

直交座標系とフーリエ変換を用いた水平成層弾性体の動的グリーン関数

Dynamic Green's functions for layered media by using 3 dimensional Cartesian coordinates and Fourier transform

原田隆典*・松田良介**・中村真貴***・栗田勇志**

Takanori Harada, Ryosuke Matsuda, Masaki Nakamura, and Yushi Awada

*工博 宮崎大学教授, 工学部土木環境工学科 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

**宮崎大学大学院学生 工学研究科修士課程土木環境工学専攻 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

***宮崎大学大学院学生 農学工学総合研究科博士後期課程資源環境科学専攻 (〒889-2192 宮崎市学園木花台西 1-1)

This paper presents the dynamic Green's functions by the use of the stiffness matrix method for layered elastic half space in Cartesian coordinates. From these Green's functions in Cartesian coordinates, the well known Green's functions in cylindrical coordinates are derived. The presented Green's functions in Cartesian coordinates are represented by the two fold Fourier integral, and then the 2 Dimensional Fast Fourier Transform (2DFFT) can be effectively used to calculate the dynamic Green's functions. To verify numerically the validity of the presented Green's functions in Cartesian coordinates, the numerical examples of comparison with the well known dynamic Green's functions of elastic half space in cylindrical coordinates are shown.

Key Words: Dynamic Green's functions for layered half space, Stiffness matrix method, Cartesian coordinates, Cylindrical coordinates

1. はじめに

水平成層弾性体における動的グリーン関数は、震源断層による地震動波形の計算や基礎の運動に対する地盤からの動的反力特性を表す地盤複素ばね(実数部がばね力、虚数部は地下逸散減衰威力)等に利用される。最近では、有限要素法、差分法、境界要素法等の数値計算手法により地震動波形や地盤複素ばね等が計算できるようになったが、実測波形や実験結果を用いた逆解析によって地盤構造や地盤物性値を推定する場合においては、有限要素法等の数値計算手法よりも動的グリーン関数を用いる解析的手法の方が効率的である^{例えは¹⁾}。

水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の伝統的定式化においては、Lamb(1906)²⁾の研究に従い、円筒座標系を用いる方法が広く使われる。この方法では、3次元動的グリーン関数はベッセル関数とSH波、P・SV波による水平成層弾性体の変位・応力ベクトル³⁾を含む波数に関する1重積分で与えられる^{例えは⁴⁾}。そして、水平成層弾性体の変位・応力ベクトル³⁾は通常、伝達行列法⁵⁾、反射・透過行列法⁶⁾によって求められる。Kausel and Roësset(1981)⁷⁾は伝達行列法⁵⁾の数値計算上の不安定性を改良した剛性行列法を提案し、変位・応力ベクトルを剛性行列法によって求め、円筒座標系による3次元動的グリーン関数を求める方法を示している。

円筒座標系を用いる方法に対して、Bouchon(1979)⁸⁾は直

交座標系と3重フーリエ変換を用いて水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数を求め、伝達行列法⁵⁾と組み合わせ、水平成層弾性体中の震源断層による地震波の計算法を示している(離散化波数積分法と呼ばれる)。原田ら(2006)⁹⁾は直交座標系と剛性行列法による震源断層を含む水平成層弾性体の波動解析法を提案している。

以上のように水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数は、円筒座標系と直交座標系を用いる2つの方法で定式化されているが、両者の定式化はそれぞれの座標系における波動方程式から出発しているため、別々の定式化が成されており、両座標系における動的グリーン関数の関係はあまり明確ではない。

そこで本論文では、直交座標系と剛性行列を使った第1著者らのこれまでの波動解析法を水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の定式化として整理して、この定式化に基づいて伝統的な円筒座標系の波動方程式から求められる3次元動的グリーン関数を求めるものとする。このような定式化により、直交座標系と円筒座標系による両者の動的グリーン関数の関係を明確にし、数値計算例として、半無限弾性体上の鉛直荷重と水平荷重による3次元動的グリーン関数を取り上げ、円筒座標系によるLamb(1904)²⁾、妹沢(1929)¹⁰⁾、田治見(1968)¹¹⁾の数値解を求めた吉田(1994)¹²⁾の結果が、直交座標系の定式化による波数に関する高速2重フーリエ変換(2DFFT)により効率よく求められることを示す。

