

直交座標系と 2 重フーリエ変換を用いた水平成層弾性体の 動的グリーン関数とその検証

Dynamic Green's functions for layered half space by using 3 dimensional Cartesian coordinates / twofold Fourier transform
and their verification

原田隆典*・松田良介**・吉田一博***・粟田勇志**
Takanori Harada, Ryosuke Matsuda, Kazuhiro Yoshida, and Yushi Awada

*工博 宮崎大学教授, 工学部土木環境工学科 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

**宮崎大学大学院学生 工学研究科修士課程土木環境工学専攻 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

***工博 清水建設 (株) 技術研究所 (〒135-0044 東京都江東区越中島 3 丁目 4 番 17 号)

This paper presents the dynamic Green's functions by the use of the stiffness matrix method for layered elastic half space in Cartesian coordinates. The presented Green's functions in Cartesian coordinates are represented by the two fold Fourier integral, and then the 2 Dimensional Fast Fourier Transform (2DFFT) can be effectively used to calculate the dynamic Green's functions. To verify numerically the validity of the presented Green's functions in Cartesian coordinates, the numerical examples of comparison with the results of the method of Luco and Apsel, and those of the numerical method using the FEM for a layered elastic half space are shown.

Key Words: Dynamic Green's functions for layered half space, Stiffness matrix method, Cartesian coordinates, Cylindrical coordinates

1. はじめに

水平成層弾性体における動的グリーン関数は、震源断層による地震動波形の計算や基礎の運動に対する地盤からの動的反力特性を表す地盤復素ばね(実数部がばね力、虚数部は地下逸散減衰威力)等に利用される。最近では、有限要素法、差分法、境界要素法等の数値計算手法により地震動波形や地盤復素ばね等が計算できるようになったが、実測波形や実験結果を用いた逆解析によって地盤構造や地盤物性値を推定する場合においては、有限要素法等の数値計算手法よりも動的グリーン関数を用いる解析的手法の方が効率的である場合が多いのが現状である(例えば¹⁾)。

水平成層弾性体の 3 次元動的グリーン関数の伝統的定式化においては、Lamb (1906)²⁾の研究に従い、円筒座標系を用いる方法が広く使われる。この方法では、3 次元動的グリーン関数はベッセル関数と SH 波、P・SV 波による水平成層弾性体の変位・応力ベクトル³⁾を含む波数に関する 1 重積分で与えられる(例えば⁴⁾)。そして、水平成層弾性体の変位・応力ベクトル³⁾は通常、伝達行列法⁵⁾、反射・透過行列法⁶⁾によって求められる。Kausel and Roësset (1981)⁷⁾は伝達行列法⁵⁾の数値計算上の不安定性を改良した剛性行列法を提案し、変位・応力ベクトルを剛性行列法によって求め、円筒座標系による 3 次元動的グリーン関数を求める方法

を示している。

円筒座標系を用いる方法に対して、Bouchon (1979)⁸⁾は直交座標系と 3 重フーリエ変換を用いて水平成層弾性体の 3 次元動的グリーン関数を求め、伝達行列法⁵⁾と組み合わせ、水平成層弾性体中の震源断層による地震波の計算法を示している(離散化波数積分法と呼ばれる)。原田ら(2006)⁹⁾は直交座標系と剛性行列法による震源断層を含む水平成層弾性体の波動解析法を提案している。原田ら(2006)⁹⁾の方法は、数値計算上の安定性や、簡単な振動数・波数領域の代数計算(技術者に馴染み深い剛性方程式を解く計算)から、1 回の計算で離散化した全ての深さ方向と等間隔の平面内変位が一举に求められる特徴があり、多層弾性体内の波動場の様子を観測するために便利である。

以上のように水平成層弾性体の 3 次元動的グリーン関数は、円筒座標系と直交座標系を用いる 2 つの方法で定式化されているが、両者の定式化はそれぞれの座標系における波動方程式から出発しているため、これまでは別々の定式化が成されており、両座標系における動的グリーン関数の関係はあまり明確ではなかった。このため、原田ら(2011)¹⁰⁾は直交座標系と剛性行列を用いた水平成層弾性体の 3 次元動的グリーン関数から、伝統的な円筒座標系の波動方程式から求められる 3 次元動的グリーン関数を求め、直交座標系と円筒座標系による両者の動的グリーン関数の関係

を明確にした。この論文では、数値計算例として、半無限弾性体上の鉛直荷重と水平荷重による3次元動的グリーン関数を取り上げ、円筒座標系によるLamb (1904)²⁾、妹沢 (1929)¹¹⁾、田治見 (1968)¹²⁾の数値解を求めた吉田 (1994)¹³⁾の結果が、直交座標系の定式化による波数に関する高速2重フーリエ変換 (2DFFT) により効率よく求められることを示すにとどまっている。

そこで、本論文では、多層弾性体への適用方法を明示するために、半無限弾性体上に乗る1層弾性体を対象として、地表と地中に作用する水平荷重と鉛直荷重による各点の動的グリーン関数を、直交座標系と剛性行列を用いた水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の定式化から求める具体式を例示し、その2DFFTによる数値計算結果をLuco and Apsel (1983)⁹⁾による円筒座標系と反射・透過行列法並びに、軸対称有限要素法による数値解析結果と比較し、本手法の検証例を示すものとする。

