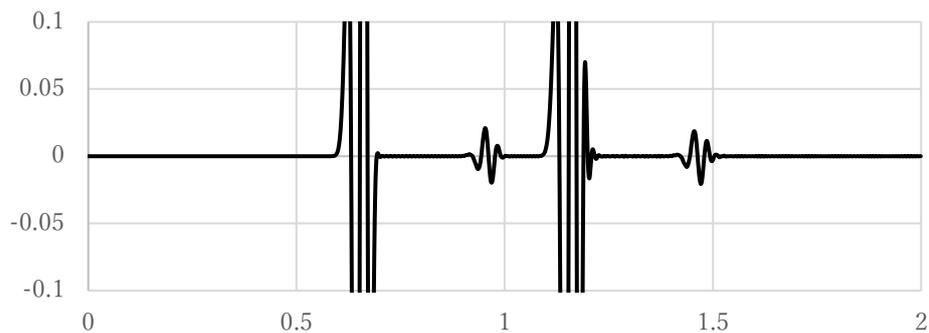
図 5.7-2 地表から深さ 1 km の吸収境界までの 0.15 km 毎の格子点の速度波形

この 1 次元均質弾性体の場合、吸収境界に波動が鉛直に入射するので、吸収境界でほぼ波動が吸収される。このため、吸収境界での反射波の振幅は極めて小さい。

上述の吸収境界での反射波の振幅は小さいので、 $x=0.85\text{km}$ 格子点と地表面の速度波形を拡大したものを図 5.7-3 に示す。吸収境界での反射波は逆位相であり、地表面での反射波は、同位相であることが読み取れる。



(a) 地表面 $x=0$ の速度波形（小さい振幅の位相は最初の波形の逆位相）



(b) $x=0.85\text{km}$ の速度波形（小さい振幅の位相は最初の波形の逆位相）

図 5.7-3 地表面 $x=0$ と $x=0.85\text{km}$ 格子点の速度波形の拡大図

例題 5.7-1 地表面と固定境界への入射波と反射波の位相に関する 地中波形の理論解（1次元波動方程式）

次式の1次元せん断地盤モデルの波動方程式（5.1節）から、地表面と固定境界への入射波と反射波に関する地中の家計の理論解を使い、地表面での反射波は同位相で反射すること、固定境界の場合には、反射波は逆位相となることを示す。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{A5.7-1.1})$$
$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

この波動方程式の一般解は、広く知られているように x 軸を地盤の深さ方向にとると、任意の関数の上昇波（地表面に向かう入射波） $f_{in}(t + x / C)$ と下降波（深さ方向に向かう波） $f_{out}(t - x / C)$ の和で与えられる。

$$u(t, x) = f_{in}(t + x / C) + f_{out}(t - x / C) \quad (\text{A5.7-1.2})$$

上式が、波動方程式を満たす2つの解であることは、上式を波動方程式に代入して確かめられる。

境界条件として、 $x=0$ で地表面（せん断応力が零）と固定境界（変位が零）の2つの場合を考察する。

(1) 地表面の場合

地表面ではせん断応力は零なので、次式が成り立つ。

$$\tau(t,0) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \mu \left(\left. \frac{\partial f_{in}}{\partial x} + \frac{\partial f_{out}}{\partial x} \right|_{x=0} \right) = 0 \quad (\text{A5.7-1.3a})$$

ここで、 $t + x / C = \alpha, t - x / C = \beta$ と置いて微分すると、次式が得られる。

$$\left. \frac{\partial f_{in}}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{C} \left. \frac{\partial f_{in}}{\partial \alpha} \right|_{x=0} = \frac{1}{C} \frac{df_{in}}{dt} \quad (\text{A5.7-1.3b})$$

$$\left. \frac{\partial f_{out}}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{C} \left. \frac{\partial f_{out}}{\partial \beta} \right|_{x=0} = -\frac{1}{C} \frac{df_{out}}{dt}$$

したがって、式(A5.7-1.3a)から次式が得られる。

$$\frac{df_{in}}{dt} = \frac{df_{out}}{dt} \rightarrow f_{in} = f_{out} \quad (\text{A5.7-1.3c})$$

上式から地表面の場合、入射変位の関数を使うと、地中の変位は、次式で与えられる。

$$u(t,x) = f_{in}(t + x / C) + f_{in}(t - x / C) \quad (\text{A5.7-1.4a})$$

上式によると、地中の変位は上昇波である入射変位と同じ関数の下降波の和で与えられるため、地表で反射し下方に向かう下降波は入射波と同位相であることを意味する。

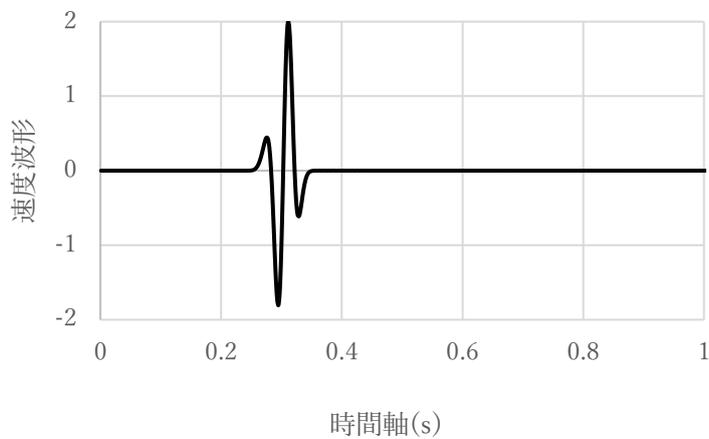
特に、地表面の変位波形を $u_{free}(t) = u(t,0)$ とすると、地表面の変位波形は、

次式のように入射波の 2 倍となる。

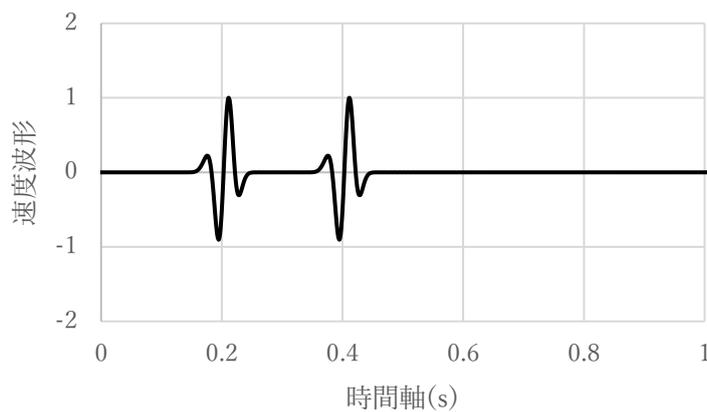
$$u_{free}(t) = 2f_{in}(t) \quad (A5.7-1.4b)$$

また、地表面波形が与えられた時、地中の任意点変位波形は次式で与えられる。

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_{free}(t + x / C) + u_{free}(t - x / C)) \quad (A5.7-1.4a)$$



(a) 地表面の速度波形 (最大値 2)



(b) 地中 $x=0.1\text{km}$ の速度波形 (最大値 1)

図 A5.7-1.1 地表面の速度波形が与えられた時の地中 $x=0.1\text{km}$ 位置の速度波形 (最大値 1 の入射波と地表で反射した同位相の下降波が見られる)

地表面速度波形の場合も変位波形と同様なので、図 5.7-2 の食い違い差分式で求めた地表面の速度波形を上式に代入して求めた地中 $x=0.1\text{km}$ 格子点の速度波形を図 A5.7-1.1 に示す。この図から、差分法と同様に、入射波と同位相の反射波の和の速度波形であることがわかる。

(2) 固定境界の場合

固定境界では変位は零なので、次式が成り立つ。

$$u(t,0) = f_{in}(t) + f_{out}(t) = 0 \quad (\text{A5.7-1.5})$$

上式の条件から、 $f_{in}(t) = -f_{out}(t)$ となり、入射波の関数を使うと、任意点の変位波形は、次式で与えられる。

$$u(t,x) = f_{in}(t + x / C) - f_{in}(t - x / C) \quad (\text{A5.7-1.6})$$

上式は、入射波が固定境界で反射し下方に進む下降波は入射波の逆位相であることを意味する。

図 A5.7-1.2 には、 $x=0$ が固定境界の時の $x=0.1$ の地中点の速度波形を示す。この図より、最初の波形が入射波であるが、後続の波形は、固定境界で反射して下方に進む下降波であり、この下降波は入射波の逆位相であることがわかる。

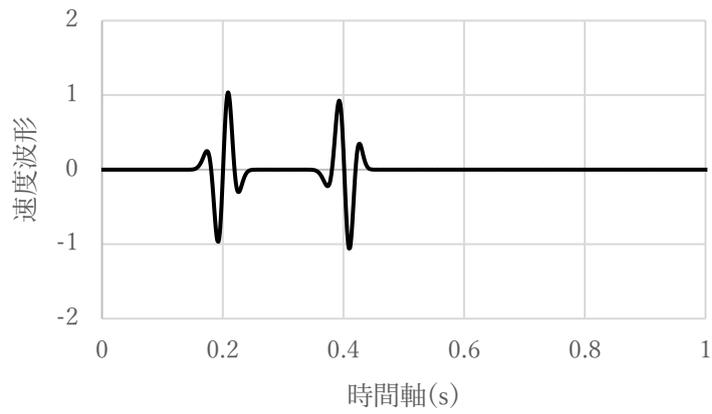


図 A5.7-1.2 $x=0$ が固定境界の時の $x=0.1$ の地中点の速度波形
 (最初の波形が入射波である。後続の波形は、固定境界で反射して下方に進む
 下降波である。下降波は入射波の逆位相である。)

5.8 リッカー波外力による 1次元 2層弾性体の 数値計算例

ここでは、5.7 節の 1次元 1層弾性体の数値計算例を元に、図 5.8-1 のような $x=0.25\text{km}$ に境界を有する 1次元 2層弾性体の地表面に微分リッカー波外力が作用する時の食い違い格子点の差分式による数値計算例を示す。外力は速度格子点に作用させる。

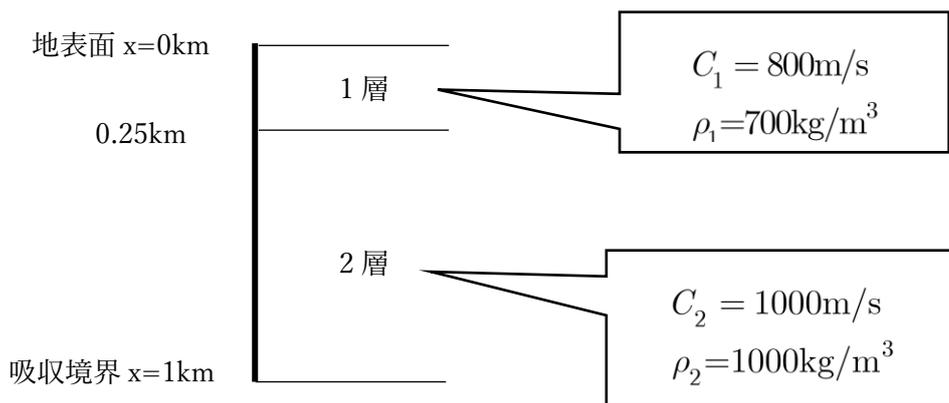


図 5.8-1 数値計算で用いる 1次元 2層弾性体と物性値

この数値計算では、次式のような波動速度と時間と空間の離散化パラメータは次式のものを用いる。

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0.8\text{km/s}, & C_2 &= 1\text{km/s} \\
\rho_1 &= 700\text{kg/m}^3, & \rho_2 &= 1000\text{kg/m}^3 \\
dt &= 0.002\text{s}, & h &= 0.0025\text{km} \\
t &= 0 \sim 2\text{s}, x = 0 \sim 1\text{km} \rightarrow t_n = ndt, x = jh \\
r_1 &= \frac{C_1 dt}{h} = \frac{0.8 \times 0.002}{0.0025} = 0.64 < 1 \\
r_2 &= \frac{C_2 dt}{h} = \frac{1 \times 0.002}{0.0025} = 0.8 < 1
\end{aligned} \tag{5.8-1a}$$