2. 直交座標系と剛性行列による 3 次元水平成層弾性体の動的グリーン関数の定式化の整理

2.1 直交座標系と剛性行列による 3 次元水平成層弾性体の波動解析法の概要

ここでは、直交座標系と円筒座標系の動的グリーン関数の定式化を整理するために必要となる剛性行列と直交座標系による水平成層弾性体の波動解析の基礎式⁹⁾の概要を説明する。

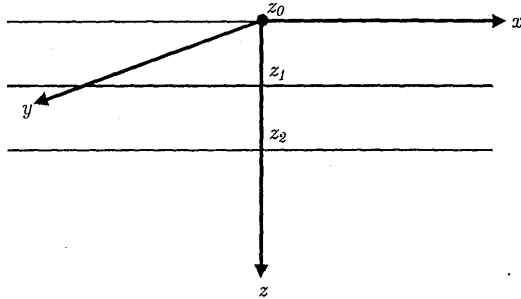


図-1 3次元水平成層弾性体および直交座標系とその記号 (半無限弾性体上の2層弾性体)

図-1に示すような3次元水平成層弾性体 (図では半無限弾性体上の2層の3次元水平成層弾性体を示す) における時間・空間領域の変位は、次式のような3重フーリエ変換によって表すことができる。なお、式(1)では、振動数・波数領域の変位がフーリエ変換されたことを示すための特別な記号を回避して同じ記号を使っていることに注意せよ。時間・空間領域の変位か振動数・波数領域の変位かの区別は引数の違いで表わしている。

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \end{pmatrix} e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)} d\kappa_x d\kappa_y d\omega \quad (1)$$

ここに、振動数・波数領域の変位は、直交座標 (x, y, z) の z 軸周りに座標軸を θ' 回転させて調和平面波 $e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)}$ の伝播方向に x' 軸を設定した新座標系 $(x', y', z' = z)$ におけるSH波成分 $v_0(\kappa, z, \omega)$ とP・SV波成分 $u_0(\kappa, z, \omega)$, $w_0(\kappa, z, \omega)$ から次式によって求められる。

$$\begin{pmatrix} u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \\ w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \kappa_x & -\kappa_y & 0 \\ \kappa_y & \kappa_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(\kappa, z, \omega) \\ v_0(\kappa, z, \omega) \\ w_0(\kappa, z, \omega) \end{pmatrix} \quad (2)$$

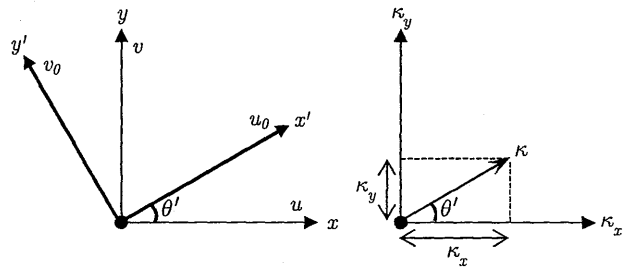


図-2 直交座標系 (x, y, z) と新直交座標系 $(x', y', z' = z)$ と回転角 θ' および波数の関係

上式で、 κ は x' 軸方向の波数を表し、直交座標 (x, y, z) の x, y 軸方向の波数 κ_x, κ_y と回転角 θ' と次式のような関係にある (図-2参照)。

$$\kappa_x = \kappa \cos \theta', \kappa_y = \kappa \sin \theta' \rightarrow \kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \quad (3)$$

このように新座標を設定すると、調和平面波 $e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)}$ は、次式のように波数 κ と振動数 ω の1次元の調和波として表される。

$$e^{i(\kappa_x x + \kappa_y y - \omega t)} = e^{i(\kappa(x \cos \theta' + y \sin \theta') - \omega t)} = e^{i(\kappa x' - \omega t)} \quad (4)$$