2. 直交座標系と剛性行列による3次元水平成層弾性体の動的グリーン関数の定式化の整理

本章の内容は、原田ら(2011)¹⁰⁾と重複する部分もあるが、3章で示す半無限弾性体上に乗る1層弾性体における動的グリーン関数を求める手順を理解するために必要な定式を整理するものである。

2.1 直交座標系と剛性行列による3次元水平成層弾性体の波動解析法の概要

ここでは、直交座標系と円筒座標系の動的グリーン関数の定式を整理するために必要となる剛性行列と直交座標系による水平成層弾性体の波動解析の基礎式⁹⁾の概要を説明する。

図-1に示すような3次元水平成層弾性体 (図では半無限弾性体上の2層の3次元水平成層弾性体を示す) における時間・空間領域の変位は、次式のような3重フーリエ変換によって表すことができる。なお、式(1)では、振動数・波数領域の変位がフーリエ変換されたことを示すための特別な記号を回避して同じ記号を使っていることに注意が必要である。時間・空間領域の変位か振動数・波数領域の変位かの区別は引数の違いで表わしている。

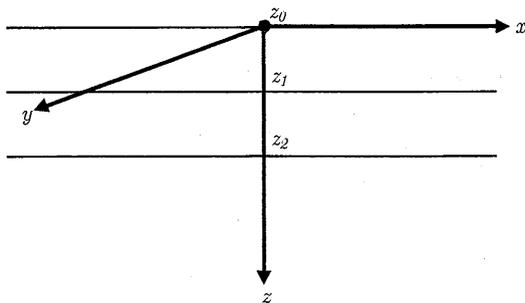


図-1 3次元水平成層弾性体および直交座標系とその記号 (半無限弾性体上の2層弾性体)

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \end{pmatrix} e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)} d\kappa_x d\kappa_y d\omega \quad (1)$$

ここに、振動数・波数領域の変位は、次式によって求められる。

$$\begin{pmatrix} u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \kappa_x & -\kappa_y & 0 \\ \kappa_y & \kappa_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(\kappa, z, \omega) \\ v_0(\kappa, z, \omega) \\ w_0(\kappa, z, \omega) \end{pmatrix} \quad (2)$$

上式は、図-2の左図に示すようにz軸周りに座標軸を θ' 回転させ、調和平面波 $\exp[i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)]$ の伝播方向に x' 軸を設定した新座標系 $(x', y', z' = z)$ におけるSH波成分 $v_0(\kappa, z, \omega)$ とP・SV波成分 $u_0(\kappa, z, \omega)$ 、 $w_0(\kappa, z, \omega)$ の関係を表している。

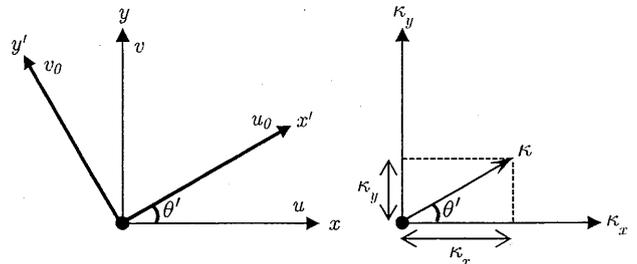


図-2 直交座標系 (x, y, z) と新直交座標系 $(x', y', z' = z)$ と回転角 θ' および波数の関係

上式で、 κ は x' 軸方向の波数を表す。この波数は、直交座標 (x, y, z) の x, y 軸方向の波数 κ_x, κ_y および回転角 θ' と次式のような関係にある (図-2左図参照)。

$$\kappa_x = \kappa \cos \theta', \kappa_y = \kappa \sin \theta' \rightarrow \kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \quad (3)$$

このように新座標系を設定すると、調和平面波は、次式のように波数 κ と振動数 ω の1次元調和波として表される。

$$e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)} = e^{i(\kappa(x \cos \theta' + y \sin \theta') - \omega t)} = e^{i(\kappa x' - \omega t)} \quad (4)$$

新座標系 $(x', y', z' = z)$ における y' 軸方向のSH波成分 $v_0(z) \equiv v_0(\kappa, z, \omega)$ と、 x' および z 軸方向のP・SV波成分 $u_0(z) \equiv u_0(\kappa, z, \omega)$ 、 $w_0(z) \equiv w_0(\kappa, z, \omega)$ は、次式の剛性方程式 (連立1次方程式) を解いて求めることができる。

SH 波成分：

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)SH} & K_{12}^{(1)SH} & 0 \\ K_{21}^{(1)SH} & K_{22}^{(1)SH} + K_{11}^{(2)SH} & K_{12}^{(2)SH} \\ 0 & K_{21}^{(2)SH} & K_{22}^{(2)SH} + K_{half}^{SH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0(z_0) \\ v_0(z_1) \\ v_0(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{y'}(z_0) \\ q_{y'}(z_1) \\ q_{y'}(z_2) \end{pmatrix} \quad (5a)$$

ここに、 $K_{ij}^{(n)SH}$ 、 K_{Half}^{SH} は、それぞれ対称行列であり、第 n 層と半無限弾性体の剛性行列を表す。具体式は原田他(1999)¹⁴⁾、原田(2004)¹⁵⁾に記述されている。 $q_{y'}(z_m) \equiv q_{y'}(\kappa, z_m, \omega)$ は深さ z_m に作用する振動数・波数領域の外力を表す。