ここに、 $r_1 = 0.64 < 1, r_2 = 0.8 < 1$ なので、数値計算は無条件安定である。

卓越周期 0.05 秒の微分リッカー波を外力としているので、各層の波長は、次式の値である。

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= C_1 T_0 = 0.8 \times 0.05 = 0.04\text{km} \\
\lambda_2 &= C_2 T_0 = 1 \times 0.05 = 0.05\text{km}
\end{aligned} \tag{5.8-1b}$$

各層の波長と空間離散長の比は、 $\lambda_1 / h = 16, \lambda_2 / h = 20$ なので波長を再現できる空間離散長である。

図 5.8-2 は、地表面に微分リッカー波外力が作用する時の食い違い格子点の差分式による数値計算結果（各格子点の速度波形）を示す。時間の経過とともに速度波形の後部に振幅の小さい減衰振動的な波形が現れている。これらは時間や空間微分の 1 次精度の差分式を用いたことによる誤差であると思われる。時間や空間の離散化を更に小さくすると解消できる。

上述のように小さい数値計算誤差が含まれるが、以下のように伝播速度や反射波と透過波の振幅や位相は、理論解とほぼ同じであると言える。

(1) 伝播速度

図 5.8-2 において、地表面の微分リッカー波外力による速度波形が下降して吸収境界まで到達する最大振幅の速度波形から、1層の伝播速度は、最大振幅の波の移動時間($0.316=0.375-0.059$)と距離(0.25)より 0.79km/s と読み取れる。この伝播速度は計算で用いた1層の速度 0.8km/s とほぼ同じである。また、2層の伝播速度は、移動時間($0.754=1.129-0.375$)と距離(0.75)より 0.99km/s と読み取れ、これも計算で用いた2層の速度 1km/s とほぼ同じである。

(2) 反射波と透過波の振幅

1層と2層の境界では、波の反射と透過が見られる。この境界で反射した波は地表面に逆位相で進み、地表面では2倍の振幅となっている。この反射波の振幅は、解析解では0.282倍(反射率、例題 5.8-1 参照)で、図の反射波の振幅比($0.29=0.258/0.8668$)はほぼ解析解と同じである。地表面で反射した波は同位相で下方に進み境界で反射し、逆位相で地表面に伝播することを繰り返すのが読み取れる。境界から下方に進む波は、透過波であり同位相である。解析解の透過波振幅は、1層の下降波振幅の0.718倍(透過率、例題 5.8-1 参照)であるが、図の透過波の振幅比($0.72=0.6257/0.8668$)とほぼ同じである。

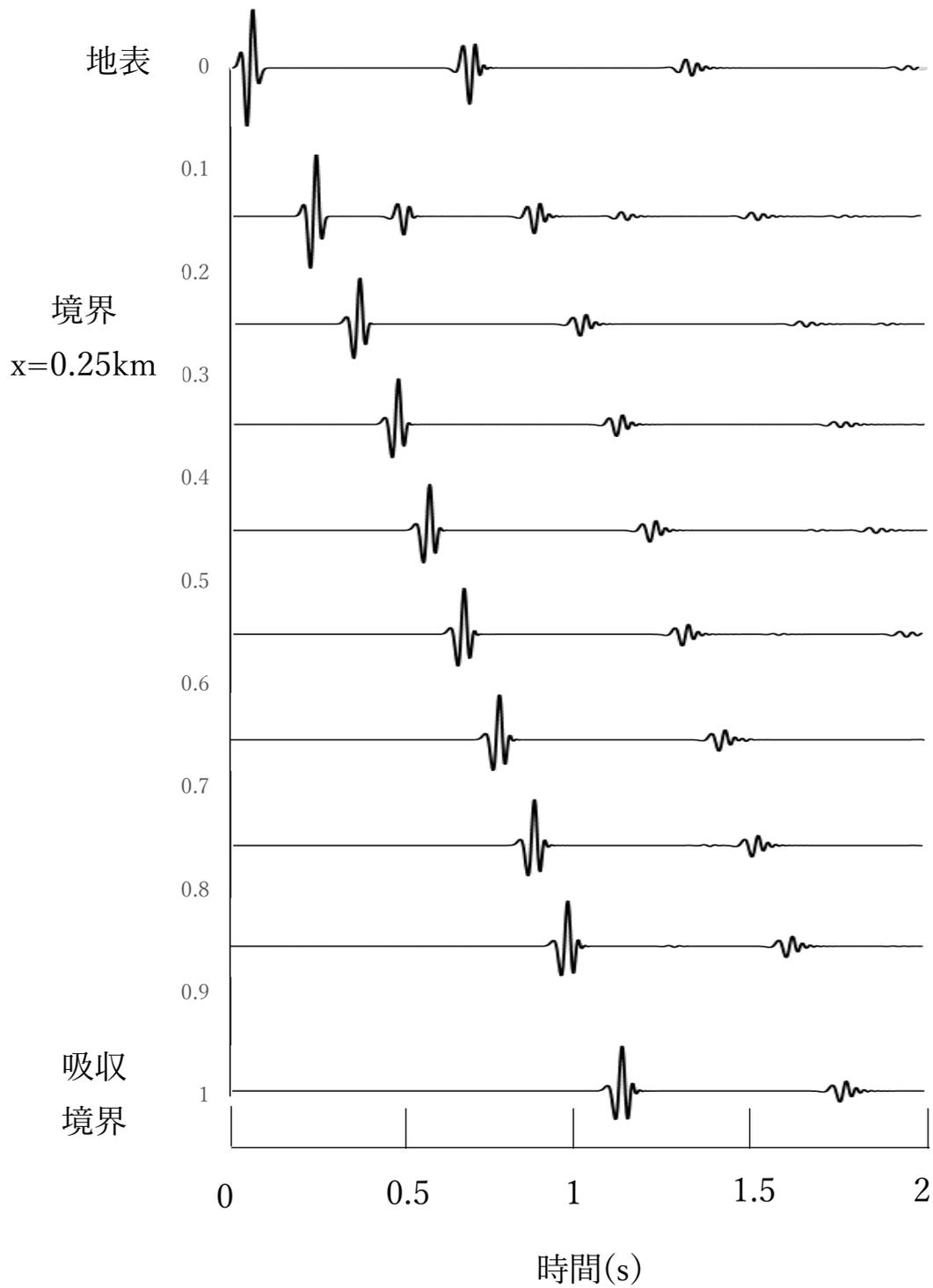


図 5.8-2 地表面に微分リックカー波外力を作用させた場合の地表から深さ 1km の吸収境界までの 0.15km 毎の速度波形

例題 5.8-1 反射率と透過率

深さ方向に x 軸を取ると、例題 A5.7-1 のように波動方程式の解は、上昇波と下降波の和として与えられる。

$$u(t, x) = f_{in}(t + x / C) + f_{out}(t - x / C) \quad (\text{A5.8-1.1})$$

簡単化のために 1 層と 2 層の境界は、図 A5.8-1.1 のように $x=0$ に設定する。

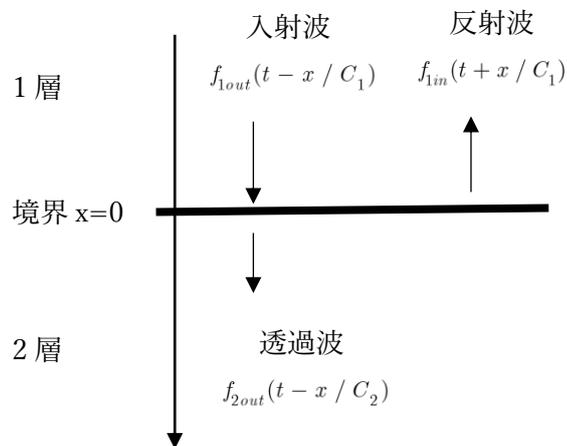


図 A5.8-1.1 入射波の境界での反射波と透過波の記号

入射波は 1 層の下降波として与える。この条件で境界での反射波 (1 層の上昇波) と透過波 (2 層の下降波) の関係を求める。境界では、変位とせん断応

力が等しくなければならない。この境界条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_1(t, 0) &= u_2(t, 0) \\ \mu_1 \frac{\partial u_1(t, 0)}{\partial x} &= \mu_2 \frac{\partial u_2(t, 0)}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{A5.8-1.2})$$

上段の条件式から、次式が得られる。

$$f_{2out}(t) = f_{1in}(t) + f_{1out}(t) \quad (\text{A5.8-1.3})$$

下段の条件式から、例題 A5.7-1 の変数変換による微分を用いると、次式が得られる。

$$-\frac{\mu_2}{C_2} \frac{df_{2out}(t)}{dt} = \frac{\mu_1}{C_1} \left(\frac{df_{1in}(t)}{dt} - \frac{df_{1out}(t)}{dt} \right) \quad (\text{A5.8-1.4a})$$

上式を時間で積分すると、次式が得られる。

$$-\frac{\mu_2}{C_2} f_{2out}(t) = \frac{\mu_1}{C_1} (f_{1in}(t) - f_{1out}(t)) \quad (\text{A5.8-1.4b})$$

伝播速度は、次式のようにせん断剛性と密度で表される。

$$\mu_1 = \rho_1 C_1^2, \quad \mu_2 = \rho_2 C_2^2 \quad (\text{A5.8-1.4c})$$

したがって、境界でのせん断応力が等しいという条件の式(A5.8-1.4b)は、次式のようになる。

$$-\frac{\rho_2 C_2}{\rho_1 C_1} f_{2out}(t) = f_{1in}(t) - f_{1out}(t) \quad (\text{A5.8-1.5})$$

式(A5.8-1.3)と式(A5.8-1.5)から、次式のように反射波と透過波が入射波から求められる。

$$f_{1in}(t) = Rf_{1out}(t), \quad f_{2out}(t) = Tf_{1out}(t) \quad (\text{A5.8-1.6a})$$

ここに、反射率 R と透過率 T は、次式で与えられる。

$$R = \frac{\rho_1 C_1 - \rho_2 C_2}{\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2}, \quad T = R + 1 = \frac{2\rho_1 C_1}{\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2} \quad (\text{A5.8-1.6b})$$

結局、1層の反射波（上昇波）と2層の透過波（下降波）は、次式のように反射率と透過率を入射波に掛けて求められる。

$$\begin{aligned} f_{1in}(t + x / C_1) &= R f_{1out}(t - x / C_1) \\ f_{2out}(t - x / C_2) &= T f_{1out}(t - x / C_1) \end{aligned} \quad (\text{A5.8-1.7})$$

5.8節の数値計算で用いた2層弾性体の場合、反射率と透過率は、次式の値となる。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho_1 C_1 - \rho_2 C_2}{\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2} = \frac{700 \times 800 - 1000 \times 1000}{700 \times 800 + 1000 \times 1000} = -0.282 \\ T &= \frac{2\rho_1 C_1}{\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2} = \frac{2 \times 700 \times 800}{700 \times 800 + 1000 \times 1000} = 0.718 \end{aligned} \quad (\text{A5.8-1.8})$$

反射率が負であることは、反射波の位相が入射波の位相の逆であることを示す。透過波は正であるので、透過波の位相は、入射波の位相と同位相である。

6章 2次元SH波の食い違い格子点差分式

ここでは、5章の1次元波動方程式の食い違い格子点差分式と同様に2次元SH波の波動方程式の食い違い格子点差分式と地表面条件と数値計算例を示す。

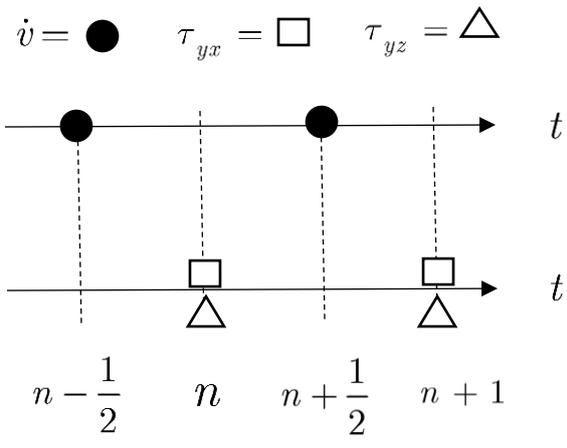
6.1 2次元SH波と食い違い格子点差分式

地震動等の地盤震動問題では、右手座標系で深さ方向に z 軸を取る（例えば、原田・本橋(2017)）。SH波は面内問題と呼ばれるように水平方向の変位 v のみとなり、力のつり合い式と応力・歪式は、次式で与えられる。