新座標系 $(x', y', z' = z)$ における y' 軸方向のSH波成分 $v_0(z) \equiv v_0(\kappa, z, \omega)$ と x', z 軸方向のP・SV波成分 $u_0(z) \equiv u_0(\kappa, z, \omega)$, $w_0(z) \equiv w_0(\kappa, z, \omega)$ は、次式の剛性方程式 (連立1次方程式) を解いて求めることができる。

SH波成分:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)SH} & K_{12}^{(1)SH} & 0 \\ K_{21}^{(1)SH} & K_{22}^{(1)SH} + K_{11}^{(2)SH} & K_{12}^{(2)SH} \\ 0 & K_{21}^{(2)SH} & K_{22}^{(2)SH} + K_{half}^{SH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0(z_0) \\ v_0(z_1) \\ v_0(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{y'}(z_0) \\ q_{y'}(z_1) \\ q_{y'}(z_2) \end{pmatrix} \quad (5a)$$

ここに、 $K_{ij}^{(n)SH}$, K_{Half}^{SH} 第 n 層と半無限弾性体の剛性行列を表し対称行列で、具体式は原田他(1999)¹³⁾, 原田(2004)¹⁴⁾に記述されている。 $q_{y'}(z_m) \equiv q_{y'}(\kappa, z_m, \omega)$ は深さ z_m に作用する振動数・波数領域の外力を表す。

P・SV 波成分：

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{(1)P-SV} & K_{12}^{(1)P-SV} + K_{11}^{(2)P-SV} & 0 \\ K_{21}^{(1)P-SV} & K_{22}^{(1)P-SV} + K_{11}^{(2)P-SV} & K_{12}^{(2)P-SV} \\ 0 & K_{21}^{(2)P-SV} & K_{22}^{(2)P-SV} + K_{\text{half}}^{P-SV} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_0(z_0) \\ iw_0(z_0) \\ u_0(z_1) \\ iw_0(z_1) \\ u_0(z_2) \\ iw_0(z_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{x'}(z_0) \\ iq_{z'}(z_0) \\ q_{x'}(z_1) \\ iq_{z'}(z_1) \\ q_{x'}(z_2) \\ iq_{z'}(z_2) \end{pmatrix} \quad (5b)$$

ここに、第 n 層と半無限弾性体の剛性行列は 4 行 4 列と 2 行 2 列の対称行列で表され、具体式は原田他(1999)¹³、原田(2004)¹⁴に記述されている。また、 $q_{x'}(z_m) \equiv q_{x'}(\kappa, z_m, \omega)$ 、 $q_{z'}(z_m) \equiv q_{z'}(\kappa, z_m, \omega)$ は深さ z_m に作用する振動数・波数領域の外力を表す。P・SV 波成分では、剛性行列が対称であるために、式(5b)のように z 軸方向の変位と荷重に虚数単位 i が必要であることに特徴がある。

2.2 直交座標系と剛性行列による 3 次元水平成層弾性体の波動解析法に基づくグリーン関数

ここでは、前節に示した直交座標系と剛性行列による水平成層弾性体の波動解析法を使って、グリーン関数の定式化を記述する。

グリーン関数とは、点 (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) に単位体積当たり単位力積の衝撃力 $\delta(x - x_{s0})\delta(y - y_{s0})\delta(z - z_{s0})\delta(t)$ が作用した時に点 (x, y, z) に生じる変位を表す関数である。この衝撃力は振動数・波数領域では、 $z = z_{s0}$ に作用する単位振幅の調和平面波 $e^{i[\kappa_x(x-x_{s0})+\kappa_y(y-y_{s0})-\omega t]}$ の外力で表される。

直交座標 (x, y, z) と新座標 $(x', y', z' = z)$ の間には、次式のような幾何学的関係式が成立する。

$$\begin{pmatrix} x' - x'_{s0} \\ y' - y'_{s0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ -\sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{s0} \\ y - y_{s0} \end{pmatrix} \quad (6)$$