P・SV 波成分：

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)P-SV} & K_{12}^{(1)P-SV} + K_{11}^{(2)P-SV} & 0 \\ K_{21}^{(1)P-SV} & K_{22}^{(1)P-SV} + K_{11}^{(2)P-SV} & K_{12}^{(2)P-SV} \\ 0 & K_{21}^{(2)P-SV} & K_{22}^{(2)P-SV} + K_{half}^{P-SV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(z_0) \\ iw_0(z_0) \\ u_0(z_1) \\ iw_0(z_1) \\ u_0(z_2) \\ iw_0(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{x'}(z_0) \\ iq_{z'}(z_0) \\ q_{x'}(z_1) \\ iq_{z'}(z_1) \\ q_{x'}(z_2) \\ iq_{z'}(z_2) \end{pmatrix} \quad (5b)$$

ここに、第 n 層と半無限弾性体の剛性行列は 4 行 4 列と 2 行 2 列の対称行列で表され、具体式は原田他(1999)¹⁴⁾、原田(2004)¹⁵⁾に記述されている。また、 $q_{x'}(z_m) \equiv q_{x'}(\kappa, z_m, \omega)$ 、 $q_{z'}(z_m) \equiv q_{z'}(\kappa, z_m, \omega)$ は深さ z_m に作用する振動数・波数領域の外力を表す。P・SV 波成分では、剛性行列を対称とするために、式(5b)のように z 軸方向の変位と荷重に虚数単位 i が必要となる。

2.2 直交座標系と剛性行列による 3 次元水平成層弾性体の波動解析法に基づくグリーン関数

グリーン関数とは、点 (x_{so}, y_{so}, z_{so}) に単位力積の衝撃力 $\delta(x - x_{so})\delta(y - y_{so})\delta(z - z_{so})\delta(t)$ が作用した時に点 (x, y, z) に生じる変位を表す関数である。この衝撃力は振動数・波数領域では、 $z = z_{so}$ に作用する単位振幅の調和平面波 $\exp[i\{\kappa_x(x - x_{so}) + \kappa_y(y - y_{so}) - \omega t\}]$ の外力として表される。

また、直交座標 (x, y, z) と新座標 $(x', y', z' = z)$ の間には、

次式のような幾何学的関係式が成立する。

$$\begin{pmatrix} x' - x'_{so} \\ y' - y'_{so} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{so} \\ y - y_{so} \end{pmatrix} \quad (6)$$

したがって、 $z = z_{so}$ に作用する単位振幅の調和平面波 $\exp[i\{\kappa_x(x - x_{so}) + \kappa_y(y - y_{so}) - \omega t\}]$ は、新座標では、次式のように $z = z_{so}$ に作用する単位振幅の 1 次元調和波外力として表すことができる (式(4)を参照)。

$$e^{i[\kappa_x(x - x_{so}) + \kappa_y(y - y_{so}) - \omega t]} = e^{i[\kappa(x' - x'_{so}) - \omega t]} \quad (7)$$

ここで、新座標系における SH 波と P・SV 波による振動数・波数領域のグリーン関数は、 $z = z_{so}$ に作用する単位振幅の 1 次元調和波外力による座標点 (x', z') の変位であるため、この振動数・波数領域のグリーン関数は、次式のように SH 波では 1 種類、P・SV 波では 4 種類の合計 5 種類のグリーン関数が存在することになる。

SH 波のグリーン関数：

$$G_{y'y'}(z; z_{so}) \equiv G_{y'y'}(\kappa, z, \omega; z_{so}) \quad (8a)$$

P・SV 波のグリーン関数：

$$\begin{aligned} G_{x'x'}(z; z_{so}) &\equiv G_{x'x'}(\kappa, z, \omega; z_{so}) \\ G_{zx'}(z; z_{so}) &\equiv G_{zx'}(\kappa, z, \omega; z_{so}) \\ G_{x'z'}(z; z_{so}) &\equiv G_{x'z'}(\kappa, z, \omega; z_{so}) \\ G_{zz}(z; z_{so}) &\equiv G_{zz}(\kappa, z, \omega; z_{so}) \end{aligned} \quad (8b)$$

ここに、 $G_{k'l'}(z; z_{so})$ は $z = z_{so}$ に作用する l' 軸方向の単位振幅の 1 次元調和波外力による座標点 (x', z') の k' 軸方向の変位を表す。

ここで、 $x', y', z' = z$ 軸方向に振幅 $q_{x'}(z_{so})$ 、 $q_{y'}(z_{so})$ 、 $q_z(z_{so})$ の 1 次元調和波外力が作用する時の点 (x', z') の変位は、5 つのグリーン関数を使うと次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \\ w_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{so}) & 0 & G_{x'z'}(z; z_{so}) \\ 0 & G_{y'y'}(z; z_{so}) & 0 \\ G_{zx'}(z; z_{so}) & 0 & G_{zz}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x'}(z_{so}) \\ q_{y'}(z_{so}) \\ q_z(z_{so}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

また、新座標系と元の直交座標系における荷重の間には、幾何学的関係より次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} q_{x'}(z_{so}) \\ q_{y'}(z_{so}) \\ q_z(z_{so}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' & 0 \\ -\sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x(z_{so}) \\ q_y(z_{so}) \\ q_z(z_{so}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(2)に式(9)と式(10)を代入して整理すると、直交座標系 (x, y, z) における変位と荷重 (q_x, q_y, q_z) の関係が次式のよ
うに求められる $(u(z) \equiv u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega), v(z) \equiv v(\kappa_x, \kappa_y,$
 $z, \omega), w(z) \equiv w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega))$.