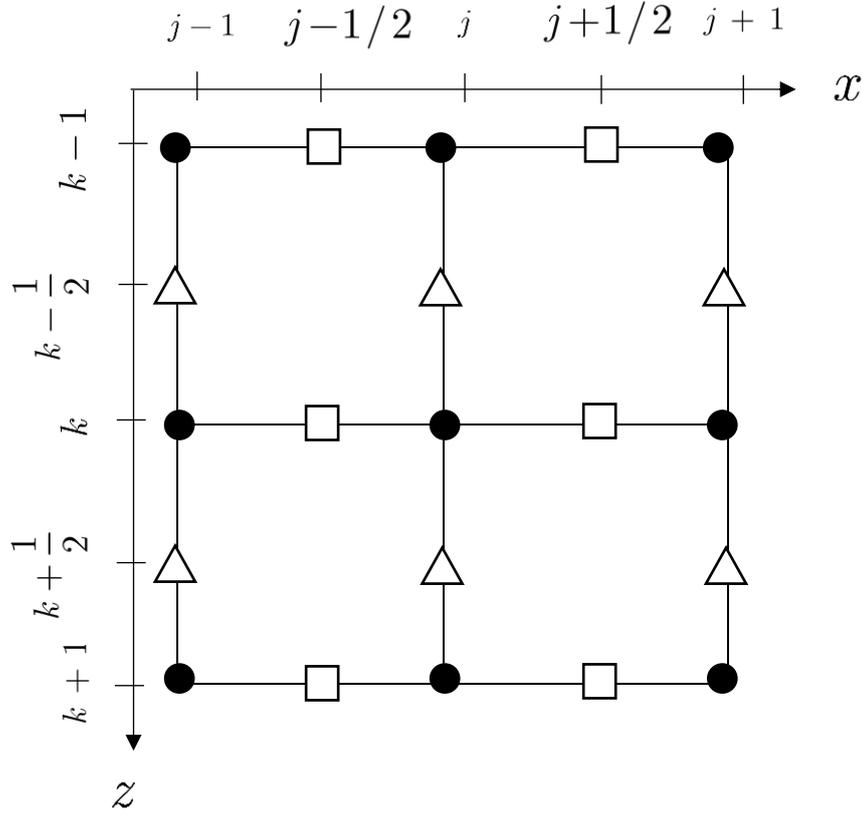
$$\text{力のつり合い式： } \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \quad (6.1-1a)$$

$$\text{応力・歪式： } \tau_{yx} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (6.1-1b)$$

変位の代わりに速度を使って、状態方程式のように書き変えると、次式が得られる。



(a) 時間軸の食い違い格子点構造



(b) 空間軸の食い違い格子点構造

図 6.1-1 SH 波動方程式の食い違い格子点 ((a)時間軸、(b)空間軸) の構造

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \\
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \\
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} &= \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{6.1-2}$$

上式の食い違い格子点差分式では、図 6.1-1 のように速度では、時間 $(n-1/2, n+1/2)$ と空間 $((j, j+1), (k, k+1))$ の食い違い格子点を用いる。せん断応力では、時間 $(n, n+1)$ と空間 $((j, j+1), (k, k+1))$ の食い違い格子点を用いる。定式化すると、以下のようなになる。

格子点 (jh, kh, ndt) の速度微分の差分式は、次式のようなになる。

$$\rho_{j,k} \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} = \frac{\rho_{j,k}}{dt} (\dot{v}_{j,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{j,k}^{n-1/2}) \tag{6.1-3a}$$

力のつり合い式右辺の応力の空間微分の差分式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= \frac{1}{h} (\tau_{yxj+1/2,k}^n - \tau_{yxj-1/2,k}^n) \\
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \frac{1}{h} (\tau_{yzj,k+1/2}^n - \tau_{yzj,k-1/2}^n)
\end{aligned} \tag{6.1-3b}$$

また、応力速度・歪速度式の差分式は、次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} &= \frac{1}{dt} (\tau_{yxj+1/2,k}^{n+1} - \tau_{yxj+1/2,k}^n) \\
\mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} &= \frac{\mu_{j+1/2,k}}{h} (\dot{v}_{j+1,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{j,k}^{n+1/2})
\end{aligned} \tag{6.1-3c}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} &= \frac{1}{dt} (\tau_{yzj,k+1/2}^{n+1} - \tau_{yzj,k+1/2}^n) \\ \mu \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} &= \frac{\mu_{j,k+1/2}}{h} (\dot{v}_{j,k+1}^{n+1/2} - \dot{v}_{j,k}^{n+1/2})\end{aligned}\quad (6.1-3d)$$

以上より、式(6.1-2)の食い違い格子点差分式の漸化式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\dot{v}_{j,k}^{n+1/2} &= \dot{v}_{j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{h\rho_{j,k}} \left(\tau_{yxj+1/2,k}^n - \tau_{yxj-1/2,k}^n + \right) + \frac{f_{j,k}}{\rho_{j,k}} \\ \tau_{yxj+1/2,k}^{n+1} &= \tau_{yxj+1/2,k}^n + \mu_{j+1/2,k} \frac{dt}{h} (\dot{v}_{j+1,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{j,k}^{n+1/2})\end{aligned}\quad (6.1-4)$$

$$\tau_{yzj,k+1/2}^{n+1} = \tau_{yzj,k+1/2}^n + \mu_{j,k+1/2} \frac{dt}{h} (\dot{v}_{j,k+1}^{n+1/2} - \dot{v}_{j,k}^{n+1/2})$$

上式上段式から、時刻 $n + 1/2$ の速度が時刻 $n - 1/2$ の速度と時刻 n のせん断応力から計算できる。また、上式中段と下段式から、時刻 $n + 1$ のせん断応力が時刻 n のせん断応力と時刻 $n + 1/2$ の速度から計算できる。外力 $f_{j,k}$ は速度格子点で与えられる。

6.2 2次元SH波と通常の格子点差分式

食い違い格子点法による差分式の他に、通常の格子点による変位の差分式を示しておく。2次元SH波動方程式は、式(6.1-1b)を式(6.1-1a)に代入して変位に関する次式のようになる。

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{f_y}{\rho} \quad (6.2-1)$$

$$C = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ここに、 C は SH 波の速度を意味する。

離散化し、変位を次式のように表すものとする。

$$v(x, z, t) = v(jh, kh, ndt) = v_{j,k}^n \quad (6.2-2a)$$

変位に関する波動方程式を 2 次精度の中央差分式で近似し、整理すると、次式の漸化式が得られる。

$$v_{j,k}^{n+1} = -v_{j,k}^{n-1} + r^2(v_{j+1,k}^n + v_{j-1,k}^n + v_{j,k+1}^n + v_{j,k-1}^n) + 2(1 - 2r^2)v_{j,k}^n \quad (6.2-2b)$$

ここに、 $r = Cdt / h$ である。

上式の漸化式により、1次元の場合と同様に初期条件（初期変位分布と初速度（通常は零））を与えて、逐次、空間と時間を更新してすべての格子点の変位を求めることができる。）

6.2 外力や入射速度

速度格子点で与えられる外力 $f_{j,k}$ は、震源断層からの SH 波成分の外力 (原田・本橋(2017)) を与えることもできる。3次元断層モデルから得られる3次元波動場から、SH 波成分を取り出すことが可能であるので、SH 波成分の外力を作用させた SH 波のみをあえて取り扱うことはしないのが一般的である。外力が作用する時の SH 波動の特性を調べる時には、次式のようなリックー波を外力や入射速度として用いることが多い。

$$f_y(t) = F(1 - \tau^2)e^{-\tau^2/2} \quad (6.2-1a)$$

ここに、 F は振幅係数、 τ は無次元時間を表し、リックー波の次式のようにリックー波の卓越振動数 ω_0 または、卓越周期 T_0 の関数で与えられる (原田・本橋(2021))。

$$F = \frac{D\omega_0^2}{2}, \quad \tau = \pi\sqrt{2}(t/T_0 - 1), \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (6.2-1b)$$

図 6.2-1 は、振幅を 1 とした時の卓越振動数 $\omega_0 = 2\pi, 20\pi$ (卓越周期 1 秒と 0.1 秒) のリックー波を示す。

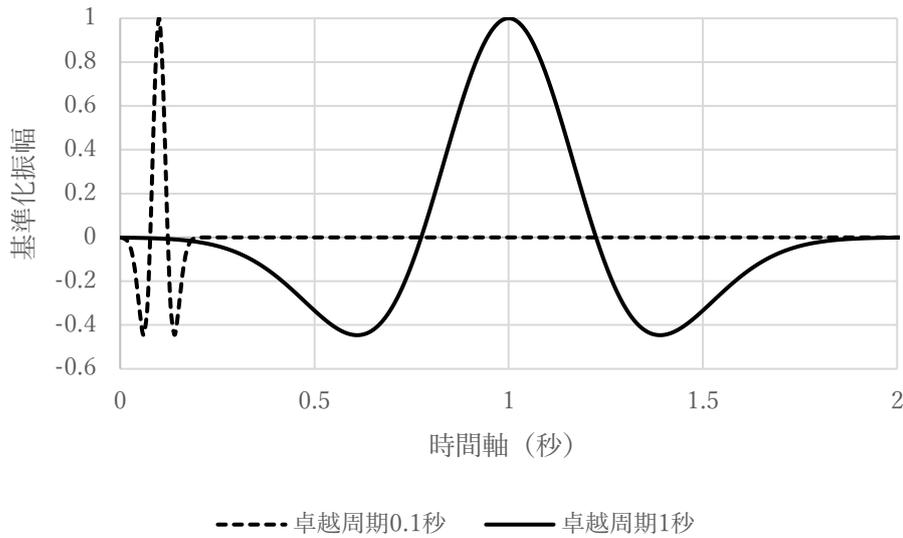


図 6.2-1 振幅を 1 とした時の卓越振動数 $\omega_0 = 2\pi, 20\pi$ (卓越周期 1 秒と 0.1 秒) のリックカー波

6.3 地表面の境界条件

SH 波動方程式では、地表面を零とした深さ方向に z 軸を取り、地表面では次のように z 軸方向のせん断応力 τ_{yz} が零である。

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (6.3-1a)$$

差分式での地表面境界条件では、図 6.3-1 のように地表面に対応する格子点 ($k=0$) 上に仮想格子点 ($k=-1/2$) を設置し、式(6.3-1a)を満たすせん断応力を求める。せん断応力 τ_{yz} の格子点が地表面 ($k=0$) に無いので、5.5 節の

1次元波動方程式の場合と同様に地表面上下の格子点の平均値で地表面のせん断応力 τ_{yz} とする。このため式(6.3-1a)の離散化条件は次式のようにになる。

$$\tau_{yzj,-1/2}^n = -\tau_{yzj,1/2}^n \quad (6.3-1b)$$

上式は地表面のどの時刻とどの場所でも成立する。

このせん断応力の境界条件を式(6.1-4)に代入すると、地表面上の仮想点のせん断応力 $\tau_{yzj,-1/2}^n$ が求められる。これにより、地表面速度が式(6.1-4)の上段式から求められる。