したがって、 $z = z_{s0}$ に作用する単位振幅の調和平面波 $e^{i[\kappa_x(x-x_{s0})+\kappa_y(y-y_{s0})-\omega t]}$ は、新座標では、次式のように $z = z_{s0}$ に作用する単位振幅の 1 次元調和波 $e^{i[\kappa(x'-x'_{s0})-\omega t]}$ の外力として表すことができる (式(4)を参照)。

$$e^{i[\kappa_x(x-x_{s0})+\kappa_y(y-y_{s0})-\omega t]} = e^{i[\kappa(x'-x'_{s0})-\omega t]} \quad (7)$$

ここで、新座標における SH 波と P・SV 波による振動数・波数領域のグリーン関数は、 $z = z_{s0}$ に作用する単位振幅の 1 次元調和波 $e^{i[\kappa(x'-x'_{s0})-\omega t]}$ の外力による座標点 (x', z') の変位であるため、この振動数・波数領域のグリーン関数は、次式のように SH 波では 1 種類、P・SV 波では 4 種類の合計 5 種類のグリーン関数が存在することになる。

SH 波のグリーン関数：

$$G_{y'y'}(z; z_{s0}) \equiv G_{y'y'}(\kappa, z, \omega; z_{s0}) \quad (8a)$$

P・SV 波のグリーン関数：

$$\begin{aligned} G_{x'x'}(z; z_{s0}) &\equiv G_{x'x'}(\kappa, z, \omega; z_{s0}) \\ G_{zx'}(z; z_{s0}) &\equiv G_{zx'}(\kappa, z, \omega; z_{s0}) \\ G_{x'z}(z; z_{s0}) &\equiv G_{x'z}(\kappa, z, \omega; z_{s0}) \\ G_{zz}(z; z_{s0}) &\equiv G_{zz}(\kappa, z, \omega; z_{s0}) \end{aligned} \quad (8b)$$

ここに、 $G_{k'l'}(z; z_{s0})$ は $z = z_{s0}$ に作用する l' 軸方向の単位振幅の 1 次元調和波 $e^{i[\kappa(x'-x'_{s0})-\omega t]}$ の外力による座標点 (x', z') の k' 軸方向の変位を表す。

ここで、 $x', y', z' = z$ 軸方向に振幅 $q_{x'}(z_{s0})$ 、 $q_{y'}(z_{s0})$ 、 $q_z(z_{s0})$ の 1 次元調和波 $e^{i[\kappa(x'-x'_{s0})-\omega t]}$ の外力が作用する時の点 (x', z') の変位は、5 つのグリーン関数を使うと次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \\ w_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{s0}) & 0 & G_{x'z}(z; z_{s0}) \\ 0 & G_{y'y'}(z; z_{s0}) & 0 \\ G_{zx'}(z; z_{s0}) & 0 & G_{zz}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{x'}(z_{s0}) \\ q_{y'}(z_{s0}) \\ q_z(z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (9)$$

また、新座標系と元の直交座標系における荷重の間には、幾何学的関係より次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} q_{x'}(z_{s0}) \\ q_{y'}(z_{s0}) \\ q_z(z_{s0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' & 0 \\ -\sin \theta' & \cos \theta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x(z_{s0}) \\ q_y(z_{s0}) \\ q_z(z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (10)$$

式(2)に式(9)と式(10)を代入して整理すると、直交座標系 (x, y, z) における変位と荷重 (q_x, q_y, q_z) の関係が次式のように求められる ($u(z) \equiv u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$ 、 $v(z) \equiv v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$ 、 $w(z) \equiv w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega)$)。

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{xx}(z; z_{s0}) & G_{xy}(z; z_{s0}) & G_{xz}(z; z_{s0}) \\ G_{yx}(z; z_{s0}) & G_{yy}(z; z_{s0}) & G_{yz}(z; z_{s0}) \\ G_{zx}(z; z_{s0}) & G_{zy}(z; z_{s0}) & G_{zz}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x(z_{s0}) \\ q_y(z_{s0}) \\ q_z(z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