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{xx}(z; z_{so}) & G_{xy}(z; z_{so}) & G_{xz}(z; z_{so}) \\ G_{yx}(z; z_{so}) & G_{yy}(z; z_{so}) & G_{yz}(z; z_{so}) \\ G_{zx}(z; z_{so}) & G_{zy}(z; z_{so}) & G_{zz}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x(z_{so}) \\ q_y(z_{so}) \\ q_z(z_{so}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $G_{kl}(z; z_{so}) \equiv G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so})$ は l 軸
方向の単位荷重による k 軸方向の変位 (グリーン関数) を
表わす。

以上をまとめると、3次元水平成層弾性体におけるグ
リーン関数の表現式は以下ようになる。

$$g_{kl}(x, y, z, t; x_{so}, y_{so}, z_{so}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so}) \times e^{i[\kappa_x(x-x_{so}) + \kappa_y(y-y_{so}) - \omega t]} d\kappa_x d\kappa_y d\omega \quad (12a)$$

また、振動数領域のグリーン関数は、

$$g_{kl}(x, y, z, \omega; x_{so}, y_{so}, z_{so}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so}) \times e^{i[\kappa_x(x-x_{so}) + \kappa_y(y-y_{so})]} d\kappa_x d\kappa_y \quad (12b)$$

ここに、 $G_{kl}(z; z_{so}) \equiv G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so})$ は式(8)
で与えられる剛性行列による2次元問題である P・SV 波
と SH 波の2次元水平成層弾性体の5つのグリーン関数を
以下の式に代入して求められる。なお、5つのグリーン関
数 $G_{k'l'}(z, z_{so})$ は、式(5a)と式(5b)の剛性方程式において、
 $z = z_{so}$ の外力項 q_l を1とおき、剛性方程式を解いて深さ
 z の変位として求められる(3章に示す半無限弾性体上の1
層弾性体の場合を参照)。

(1) x 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xx}, G_{yx}, G_{zx} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xx}(z; z_{so}) \\ G_{yx}(z; z_{so}) \\ G_{zx}(z; z_{so}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ \kappa_x \kappa_y & -\kappa_x \kappa_y & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{so}) \\ G_{y'y'}(z; z_{so}) \\ G_{zz'}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \quad (13a)$$

(2) y 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xy}, G_{yy}, G_{zy} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xy}(z; z_{so}) \\ G_{yy}(z; z_{so}) \\ G_{zy}(z; z_{so}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa^2} \begin{pmatrix} \kappa_x \kappa_y & -\kappa_x \kappa_y & 0 \\ \kappa_y^2 & \kappa_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \kappa_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{so}) \\ G_{y'y'}(z; z_{so}) \\ G_{zz'}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \quad (13b)$$

(3) z 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xz}, G_{yz}, G_{zz} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xz}(z; z_{so}) \\ G_{yz}(z; z_{so}) \\ G_{zz}(z; z_{so}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \kappa_x & \kappa_y & 0 \\ \kappa_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'z'}(z; z_{so}) \\ 0 \\ G_{zz'}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \quad (13c)$$

3. 剛性行列とフーリエ変換による3次元1層弾性体の内部荷重および地中荷重による動的グリーン関数の数値計算例とその検証例

2章において動的グリーン関数を直交座標系と剛性行列
および2重フーリエ変換を用いて求める式(式(12b)と式
(13))を示した。ここでは、図-3に示すような半無限弾
性体上の1層弾性体の表面および弾性体内部に荷重点を
仮定した時の動的グリーン関数を計算例として取り上げ、
本論文の方法の具体式を示し、2重フーリエ変換(式(12b))
から求めた動的グリーン関数を、Luco and Apsel (1983)⁹⁾
による円筒座標系と反射・透過行列法並びに、軸対称有限要
素法による数値解析結果と比較し、本手法の検証例を示す
ものとする。

3.1 剛性行列による3次元1層弾性体の内部荷重点1による動的グリーン関数

動的グリーン関数を求めるためには、式(8)で示す SH 波
と P・SV 波による5つの動的グリーン関数が必要となる。
この5つの動的グリーン関数を式(13)に代入して、これを
式(12b)の波数に関する2重フーリエ変換により、振動数領
域のグリーン関数 $g_{kl}(x, y, z, \omega; x_{so}, y_{so}, z_{so})$ が求まる。

ここでは、図-3に示すような半無限弾性体上の1層弾
性体の表面(荷重点1)に作用する単位振幅の調和波の荷
重に対する振動数・波数領域のグリーン関数を示す。

この節の内部荷重の場合、図-3の荷重点より、式(12b)
と式(13)において、 $x_{so} = y_{so} = 0, z_{so} = z_0$ となり、式
(5)の剛性方程式より、次式のように求められる。なお、以
下の式において剛性行列の具体式は省略するが文献(14)、