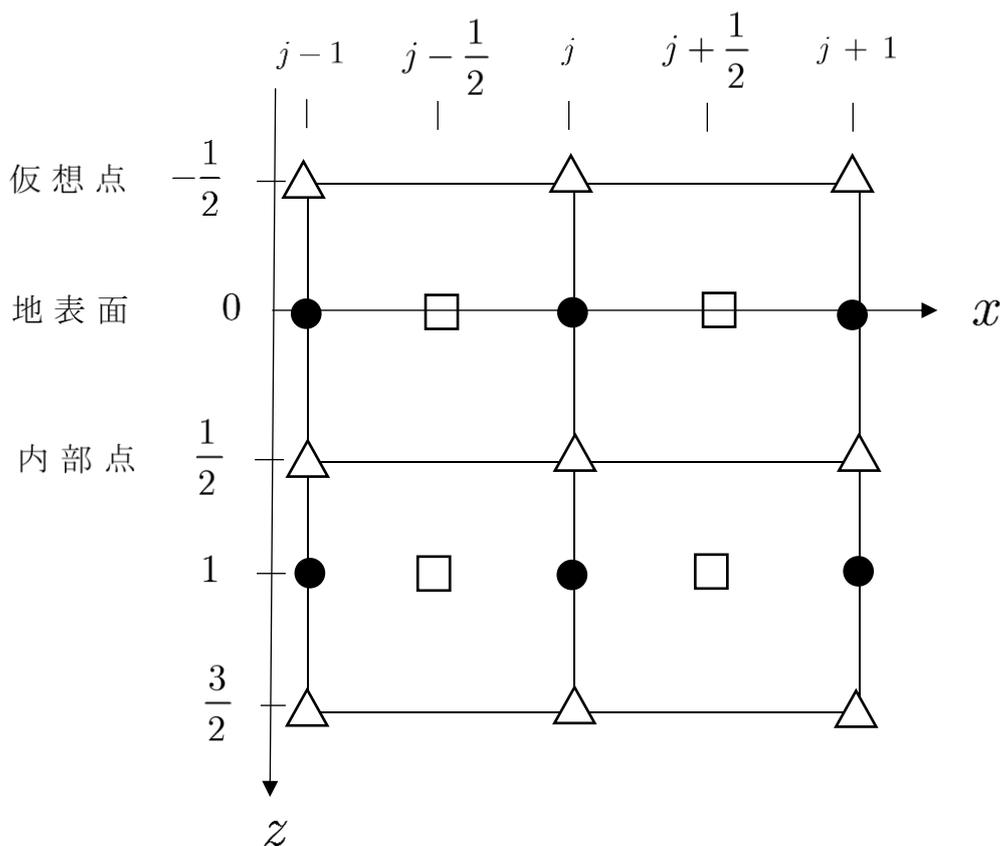


図 6.3-1 地表面の境界条件

6.4 数値計算例

(1) 地中のリックカー波による半無限弾性体の波動場

最初の例として、Jiang (2012)による半無限弾性体の地下中央に卓越振動数 12Hz のリックカー波が作用した時の吸収境界と地表面での反射波の様子を示す。

半無限弾性体モデルでは、750m四方の正方形領域対象に地表面と吸収境界を用いた。この正方形領域の中心にリックカー波を外力として作用させた。また、次式の物性値と離散化パラメータを用いた。

$$\begin{aligned} C_s &= 2020.73\text{m/s}, \quad \rho = 2380.90\text{kg/m}^3 \\ dt &= 0.00025\text{s}, \quad h = 1.25\text{m} \\ x &= 0 \sim 750\text{m}, \quad z = 0 \sim 750\text{m} \end{aligned} \tag{6.4-1}$$
$$r = \frac{C_s dt}{h} = \frac{2020.75 \times 0.00025}{1.25} = 0.4 < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$$

この計算は、 $r = 0.4 < 0.71$ のため無条件安定である。

図 6.4-1 は、 $t=0.05$ 秒毎の 6 時刻の SH 波動場のスナップショットを示す。中央点のリックカー波外力による波動が等速度で遠方に広がり、吸収境界の側方面と底面に到達すると、波動が吸収されている ((e) $t=0.25\text{s}$)。地表面で反射した波動は、5.7 節の 1 次元波動と同じように同位相で下方に伝播している ((f) $t=0.30\text{s}$)。

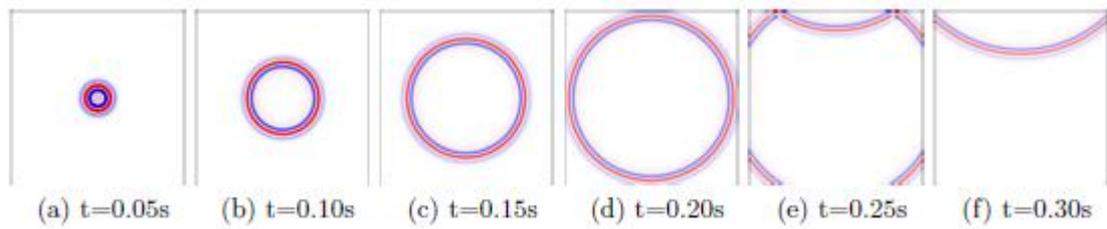


図 6.4-1 リッカー波外力による半無限弾性体の $t=0.05$ 秒毎の 6 時刻の SH 波動場のスナップショット

(2) リッカー波の鉛直入射による不整形弾性体の地表面波

次の例題は、Boore(1972)によるリッカー波の鉛直入射による不整形弾性体の地表面波形を示す。

図 6.4-2 は、不整形基盤モデルを示す。S 波速度 3500m/s の基盤が波長 5km の余弦関数 (cos 関数) の不整形基盤で中心部が深さ 600m 、浅い表層地盤部は 100m である。この不整形基盤上に S 波速度 700m/s の洪積層の表層地盤が堆積するモデルである。なお、基盤と洪積層の密度は、それぞれ $\rho_1 = 1702.34\text{kg/m}^3$ 、 $\rho_2 = 2380.90\text{kg/m}^3$ と仮定した。

図 6.4-2 には、洪積層の表層地盤が最も深い (600m) 場所 (A Point) と最も浅い (100m) 場所 (B Point) の地表面変位波形を実線で示す。浅い場所の地表面波形は入射波形のリッカー波に似ているが、深い場所の地表面波形は継続時間も長くリッカー波形とは似ていない。最も深い場所の変位波形には、1次元地盤としての地表面応答変位波形を破線で示している。この破線と 2次元地盤の

応答には大きな違いがみられる。

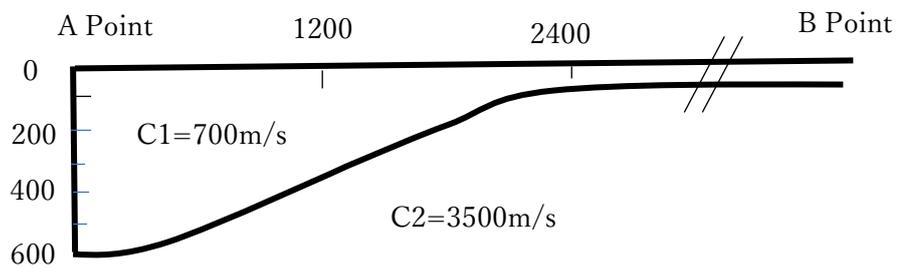
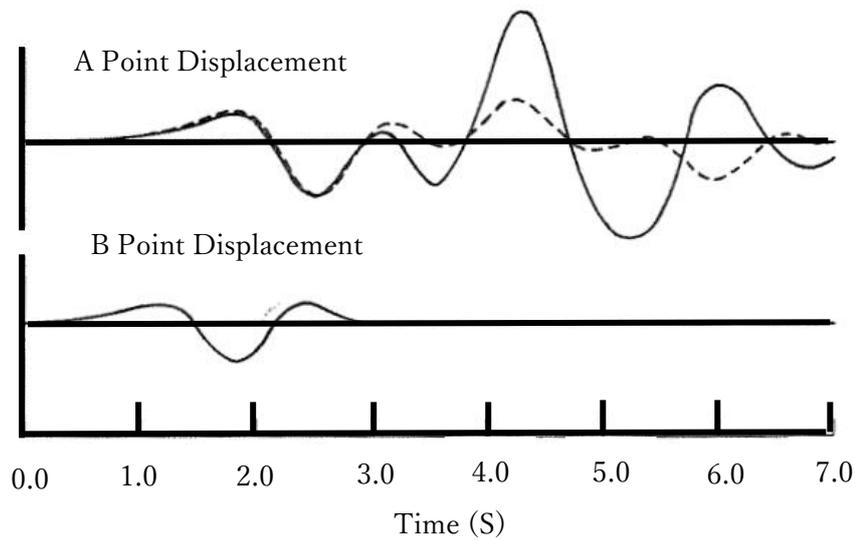


図 6.4-2 Boore(1972)によるリッカー波の鉛直入射による不整形弾性体の地表面波形の比較

7章 2次元 P・SV 波の食い違い格子点差分式

ここでは、5章の1次元波動方程式の食い違い格子点差分式と同様に2次元 P・SV 波の波動方程式の食い違い格子点差分式と地表面条件と数値計算例を示す。

7.1 2次元 P・SV 波と食い違い格子点差分式

右手座標系で深さ方向に z 軸を取る（例えば、原田・本橋(2017)）。P・SV 波は面外問題と呼ばれる。 x 軸水平方向の変位 u と z 軸鉛直方向の変位 w が連成する波動方程式となり、力のつり合い式と応力・歪式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{力のつり合い式：} \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \end{aligned} \quad (7.1-1a)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{応力・歪式：} \sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \quad (7.1-1b)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

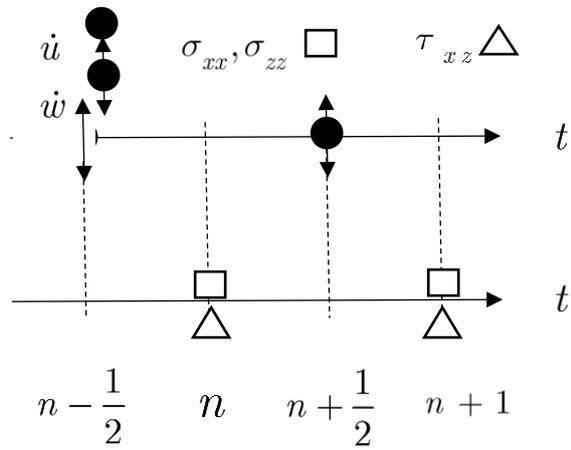
ここに、S波とP波速度とラーメの定数と密度の関係は、次式で与えられる。

$$C_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad C_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_S < C_P \quad (7.1-1c)$$

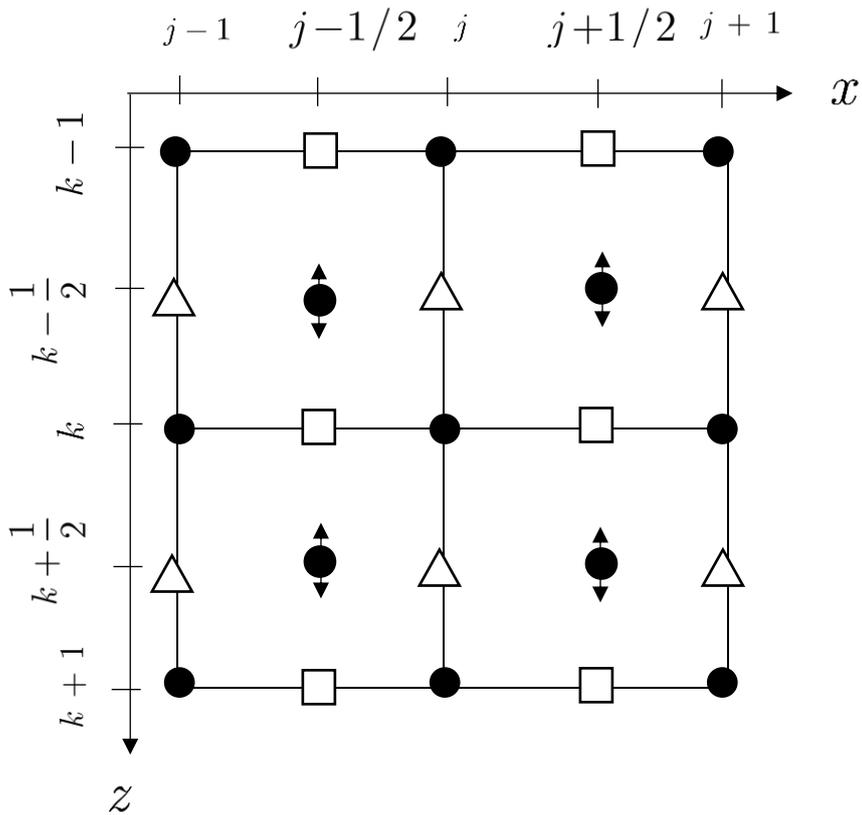
変位の代わりに速度を使って、状態方程式のように書き変えると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \\ \rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.1-2)$$

上式の食い違い格子点差分式では、図 7.1-1(a)のように速度では、時間 $(n-1/2, n+1/2)$ 、応力では時間 $(n, n+1)$ を用いる。しかし、空間に関しては図 7.1-1(b)のようにやや複雑な格子点となる。水平方向の速度 \dot{u} では、 (j, k)