ここに、 $G_{kl}(z; z_{s0}) \equiv G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$ は l 軸方向の単位荷重による k 軸方向の変位 (グリーン関数) を表わす。

以上をまとめると、3次元水平成層弾性体におけるグリーン関数の表現式は以下ようになる。

$$g_{kl}(x, y, z, t; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) \times e^{i[\kappa_x(x-x_{s0}) + \kappa_y(y-y_{s0}) - \omega t]} d\kappa_x d\kappa_y d\omega \quad (12a)$$

また、振動数領域のグリーン関数は、

$$g_{kl}(x, y, z, \omega; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) \times e^{i[\kappa_x(x-x_{s0}) + \kappa_y(y-y_{s0}) - \omega t]} d\kappa_x d\kappa_y \quad (12b)$$

ここに、 $G_{kl}(z; z_{s0}) \equiv G_{kl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{s0}, y_{s0}, z_{s0})$ は式(8)で与えられる剛性行列による2次元問題であるP・SV波とSH波の2次元水平成層弾性体の5つのグリーン関数を以下の式に代入して求められる。なお、5つのグリーン関数 $G_{k'l'}(z, z_{s0})$ は、式(5a)と式(5b)の剛性方程式において、 $z = z_{s0}$ における深さの外力項 $q_{l'}$ を1とおいて剛性方程式を解いて深さ z の変位として求められる(3.1に示す半無限弾性体の場合を参照)。

(1) x 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xx}, G_{yx}, G_{zx} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xx}(z; z_{s0}) \\ G_{yx}(z; z_{s0}) \\ G_{zx}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ \kappa_x \kappa_y & -\kappa_x \kappa_y & 0 \\ \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{s0}) \\ G_{y'y'}(z; z_{s0}) \\ G_{zx'}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (13a)$$

(2) y 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xy}, G_{yy}, G_{zy} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xy}(z; z_{s0}) \\ G_{yy}(z; z_{s0}) \\ G_{zy}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_x \kappa_y & -\kappa_x \kappa_y & 0 \\ \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ \kappa_x^2 & \kappa_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_y}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{s0}) \\ G_{y'y'}(z; z_{s0}) \\ G_{zx'}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (13b)$$

(3) z 軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xz}, G_{yz}, G_{zz} の場合:

$$\begin{pmatrix} G_{xz}(z; z_{s0}) \\ G_{yz}(z; z_{s0}) \\ G_{zz}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_x & \kappa_y & 0 \\ \kappa & \kappa & 0 \\ \kappa_y & 0 & 0 \\ \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'z'}(z; z_{s0}) \\ 0 \\ G_{zz'}(z; z_{s0}) \end{pmatrix} \quad (13c)$$

2.3 3次元水平成層弾性体のグリーン関数の別表現 (円筒座標系での表現)

円筒座標系を使う従来の定式化では、以下に記述するように円筒座標と直交座標の関係がやや複雑になってしまうので一般に荷重の作用点は直交座標の点 $(0, 0, z_{s0})$ とする。しかしここでは、荷重の作用点はこれまでと同じように座標点 (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) として、前節の直交座標系の動的グリーン関数から円筒座標系の動的グリーン関数を求める。図-3(a)のように円筒座標の中心線は座標 (x_{s0}, y_{s0}, z_{s0}) を通るように設定する。図-3(b)はその平面図を表し、直交座標 (x, y, z) の原点が (x_{s0}, y_{s0}) となるよう平行移動した座標 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 、並びに調和平面波の伝播方向に合わせた新直交座標 (x', y', z) とその原点が (x_{s0}, y_{s0}) となるよう平行移動した座標 $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z})$ および円筒座標 (r, θ) の関係を示す。ここに、 θ' は調和平面波の伝播方向を表す。また、 $r = \sqrt{(x - x_{s0})^2 + (y - y_{s0})^2}$ で、 θ は円筒座標の角度を表す。

図-3の各座標においては、幾何学的関係から次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_{s0} \\ y - y_{s0} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \\ \tilde{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x'_{s0} \\ y' - y'_{s0} \\ \tilde{z} = z \end{pmatrix} \quad (14)$$