15)のものを用いている。

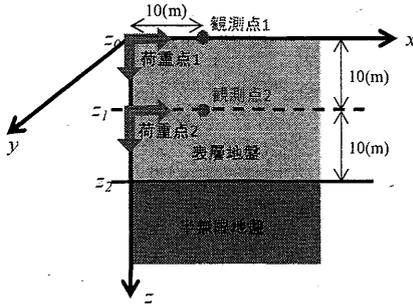


図-3 解析モデルと荷重点と観測点の位置関係

(1) SH波のグリーン関数：

この場合、式(5a)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{SH} \mathbf{G}_{y'y'}(z_j; z_0) = \mathbf{q}_{SH}(z_j; z_0) \quad (14a)$$

ここに、 \mathbf{K}_{SH} は式(5a)左辺の剛性行列を表す。また、

$$\mathbf{G}_{y'y'}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} G_{y'y'}(z_0; z_0) \\ G_{y'y'}(z_1; z_0) \\ G_{y'y'}(z_2; z_0) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{SH}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14b)$$

(2) P・SV波のグリーン関数：

x' 軸方向の荷重の場合：

この場合、式(5b)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{PSV} \mathbf{G}_{k'x'}(z_j; z_0) = \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_0) \quad (15a)$$

ここに、 \mathbf{K}_{PSV} は式(5b)左辺の剛性行列を表す。また、

$$\mathbf{G}_{k'x'}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z_0; z_0) \\ iG_{zx'}(z_0; z_0) \\ G_{x'x'}(z_1; z_0) \\ iG_{zx'}(z_1; z_0) \\ G_{x'x'}(z_2; z_0) \\ iG_{zx'}(z_2; z_0) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15b)$$

z 軸方向の荷重の場合：

この場合、式(5b)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{PSV} \mathbf{G}_{k'z}(z_j; z_0) = \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_0) \quad (16a)$$

ここに、 \mathbf{K}_{PSV} は式(5b)左辺の剛性行列を表す。また、

$$\mathbf{G}_{k'z}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} G_{x'z}(z_0; z_0) \\ iG_{zz}(z_0; z_0) \\ G_{x'z}(z_1; z_0) \\ iG_{zz}(z_1; z_0) \\ G_{x'z}(z_2; z_0) \\ iG_{zz}(z_2; z_0) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16b)$$

3.2 剛性行列による3次元1層弾性体の内部荷重点2による動的グリーン関数

この節の内部荷重の場合、図-3の荷重点より、式(12b)と式(13)において、 $x_{s0} = y_{s0} = 0, z_{s0} = z_1$ となり、式(5)の剛性方程式より、次式のように求められる。

(1) SH波のグリーン関数：

この場合、式(5a)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{SH} \mathbf{G}_{y'y'}(z_j; z_1) = \mathbf{q}_{SH}(z_j; z_1) \quad (17a)$$

ここに、 \mathbf{K}_{SH} は式(5a)左辺の剛性行列を表す。また、

$$\mathbf{G}_{y'y'}(z_j; z_1) = \begin{pmatrix} G_{y'y'}(z_0; z_1) \\ G_{y'y'}(z_1; z_1) \\ G_{y'y'}(z_2; z_1) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{SH}(z_j; z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17b)$$

(2) P・SV波のグリーン関数：

x' 軸方向の荷重の場合：

この場合、式(5b)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{PSV} \mathbf{G}_{k'x'}(z_j; z_1) = \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_1) \quad (18a)$$

ここに、 \mathbf{K}_{PSV} は式(5b)左辺の剛性行列を表す。また、

$$\mathbf{G}_{k'x'}(z_j; z_1) = \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z_0; z_1) \\ iG_{zx'}(z_0; z_1) \\ G_{x'x'}(z_1; z_1) \\ iG_{zx'}(z_1; z_1) \\ G_{x'x'}(z_2; z_1) \\ iG_{zx'}(z_2; z_1) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18b)$$

z 軸方向の荷重の場合：

この場合、式(5b)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{PSV} \mathbf{G}_{k'z}(z_j; z_1) = \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_1) \quad (19a)$$

ここに、 K_{PSV} は式(5b)左辺の剛性行列を表す。また、

$$G_{k'z}(z_j; z_0) = \begin{pmatrix} G_{x'z}(z_0; z_1) \\ iG_{zz}(z_0; z_1) \\ G_{x'z}(z_1; z_1) \\ iG_{zz}(z_1; z_1) \\ G_{x'z}(z_2; z_1) \\ iG_{zz}(z_2; z_0) \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{PSV}(z_j; z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19b)$$

3.3 剛性行列による3次元1層弾性体の内部荷重点1と内部荷重点2による動的グリーン関数の計算例とその検証例

数値計算例として、図-3のような3次元1層弾性体の内部荷重点1と内部荷重点2による動的グリーン関数 $g_{kl}(x, y, z, \omega; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$ を式(12b)の波数に関する2重フーリエ変換により求め、その結果を Luco and Apsel (1983)⁹⁾ による円筒座標系と反射・透過行列法並びに、軸対称有限要素法による数値解析結果と比較し、本手法の検証例を示すものとする。なお本論文では、式(1)や(12a)に示すように調和振動 $\exp(-i\omega t)$ を仮定しているが、比較で用いる2つの方法では $\exp(i\omega t)$ を仮定しているため、比較においては、虚数部を $\exp(i\omega t)$ の方に合わせている。