(a) 時間軸の食い違い格子点構造



(b) 空間軸の食い違い格子点構造

図 7.1-1 P・SV 波動方程式の食い違い格子点 ((a)時間軸、(b)空間軸) の構造

1次精度の差分式で定式化すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{j,k}^{n+1/2} &= \dot{u}_{j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{h\rho_{j,k}} \left(\begin{array}{c} \sigma_{xxj+1/2,k}^n - \sigma_{xxj-1/2,k}^n \\ \tau_{xzj,k+1/2}^n - \tau_{xzj,k-1/2}^n \end{array} + \right) + \frac{f_{xj,k}}{\rho_{j,k}} \\
\dot{w}_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} &= \dot{w}_{j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \frac{dt}{h\rho_{j+1/2,k+1/2}} \left(\begin{array}{c} \tau_{xzej+1,k+1/2}^n - \tau_{xzej,k+1/2}^n \\ \sigma_{zzj+1/2,k+1}^n - \sigma_{zzj+1/2,k}^n \end{array} + \right) \\
&\quad + \frac{f_{zj+1/2,k+1/2}}{\rho_{j+1/2,k+1/2}} \\
\sigma_{xxj+1/2,k}^{n+1} &= \sigma_{xxj+1/2,k}^n + \frac{(\lambda + 2\mu)_{j+1/2,k} dt}{h} (\dot{u}_{j+1,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{j,k}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{j+1/2,k} dt}{h} (\dot{w}_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}) \\
\sigma_{zzj+1/2,k}^{n+1} &= \sigma_{zzj+1/2,k}^n + \frac{(\lambda + 2\mu)_{j+1/2,k} dt}{h} (\dot{w}_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{j+1/2,k-1/2}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{j+1/2,k} dt}{h} (\dot{u}_{j+1,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{j,k}^{n+1/2}) \\
\tau_{xzj,k+1/2}^{n+1} &= \tau_{xzj,k+1/2}^n + \frac{\mu_{j,k+1/2} dt}{h} \left(\begin{array}{c} \dot{w}_{j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{j-1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ \dot{u}_{j+1,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{j,k}^{n+1/2} \end{array} + \right)
\end{aligned} \tag{7.1-3}$$

また、数値計算上の安定性条件は、2次元であること、 $C_S < C_P$ を考慮すると、

次式で与えられる。

$$r = C_P \frac{dt}{h} < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \tag{7.1-4}$$

7.2 地表面の境界条件

地表面の鉛直応力とせん断応力は零なので、地表面条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0 \quad (7.2-1)$$

差分式の場合、図 7.2-1 のように地表面の上に仮想点を設ける。

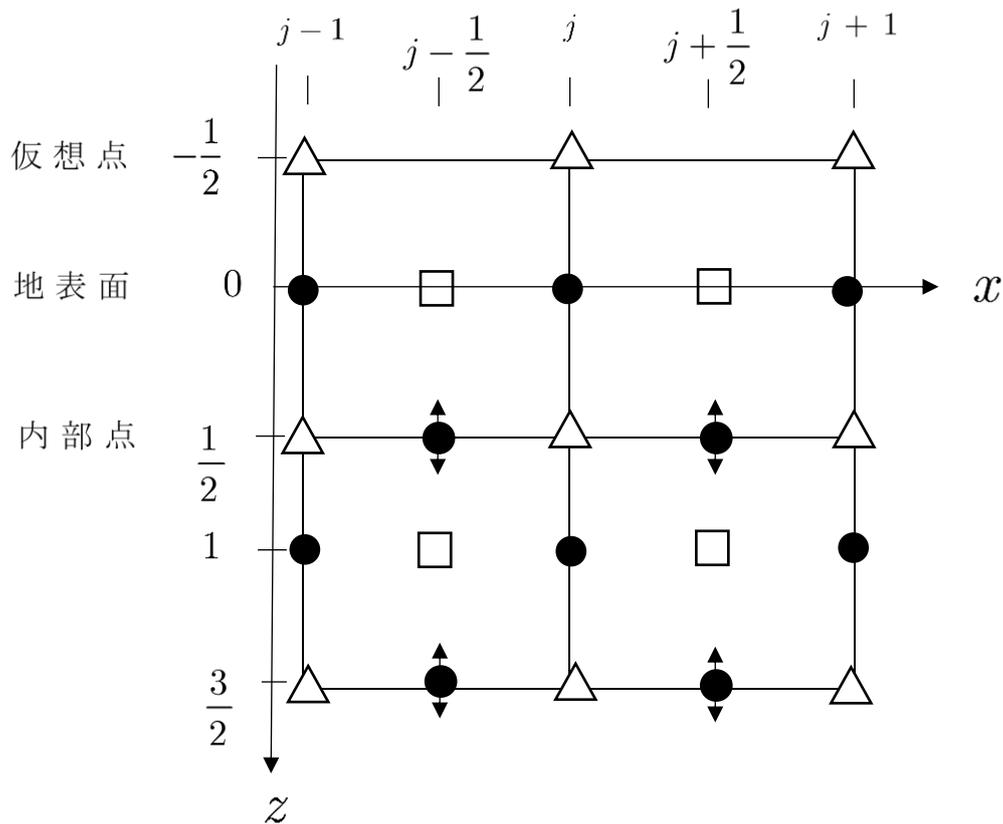


図 7.2-1 地表面の境界条件

鉛直応力は地表面にあるので、差分式では、直接的に次式で与えられる。

$$\sigma_{zz}|_{k=0} = 0 \rightarrow \sigma_{zzj,k=0}^n = 0 \quad (7.2-2a)$$

一方、次式のようにせん断応力は、仮想点と内部点の平均値（中間値）で与えられる。

$$\tau_{xz}\Big|_{k=0} = \frac{\tau_{xz}\Big|_{k=-1/2} + \tau_{xz}\Big|_{k=1/2}}{2} = 0 \rightarrow \tau_{xzj,k=-1/2}^n = -\tau_{xzj,k=1/2}^n \quad (7.2-2b)$$

7.3 剛壁の境界条件

図 7.1-1(b)で示し食い違い格子点において底面 $k = K - 1/2$ に剛壁が配置される場合で説明する。底面 $k = K - 1/2$ には、鉛直方向の速度の格子点があるので、これを次式のように零とすると、鉛直成分の剛壁条件となる。

$$\dot{w}\Big|_{k=K-1/2} = 0 \rightarrow \dot{w}_{j,k=K-1/2}^n = 0 \quad (7.3-1a)$$

水平成分は剛体壁に無いので、次式のように平均値（中間値）の値が零とする。

$$\dot{u}\Big|_{k=K-1/2} = \frac{\dot{u}\Big|_{k=K} + \dot{u}\Big|_{k=K-1}}{2} = 0 \rightarrow \dot{u}_{j,k=K}^n = -\dot{u}_{j,k=K-1}^n \quad (7.3-1b)$$

7.4 吸収境界条件

吸収境界を底面に設置する場合で説明する。4.6 節の 1 次元の吸収境界と同じように P・SV 波の吸収境界条件は、次式のように S 波と P 波の進行波（z 軸方向の下降波あるいは進行波）を対象にして作ることができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{1}{C_S} \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \frac{1}{C_P} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{7.4-1}$$

上式を底面の吸収境界の差分式で表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{\dot{u}_{j,K-1}^{n-1/2} - \dot{u}_{j,K-2}^{n-1/2}}{h} + \frac{1}{C_S} \frac{\dot{u}_{j,K-1}^{n+1/2} - \dot{u}_{j,K-1}^{n-1/2}}{dt} &= 0 \\ \frac{\dot{w}_{j+1/2,K-1/2}^{n-1/2} - \dot{w}_{j+1/2,K-3/2}^{n-1/2}}{h} + \frac{1}{C_P} \frac{\dot{w}_{j+1/2,K-1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{j+1/2,K-1/2}^{n-1/2}}{dt} &= 0\end{aligned}\tag{7.4-2}$$

上式を漸化式で表すと、次式の吸収境界条件が得られる。

$$\dot{u}_{j,K-1}^{n+1/2} = (1 - r_S) \dot{u}_{j,K-1}^{n-1/2} + r_S \dot{u}_{j,K-2}^{n-1/2}\tag{7.4-3a}$$

$$\dot{w}_{j+1/2,K-1/2}^{n+1/2} = (1 - r_P) \dot{w}_{j+1/2,K-1/2}^{n-1/2} + r_P \dot{w}_{j+1/2,K-3/2}^{n-1/2}$$

ここに、

$$r_S = \frac{C_S dt}{h}, \quad r_P = \frac{C_P dt}{h}\tag{7.4-3b}$$

7.5 数値計算例

食い違い格子点の差分式による P・SV 波の数値計算例として、Jiang(2012)による地中のリッカー波外力による波動場を示す。

図 7.5-1 は深さ 500m、長さ 1400m の地表面を有する一様弾性体を示す。ただし、図の中央の底辺近く（深さ 350~368m、長さ 691~709m）に P 波速度が 5000m/s と周辺より硬い 18m 正方形の弾性体を設置している（図 7.5-1 の赤い□）。表 7.5-1 はこの弾性体モデルの物性値を示す。

弾性体中（深さ 250m、長さ 350m）に卓越振動数 30Hz のリッカー波を外力として作用さ、離散化パラメータは次式のものを用いたので、無条件安定である。

$$h = 1\text{m}, \quad dt = 0.0001\text{s}$$
$$r_P = \frac{C_P dt}{h} = \frac{3000 \times 0.0001}{1} = 0.3 < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71 \quad (7.5-1)$$

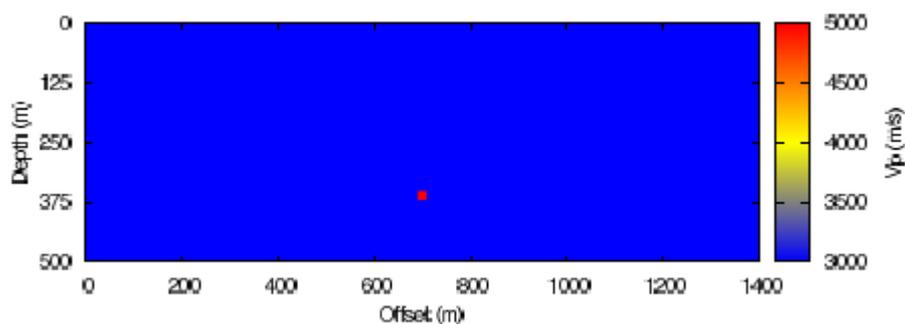


図 7.5-1 18m 正方形の硬い弾性体を含む深さ 500m、長さ 1400m の地表面を有する一様弾性体

表 7.5-1 18m正方形の硬い弾性体と深さ 500m、長さ 1400mの地表面を有する
一様弾性体の物性値

弾性体	P 波速度(m/s)	S 波速度(m/s)	密度(kg/m ³)
硬い弾性体	5000	2886.75	2602.95
周辺弾性体	3000	1732.05	2290.89

図 7.5-2 は、0.04s 毎の鉛直と水平速度成分の波動場を示す。リックカー波外力点から波動が 0.08s までは等円上に広がり、0.12s では、地表面での反射波が下方に伝播している。0.16s では、18m正方形の硬い弾性体で波動が反射している様子が見られる。0.2 s では、地表面での反射と 18m正方形の硬い弾性体での波反射による波動場はきれいに分離して見える。