計算で用いる3次元1層弾性体の荷重点と観測点は図-3に示す位置とする。また、その物性値と表層弾性体の

厚さは表-1に示す。2重フーリエ変換では、次式のような離散化パラメータ値として表-2の値を用いた。

振動数・波数領域の離散化パラメータ：

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\omega_{\max}}{N_\omega} \\ \Delta\kappa_x &= \frac{2\pi}{L_x} = \frac{2\kappa_{x\max}}{N_\kappa} \\ \Delta\kappa_y &= \frac{2\pi}{L_y} = \frac{2\kappa_{y\max}}{N_\kappa} \end{aligned} \quad (20a)$$

時間・空間領域の離散化パラメータ：

$$\Delta t = \frac{2\pi}{2\omega_{\max}}, \quad \Delta x = \frac{2\pi}{2\kappa_{x\max}}, \quad \Delta y = \frac{2\pi}{2\kappa_{y\max}} \quad (20b)$$

Luco and Apsel (1983)⁹⁾ による円筒座標系と反射・透過行列法の波数積分での振動数は、0.2Hzから0.2Hz刻みで50点、軸対称FEMでは、1/10.24Hz刻みで102点とした。また、軸対称FEMでは、半径方向には中心軸から40mまで、深さ方向には地表面から100mまで軸対称ソリッド要素でモデル化し、水平方向にはエネルギー伝達境界を、モデル下面には粘性境界を用いてモデル外の弾性体の領域を考慮した。最小波長内に5要素入るように水平方向には要素幅2m、深さ方向には表層弾性体部分を2mピッチで、半無限弾性体の第2層部分は4mピッチで離散化した。

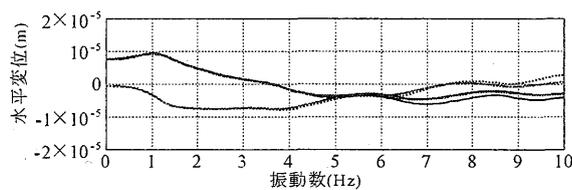
荷重点には1 (tonf) の荷重を作用させるものとし、図-3の荷重点1と2にそれぞれ水平荷重と上下荷重を作用させ、観測点1と2の水平と上下変位 (m) を比較する。

表-1 計算で用いた3次元1層弾性体の物性値と層厚

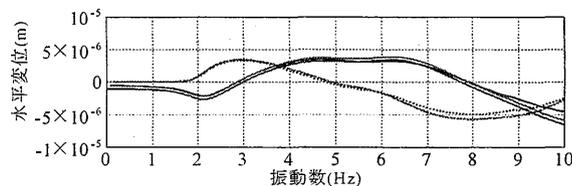
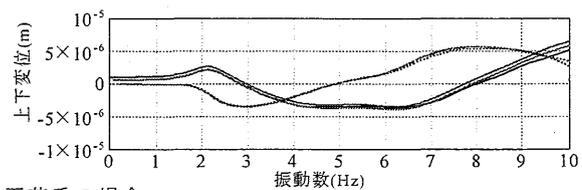
物性値	表層地盤	半無限地盤
表層地盤厚H [m]	20.0	-----
P波速度 [m/s]	244.9	663.3
S波速度 [m/s]	100.0	200.0
密度 [kg/m ³]	1700.0	1800.0
ポアソン比	0.40	0.45
Q値	17	50

表-2 計算で用いた離散化パラメータ

遮断円振動数 ω_{\max} [rad/s]	62.8
x方向の遮断波数 $\kappa_{x\max}$ [rad/m]	±1.57
y方向の遮断波数 $\kappa_{y\max}$ [rad/m]	±1.57
振動数領域の分割数 N_ω	1024
波数領域の分割数 N_κ	1024
x方向の空間間隔 Δx [m]	2.0
y方向の空間間隔 Δy [m]	2.0



(a) 水平荷重の場合



(b) 上下荷重の場合

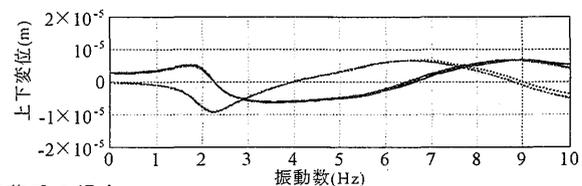


図-4 荷重点1による観測点1の変位成分の比較

(実線と点線は実数部と虚数部, 黒: FEM, 赤: Luco and Apsel の方法, 青: 本論文の方法)

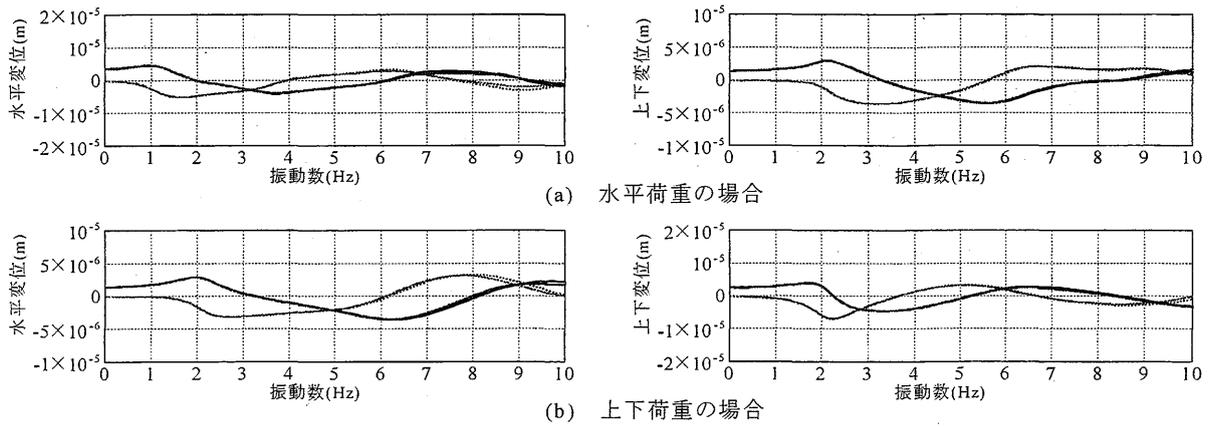


図-5 荷重点1による観測点2の変位成分の比較
(実線と点線は実数部と虚数部, 黒: FEM, 赤: Luco and Apsel の方法, 青: 本論文の方法)

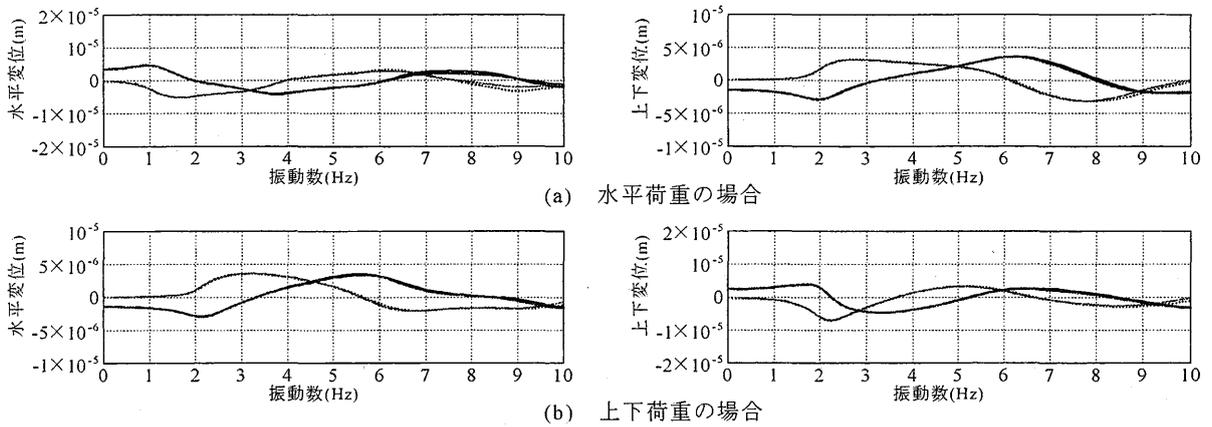


図-6 荷重点2による観測点1の変位成分の比較
(実線と点線は実数部と虚数部, 黒: FEM, 赤: Luco and Apsel の方法, 青: 本論文の方法)

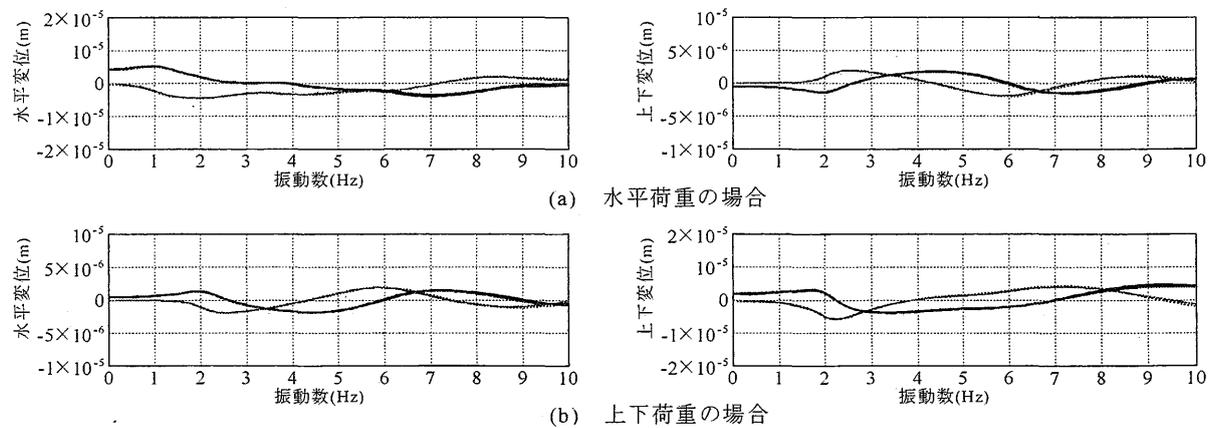


図-7 荷重点2による観測点2の変位成分の比較
(実線と点線は実数部と虚数部, 黒: FEM, 赤: Luco and Apsel の方法, 青: 本論文の方法)

図-4と5は、荷重点1（地表面荷重）の水平と上下荷重による観測点1と2の水平と上下変位 (m) を比較した結果を示す。図-4に示す観測点1では、6Hz以上の高振動数領域でFEMの結果は、Luco and Apselの波数積分と