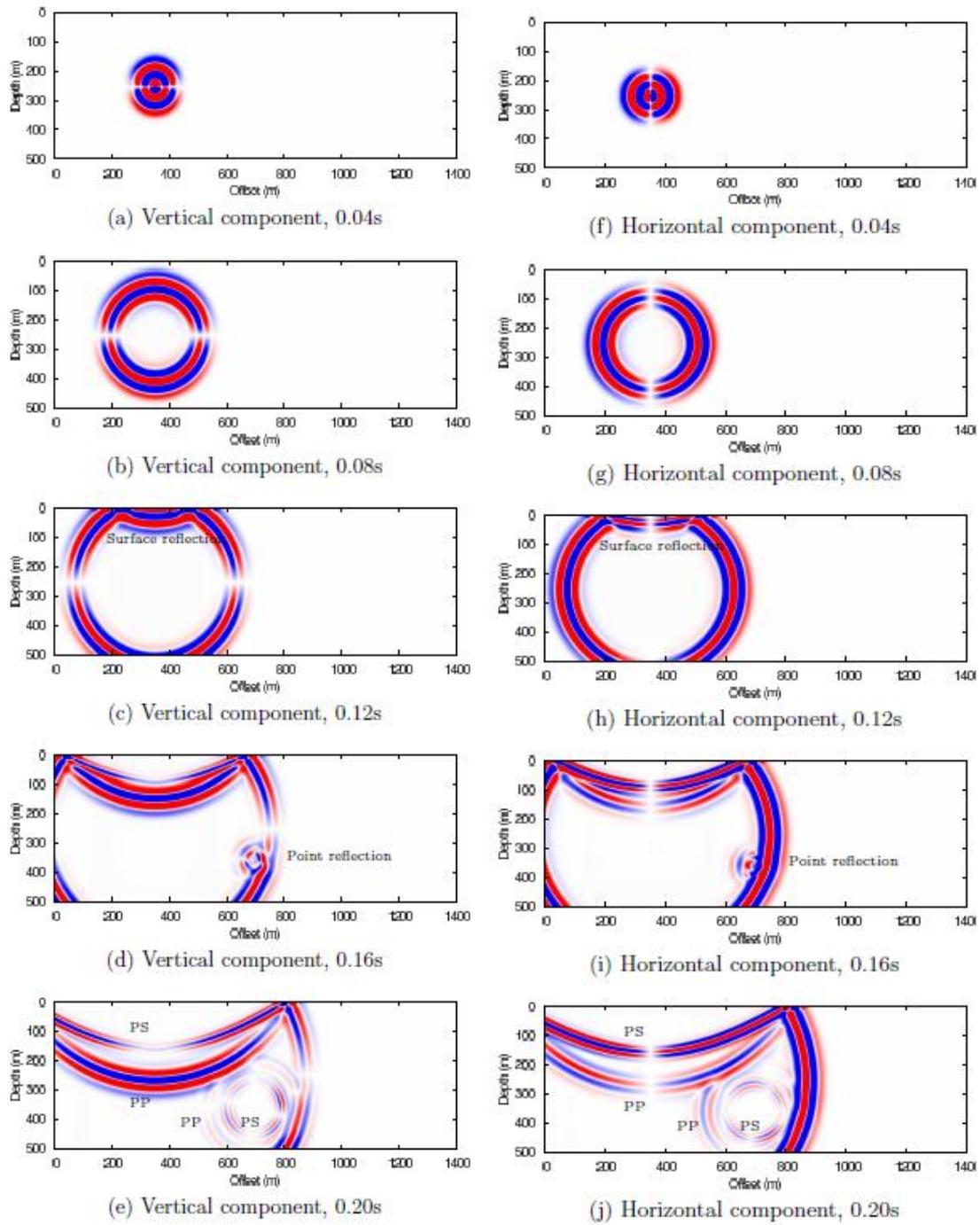


図 7.5-2 リッカー波外力による 0.04s 毎の鉛直 (左)・水平速度 (右) 波動場

8章 3次元波動の食い違い格子点差分式

右手系 3次元直交座標系の 3次元波動方程式の食い違い格子点の差分式を整理し、点震源モデルによる地震動の数値計算例を示す。

8.1 波動方程式の状態方程式表示

右手系 3次元直交座標系の 3次元波動方程式の状態方程式表示は、力のつり合い式から次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x \\ \rho \frac{\partial \dot{v}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y \\ \rho \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z\end{aligned}\tag{8.1-1a}$$
$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

また、応力・歪・変位の関係式より、応力・速度の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\
\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \right) \\
\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) \\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{8.1-1b}$$

8.2 差分式の漸化式

7.1 節と同じように時間軸の食い違い格子点としては、速度では、時間 $(n-1/2, n+1/2)$ 、応力では時間 $(n, n+1)$ を用いる。空間の軸の食い違い格子点は、図 8.2-1 のように構成する。この立方体が一つのユニットとなり全体系の空間が食い違い格子点で離散化される。

このような時間と空間の食い違い格子点を使うと、時間と空間の 2 次精度の差分式から、次式の漸化式が得られる。

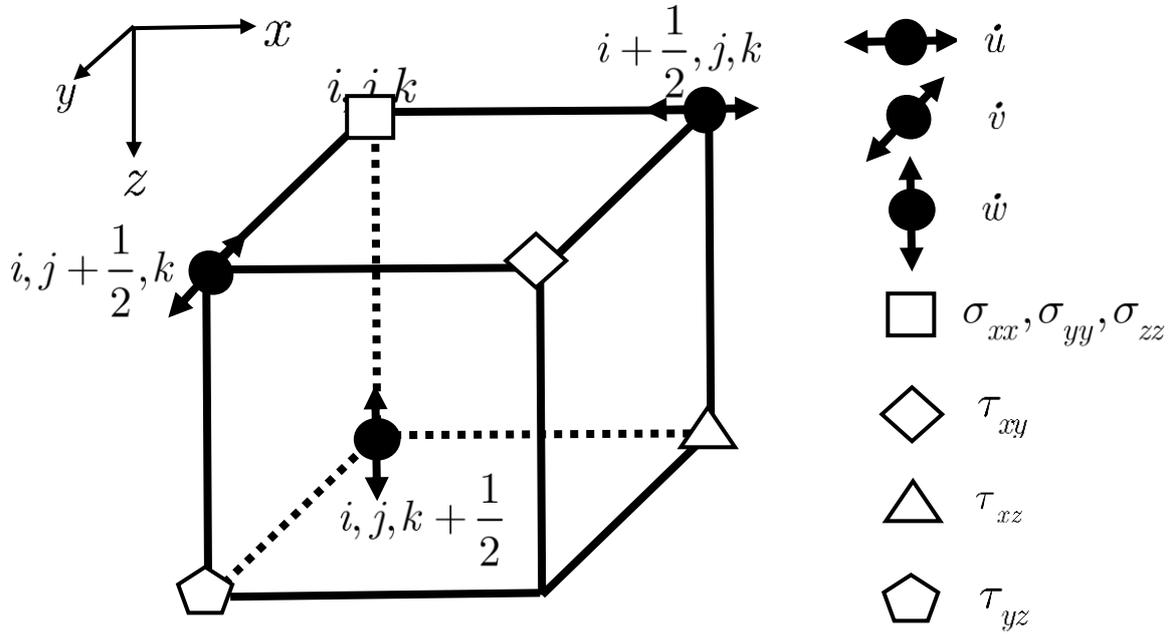


図 8.2-1 食い違い格子点の速度と応力および物性値（ラーメの定数と密度）の評価点

$$\begin{aligned}
 \dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= \dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\rho_{i+1/2,j,k} h} \left(\begin{array}{l} \sigma_{xxi+1,j,k}^n - \sigma_{xxi,j,k}^n + \\ \tau_{xyi+1/2,j+1/2,k}^n - \tau_{xyi+1/2,j-1/2,k}^n + \\ \tau_{xzi+1/2,j,k+1/2}^n - \tau_{xzi+1/2,j,k-1/2}^n \end{array} \right) \\
 \dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} &= \dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + \frac{dt}{\rho_{i,j+1/2,k} h} \left(\begin{array}{l} \tau_{xyi+1/2,j+1/2,k}^n - \tau_{xyi-1/2,j+1/2,k}^n + \\ \sigma_{yyi,j+1,k}^n - \sigma_{xxi,j,k}^n + \\ \tau_{yzi,j+1/2,k+1/2}^n - \tau_{yzi,j+1/2,k-1/2}^n \end{array} \right) \quad (8.2-1a) \\
 \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} &= \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + \frac{dt}{\rho_{i,j,k+1/2} h} \left(\begin{array}{l} \tau_{xzi+1/2,j,k+1/2}^n - \tau_{xzi-1/2,j,k+1/2}^n + \\ \tau_{yzi,j+1/2,k+1/2}^n - \tau_{yzi,j-1/2,k+1/2}^n + \\ \sigma_{yyi,j,k+1}^n - \sigma_{xxi,j,k}^n \end{array} \right) \tau_{ji}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxi,j,k}^{n+1} &= \sigma_{xxi,j,k}^n + \frac{(\lambda + 2\mu)_{i,j,k} dt}{h} (\dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{i,j,k} dt}{h} \left(\dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} \right) \\
\sigma_{yyi,j,k}^{n+1} &= \sigma_{yyi,j,k}^n + \frac{(\lambda + 2\mu)_{i,j,k} dt}{h} (\dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}) (\dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{i,j,k} dt}{h} \left(\dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{i-1/2,j,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} \right) \\
\sigma_{zzi,j,k}^{n+1} &= \sigma_{zzi,j,k}^n + \frac{(\lambda + 2\mu)_{i,j,k} dt}{h} (\dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{i,j,k} dt}{h} \left(\dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{i-1/2,j,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} \right)
\end{aligned} \tag{8.2-1b}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xyi+1/2,j+1/2,k}^{n+1} &= \tau_{xyi+1/2,j+1/2,k}^n + \\
&\quad \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2,k} dt}{h} \left(\dot{u}_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} - \dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{v}_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} \right) \\
\tau_{xzi+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= \tau_{xzi+1/2,j,k+1/2}^n + \\
&\quad \frac{\mu_{i+1/2,j,k+1/2} dt}{h} \left(\dot{u}_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} - \dot{u}_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{w}_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \right)
\end{aligned} \tag{8.2-1c}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yzi,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= \tau_{yzi,j+1/2,k+1/2}^n + \\
&\quad \frac{\mu_{i,j+1/2,k+1/2} dt}{h} \left(\dot{v}_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} - \dot{v}_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} + \right. \\
&\quad \left. \dot{w}_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - \dot{w}_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} \right)
\end{aligned}$$

また、数値計算上の安定性条件は、3次元であること、 $C_S < C_P$ を考慮すると、

次式で与えられる。

$$r_P = C_P \frac{dt}{h} < \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58 \tag{8.2-2}$$

8.3 地表面の境界条件

地表面の鉛直応力とせん断応力は零なので、地表面条件は次式で与えられる。

$$\tau_{zx}\Big|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zy}\Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}\Big|_{z=0} = 0 \quad (8.3-1a)$$

7.2 節の P・SV 波の場合と同じように地表面の上にせん断応力用の仮想点を設ける。この地表面の境界条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_{zxi+1/2,j,k=-1/2}^n &= -\tau_{zxi+1/2,j,k=1/2}^n \\ \tau_{zyi,j+1/2,k=-1/2}^n &= -\tau_{zyi,j+1/2,k=1/2}^n \\ \sigma_{zzj,k=0}^n &= 0 \end{aligned} \quad (8.3-1b)$$

上式は、以下のような考察から求められる。

鉛直応力は地表面にあるので、差分式では、直接的に次式で与えられる。

$$\sigma_{zz}\Big|_{k=0} = 0 \rightarrow \sigma_{zzj,k=0}^n = 0 \quad (8.3-2)$$

一方、次式のようにせん断応力は、仮想点と内部点の平均値（中間値）で与えられる。

$$\begin{aligned} \tau_{zx}\Big|_{k=0} &= \frac{\tau_{zx}\Big|_{k=-1/2} + \tau_{zx}\Big|_{k=1/2}}{2} = 0 \\ \tau_{zy}\Big|_{k=0} &= \frac{\tau_{zy}\Big|_{k=-1/2} + \tau_{zy}\Big|_{k=1/2}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (8.3-3a)$$

上式を図 8.2-1 の食い違い格子点のせん断応力の評価点を考慮して、格子点で表

すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{zxi+1/2,j,k=-1/2}^n &= -\tau_{zxi+1/2,j,k=1/2}^n \\ \tau_{zyi,j+1/2,k=-1/2}^n &= -\tau_{zxi,j+1/2,k=1/2}^n \end{aligned} \quad (8.3-3b)$$

8.4 吸収境界条件

S H 波や P・SV 波の 2 次元波動で用いた平面波の進行波を仮定した吸収境界を用いる。この方法は境界面に垂直に入射する平面波を仮定し、簡単である。

3 次元問題では、Graves (1996) に従って、P 波を吸収境界に垂直な成分に分解して使う。S 波では、吸収境界に平行な成分に分解して使う。吸収境界面の角では、P 波と S 波の平均値を使うものとする。

8.5 震源断層モデルと体積力

3 次元波動方程式の差分式(8.1-1a)において、右辺の単位体積当たりに作用する体積力を導入すると、震源断層による地震波動を計算することができる。1 次元問題や 2 次元問題と同様に体積力は速度成分の格子点に作用させる。

図 8.5-1 はせん断型源断層モデルとその記号を示す。

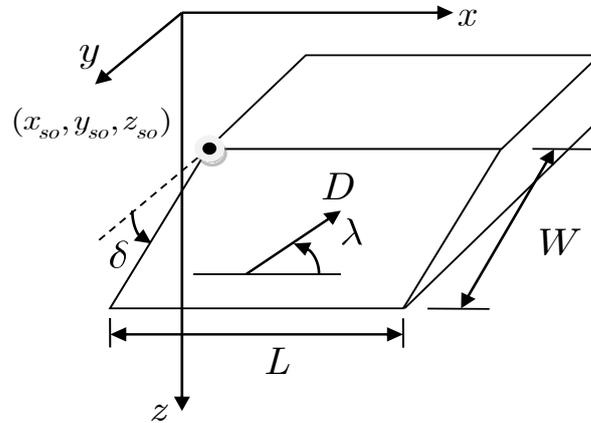


図 8.5-1 せん断型源断層モデルとその記号

ここに、 x 軸は震源断層（長さ L と幅 W ）の走行に設定する。断層上端左端の点は震源位置 (x_{so}, y_{so}, z_{so}) を表す。また、断層面の傾斜角とすべり角を δ, λ とし、平均すべり量を D とする。

このようなせん断型震源モデルと座標を用いると、 j 軸方向に離れた i 軸方向の双力で定義される地震モーメント $M_{ij}(t)$ は、次式で表される（原田・本橋 (2017)）。

$$\begin{pmatrix} M_{xx}(t) \\ M_{xy}(t) \\ M_{xz}(t) \\ M_{yy}(t) \\ M_{yz}(t) \\ M_{zz}(t) \end{pmatrix} = M_0(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \cos \lambda \\ -\cos \delta \cos \lambda \\ -\sin 2\delta \sin \lambda \\ \cos 2\delta \sin \lambda \\ \sin 2\delta \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (8.5-1a)$$

ここに、断層面のせん断剛性率と断層面積を $\mu, S = LW$ とし、すべり時間関 $D(t)$

とすると、地震モーメント時間関は、次式で与えられる。

$$M_0(t) = \mu SD(t) \quad (8.5-1b)$$

最終平均すべり量を $D_0 = D(t \rightarrow \infty)$ とすると、地震モーメントが得られる。

$$M_0 = \mu SD_0 \quad (8.5-1c)$$

地震モーメント $M_{ij}(t)$ の定義に、単位体積あたりに作用する体積力 f_i と食い違い格子点の速度成分に体積力を作用させることを考慮すると、地震モーメントと体積力の関係が次式のように求められる。

体積力 f_x では、

$$\begin{aligned} (f_x h^3)h &= M_{xx}(t) \rightarrow f_x = \frac{M_{xx}(t)}{h^4} \\ (f_x 2h^3)2h &= M_{xy}(t) \rightarrow f_x = \frac{M_{xy}(t)}{4h^4} \\ (f_x 2h^3)2h &= M_{xz}(t) \rightarrow f_x = \frac{M_{xz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-2a)$$

同様に体積力 f_y, f_z では、

$$\begin{aligned} f_y &= \frac{M_{yy}(t)}{h^4}, & f_y &= \frac{M_{xy}(t)}{4h^4}, & f_y &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \\ f_z &= \frac{M_{zz}(t)}{h^4}, & f_y &= \frac{M_{xz}(t)}{4h^4}, & f_y &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-2b)$$

これらの体積力を速度成分格子点に双力として作用させる。これを離散化した格子点 (図 8.2-1) で表現すると、体積力 f_x では、図 8.2-2 のような格子点により、次式のように表される。

地震モーメント $M_{xx}(t)$: (図 8.2-2)

$$f_{xi+1/2,j,k} = \frac{M_{xx}(t)}{h^4}, \quad f_{xi-1/2,j,k} = -\frac{M_{xx}(t)}{h^4} \quad (8.5-3a)$$

地震モーメント $M_{xy}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{xi-1/2,j+1,k} &= \frac{M_{xy}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1/2,j+1,k} &= \frac{M_{xy}(t)}{4h^4} \\ f_{xi-1/2,j-1,k} &= -\frac{M_{xy}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1/2,j-1,k} &= -\frac{M_{xy}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-3b)$$

地震モーメント $M_{xz}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{xi-1/2,j,k+1} &= \frac{M_{xz}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1/2,j,k+1} &= \frac{M_{xz}(t)}{4h^4} \\ f_{xi-1/2,j,k-1} &= -\frac{M_{xz}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1/2,j,k-1} &= -\frac{M_{xz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-3c)$$

同様に体積力 f_y では、図 8.2-3 より、次式のように表される。

地震モーメント $M_{yy}(t)$:

$$f_{yi,j+1/2,k} = \frac{M_{yy}(t)}{h^4}, \quad f_{xi,j-1/2,k} = -\frac{M_{yy}(t)}{h^4} \quad (8.5-4a)$$

地震モーメント $M_{xy}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{xi+1,j-1/2,k} &= \frac{M_{xy}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1,j+1/2,k} &= \frac{M_{xy}(t)}{4h^4} \\ f_{xi-1,j-1/2,k} &= -\frac{M_{xy}(t)}{4h^4}, & f_{yi-1,j+1/2,k} &= -\frac{M_{xy}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-4b)$$

地震モーメント $M_{yz}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{yi,j-1/2,k+1} &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4}, & f_{yi,j+1/2,k+1} &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \\ f_{yi,j-1/2,k-1} &= -\frac{M_{yz}(t)}{4h^4}, & f_{yi,j+1/2,k-1} &= -\frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-4c)$$

体積力 f_z では、図 8.2-4 より、次式のように表される。

地震モーメント $M_{zz}(t)$:

$$f_{zi,j,k+1/2} = \frac{M_{zz}(t)}{h^4}, \quad f_{zi,j,k-1/2} = -\frac{M_{zz}(t)}{h^4} \quad (8.5-5a)$$

地震モーメント $M_{xz}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{zi+1,j,k-1/2} &= \frac{M_{xz}(t)}{4h^4}, & f_{xi+1,j,k+1/2} &= \frac{M_{xz}(t)}{4h^4} \\ f_{zi-1,j,k-1/2} &= -\frac{M_{xz}(t)}{4h^4}, & f_{zi-1,j,k+1/2} &= -\frac{M_{xz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-5b)$$

地震モーメント $M_{yz}(t)$:

$$\begin{aligned} f_{zi,j+1,k-1/2} &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4}, & f_{zi,j+1,k+1/2} &= \frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \\ f_{zi,j-1,k-1/2} &= -\frac{M_{yz}(t)}{4h^4}, & f_{zi,j-1,k+1/2} &= -\frac{M_{yz}(t)}{4h^4} \end{aligned} \quad (8.5-5c)$$