本論文の方法とわずかに違っているが、Luco and Apselの方法と本論文の方法の結果は全振動数領域でよく一致している。図-5に示す観測点2でも、上記に述べた図-4の結果と同様である。

図-6と7は、荷重点2(表層弾性体内部荷重)の水平と上下荷重による観測点1と2の水平と上下変位(m)を比較した結果を示す。この場合も、図-4と5と同様に、6Hz以上の高振動数領域でFEMの結果は多少異なるものの、全振動数領域で3つの方法による結果はよく一致している。これら3つの方法による数値計算では、表-1に示すようにQ値=50(減衰定数1%)の材料減衰を導入し、表面波等に起因する数値計算上の特異点を除いているため数値計算上の不安定性はない。

図-4から7に示す比較から、3つの方法による結果は殆ど一致しており、特にLuco and Apselの波数積分と本論文の方法はよく一致しており、直交座標と剛性行列および2重フーリエ変換を用いる本論文の方法の検証がなされたものといえる。

なお、Luco and Apsel(1983)⁹⁾の円筒座標系を用いる方法はベッセル関数を含む波数に関する1重積分となるが、吉田(1994)¹³⁾が示しているような数値計算上の複雑な工夫が必要となり、また、波数に関する2重フーリエ積分よりも計算上有利のように考えられるが、多数点の変位を計算するためにはその地点数ほど1重積分を繰り返し使う必要がある。一方、本論文で示した2重フーリエ積分の方法では、離散化高速2重フーリエ変換(2DFFT)により複雑な計算上の工夫無しに1回の計算で離散化したすべての深さ方向と等間隔の平面内変位が一挙に求められる特徴がある。どちらの方法においても、コンピュータの性能向上により極めて短時間(一瞬)で計算が終了する。

4. まとめ

本論文では、直交座標系と剛性行列による水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の定式化を整理し、半無限弾性体上の1層弾性体の表面および弾性体内部に荷重点を仮定した時の動的グリーン関数の具体式を例示し、方法の手順を示した。本論文の方法による2重フーリエ変換(式(12b))から求めた動的グリーン関数を、伝統的なLuco and Apsel(1983)⁹⁾による円筒座標系と反射・透過行列法並びに、軸対称有限要素法による数値解析結果と比較し、本方法の検証例を示した。

これまでの3次元水平成層弾性体における動的グリーン関数は、円筒座標系と伝達行列や反射・透過行列によって求める方法のみであったが、本論文では、新たに、直交座標系と対称剛性行列から3次元動的グリーン関数を求める方法を提案したものである。本論文の動的グリーン関数は、直交座標系と2重フーリエ変換を用いているため、円筒座標系の波動方程式やベッセル関数等の知識無しに、簡単な振動数・波数領域の代数計算(剛性方程式を解く計算)から、1回の計算で離散化した全ての深さ方向と等間隔の平面内変位が一挙に求められる特徴がある。

参考文献

- 1) 齊藤将司, 原田隆典, 王宏沢, 森源次, 山下典彦: 地表面の鉛直方向調和振動荷重による地盤の層厚・弾性定数の推定方法とその数値実験による検証, 応用力学論文集, Vol. 10, pp.593-600, 2007.
- 2) Lamb, H.: On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, *Phi. Trans. Roy. Soc., London*, A203, pp.1-42, 1904.
- 3) Aki, K. and Richards, P. G.: *Quantitative Seismology*, 2nd Edition, University Science Books, 2002.
- 4) 日本建築学会: 地盤震動—現象と理論—, 丸善, 2005.
- 5) Haskell, N. A.: The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, pp.17-34, 1953.
- 6) Luco, J. E. and Apsel, R. J.: On the Green's functions for a layered half-space, Part I, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, pp.909-929, 1983.
- 7) Kausel, E. and Roëssset, J. M.: Stiffness matrices for layered soils, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 71, pp.1743-1761, 1981.
- 8) Buchon, M.: Discrete wave number representation of elastic wave field in three dimensional space, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp.3609-3614, 1979.
- 9) 原田隆典, 王宏沢: 剛性マトリックスによる水平成層地盤の波動解析, 地震第2輯, 第57巻, pp.387-392, 2005.
- 10) 原田隆典, 松田良介, 中村真貴, 栗田勇志: 直交座標系とフーリエ変換を用いた水平成層弾性体の動的グリーン関数, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.67, No.2, pp.1915-1924, 2011.
- 11) 妹沢克惟: Further studies on Rayleigh waves having Some azimuthal distribution, 震研彙報, vol. 6, 1929.
- 12) 金井清, 田治見宏, 大沢胖, 小林啓美: 建築構造学大系1 地震工学, 第3章—第4章, 1968.
- 13) 吉田一博: 半無限弾性地盤上の矩形基礎の各種の動的地盤ばねについて, 日本建築学会論文報告集, 第457号, pp.19-28, 1994.
- 14) 原田隆典, 大角恒雄, 奥倉英世: 3次元直交座標系における波動場の解析解とその地震動波形作成への応用, 土木学会論文集, No.612/1-46, pp.99-108, 1999.
- 15) 原田隆典: 海洋および内陸型地震の震源域における長大構造物の応答特性の評価とその予測法, 平成13年~平成15年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)研究成果報告書, 宮崎大学工学部, 宮崎大学学術情報リポジトリ, <http://hdl.handle.net/10458/1053>, 2004.

(2012年3月8日 受付)