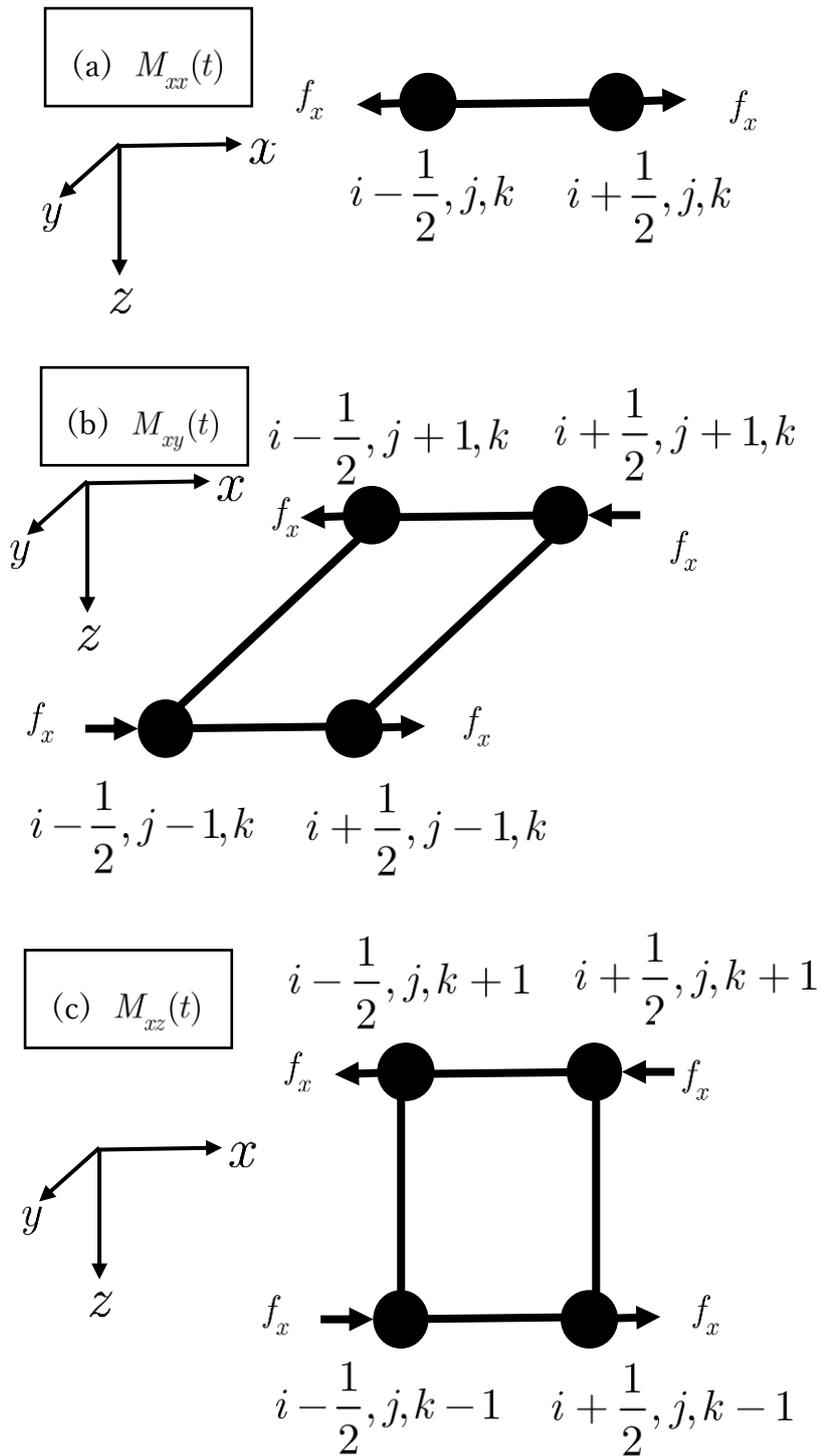


図 8.2-2 体積力 f_x と地震モーメント時間関数 $M_{xx}(t)$, $M_{xy}(t)$, $M_{xz}(t)$ の関係

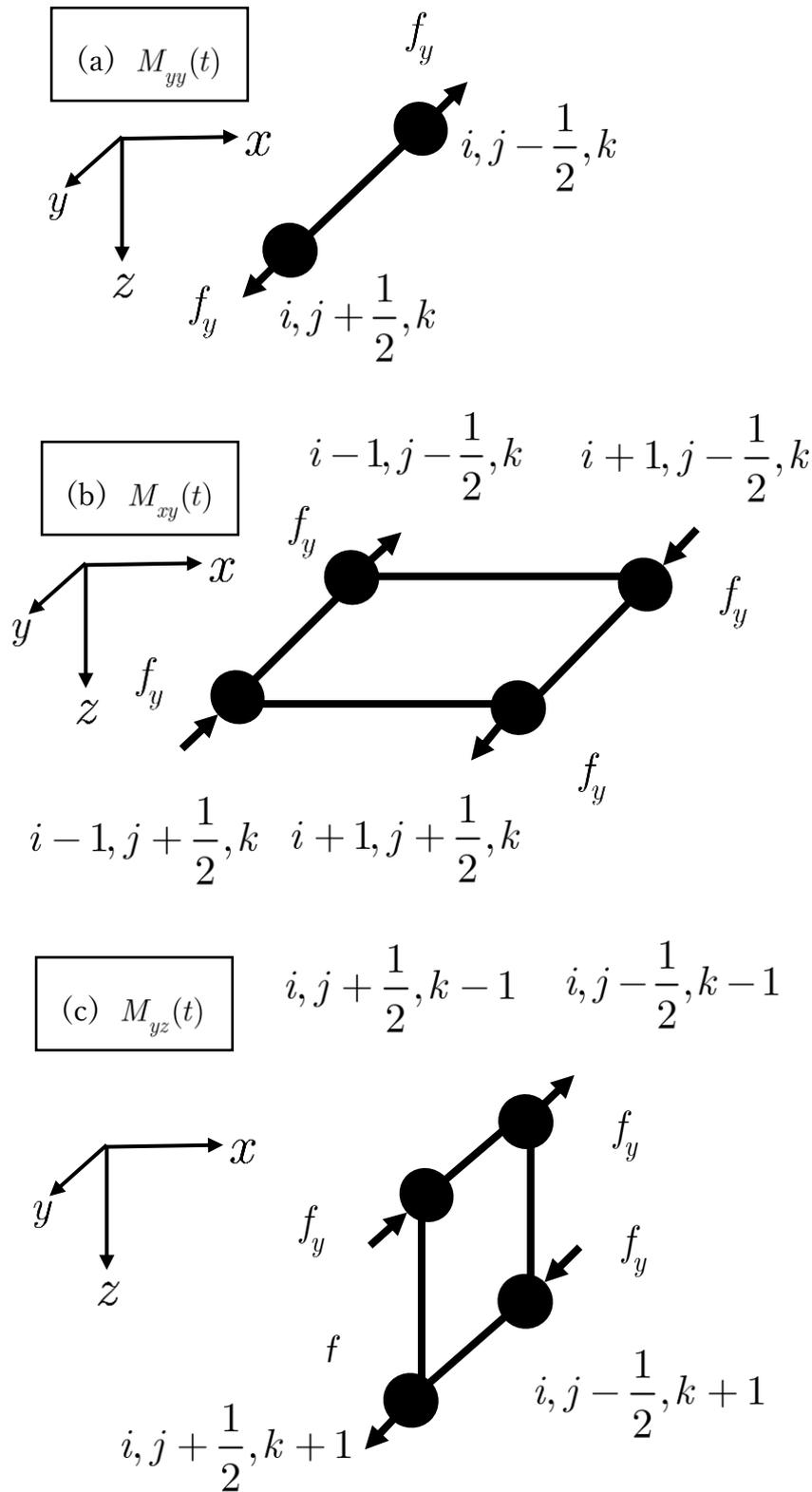


図 8.2-3 体積力 f_y と地震モーメント時間関数 $M_{yy}(t)$, $M_{xy}(t)$, $M_{yz}(t)$ の関係

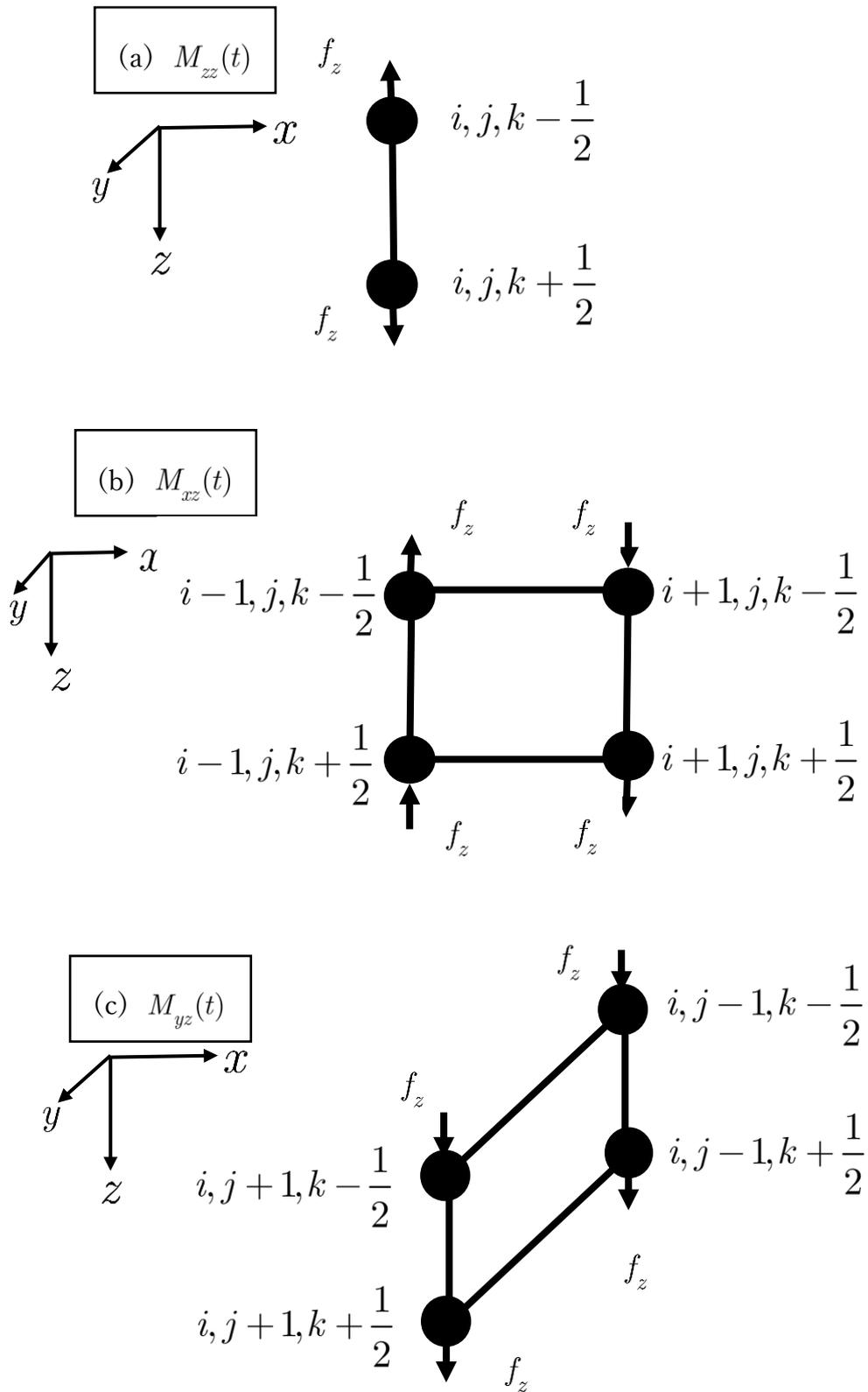


図 8.2-4 体積力 f_z と地震モーメント時間関数 $M_{zz}(t)$, $M_{xz}(t)$, $M_{yz}(t)$ の関係

8.6 数値計算例

3次元問題に食い違い格子点の差分式を適用して数値解析をする場合、計算機メモリーの有効的使用法が必要になる。Graves(1996)は計算機メモリーの有効な使用法を使い、3次元地震動の計算をしている。ここでは、Graves(1996)の点震源による半無限弾性体地表面の地震動波形の計算結果を示す。

深さ 2.5km に点震源を設定し、そのモデルのパラメータは、表 8.6-1 に示す。

表 8.6-1 点震源パラメータ

地震モーメント (Seismic Moment)	$M_0 = 10^{23} \text{ dyn} \cdot \text{cm} (=10^{16} \text{ N} \cdot \text{m})$
震源速度関数 (Slip Velocity Time Function)	時間幅 1 s の 3 角形波形
断層走向角 (Strike Angle)	$\phi = 0^\circ$
断層傾斜角 (Dip Angle)	$\delta = 90^\circ$
断層すべり角 (Slip Angle)	$\lambda = 0^\circ$

半無限弾性体の物性値と離散化パラメータは、次式の値を用いた。

$r_P = 0.4 < 0.58$ なので、無条件安定である。

$$\begin{aligned}
C_P &= 4000\text{m/s}, \quad C_S = 2300\text{m/s}, \quad \rho = 1800\text{kg/m}^3 \\
h &= 250\text{m}, \quad dt = 0.025\text{s} \\
r_P &= \frac{C_P dt}{h} = \frac{4000 \times 0.025}{250} = 0.4 < \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58
\end{aligned}
\tag{8.6-1}$$

観測点は、点震源から 10 kmの地表面とする。その直角座標点は、次式で与えられる。

$$x = 10 \cos 45^\circ = 7.071\text{km}, \quad y = 10 \sin 45^\circ = 7.071\text{km}
\tag{8.6-21}$$

図 8.6-2 は、点震源から 10 kmの地表面の鉛直・半径方向・接線方向の速度波形を実線で示す。点線は波数積分法で求めた速度波形である。両者は良く一致している。

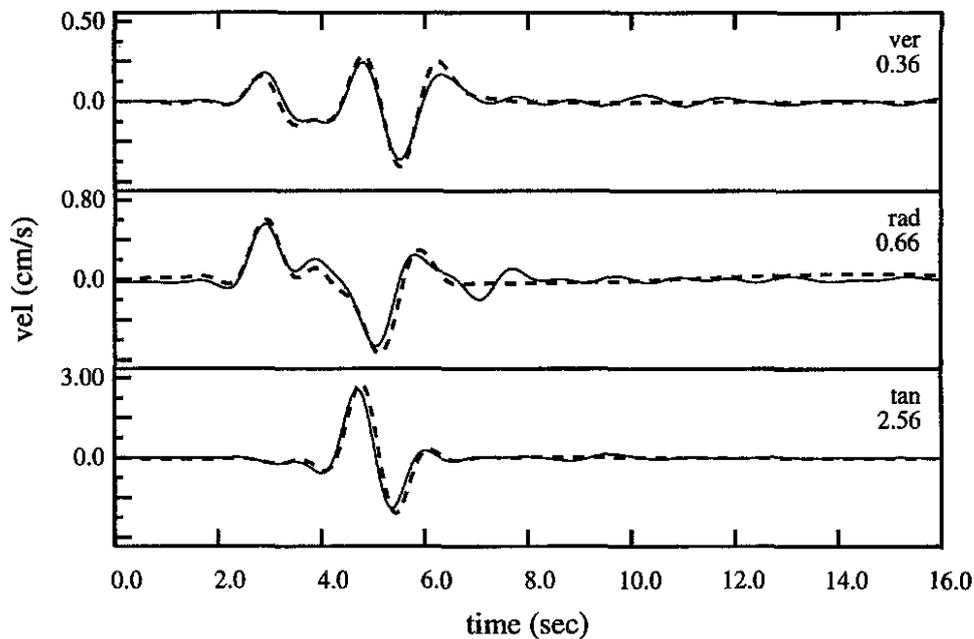


図 8.6-2 点震源モデルによる地表面の鉛直・半径方向・接線方向の速度波形 (差分法：実線、波数積分法：破線)

参考文献

1章から4章

田辺行人，高見穎郎監修/高見穎郎・河村哲也（1994）：偏微分方程式の差分解法，東京大学出版会.

盛川仁・山中浩明（2019）：地盤と地盤震動～観測から数値解析まで～，朝倉書店.

原田隆典，本橋英樹（2021）：土木環境数学 I～1 変数と多変数関数の微分と積分～，現代図書.

原田隆典，本橋英樹（2021）：土木環境数学 II～時間と振動数・波数領域による定数係数の微分方程式と波動方程式の解法～，現代図書.

5章と6章

原田隆典，本橋英樹（2021）：フーリエ変換と応用～地震動・ランダム波動場の解析と数値計算法～，現代図書.

原田隆典，本橋英樹（2020）：入門・数理地震工学～生産・社会インフラ施設の地震・津波対策の基礎知識と数学的方法～，技報堂出版.

原田隆典, 本橋英樹 (2017) : 入門・弾性波動理論～震源断層」・多層弾性体の地震動や地盤震動問題への応用～, 現代図書.

Boore, D.M. (1972) : Finite difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials, In Bolt, B.A. (editor), Seismic Waves and Earth Oscillations, Methods in Computational Physics, Vol. 11), New York, Academic Press.

Aki, K. and Richards, P.G. (1980) : Quantitative Seismology, Theory and Methods, W.H. Freeman and Company.

Jiang, Z. (2012) : Elastic wave modelling and reverse-time migration by a staggered-grid finite-difference method, PhD Thesis , Department of Geoscience, Calgary, ALBERT.

7章から8章

原田隆典, 本橋英樹 (2017) : 入門・弾性波動理論～震源断層」・多層弾性体の地震動や地盤震動問題への応用～, 現代図書.

Jiang, Z. (2012) : Elastic wave modelling and reverse-time migration by a staggered-grid finite-difference method, PhD Thesis , Department of Geoscience, Calgary, ALBERT.

Graves, R.W. (1996) : Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered grid finite differences, Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 86, pp.1091-1106.