図-3(b)は深さ z における円筒座標 (r, θ) と直交座標 (\tilde{x}, \tilde{y}) および調和平面波の伝播方向に取った新直交座標 (\tilde{x}', \tilde{y}') の関係を示している。この図には、円筒座標 (r, θ) と直交座標 (\tilde{x}, \tilde{y}) の軸方向の変位成分 (u_r, u_θ) 、 (u, v) も示している。深さ方向の変位成分は $u_z = w$ となる。

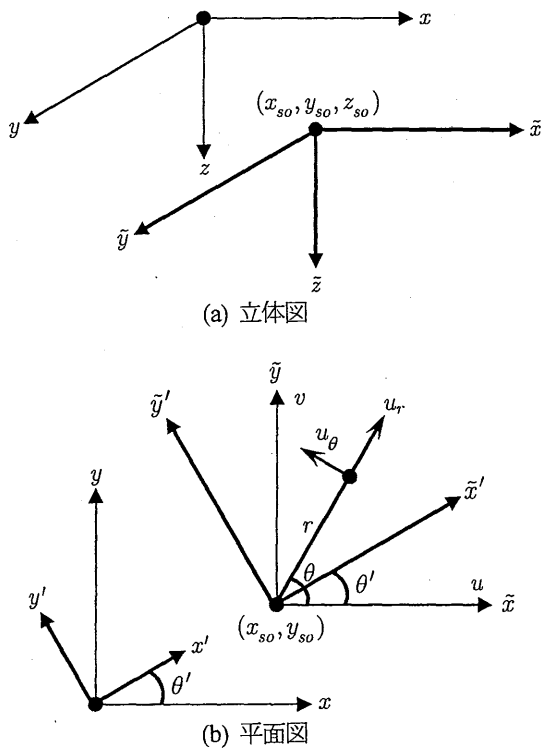


図-3 直交座標と円筒座標と荷重の作用点の関係

また、振動数・波数領域における円筒座標軸方向の変位と直交座標軸方向の変位には、幾何学的関係より次式が成立する。

$$\begin{pmatrix} u_r(z) \\ u_\theta(z) \\ u_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) \end{pmatrix} \quad (15)$$

式(15)の右辺に式(2)を代入し、式(9)と式(10)を考慮すると、以下のように円筒座標軸方向の変位と直交座標軸方向の荷重の関係式が求められる。

$$\begin{pmatrix} u_r(z) \\ u_\theta(z) \\ u_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{rx}(z; z_{so}) & G_{ry}(z; z_{so}) & G_{rz}(z; z_{so}) \\ G_{\theta x}(z; z_{so}) & G_{\theta y}(z; z_{so}) & G_{\theta z}(z; z_{so}) \\ G_{zx}(z; z_{so}) & G_{zy}(z; z_{so}) & G_{zz}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_x(z_{so}) \\ q_y(z_{so}) \\ q_z(z_{so}) \end{pmatrix} \quad (16a)$$

ここに、 $G_{jl}(z; z_{so}) \equiv G_{jl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so})$ は直交座標軸 l 方向の単位荷重による円筒座標軸 j 方向変位を表し、円筒座標によるグリーン関数である。

$$\begin{aligned} G_{rx}(z; z_{so}) &= G_{x'x'} \cos \theta' \cos(\theta' - \theta) \\ &\quad + G_{y'y'} \sin \theta' \sin(\theta' - \theta) \\ G_{ry}(z; z_{so}) &= G_{x'x'} \sin \theta' \cos(\theta' - \theta) \\ &\quad - G_{y'y'} \cos \theta' \sin(\theta' - \theta) \\ G_{rz}(z; z_{so}) &= G_{x'z} \cos(\theta' - \theta) \\ G_{\theta x}(z; z_{so}) &= G_{x'x'} \cos \theta' \sin(\theta' - \theta) \\ &\quad - G_{y'y'} \sin \theta' \cos(\theta' - \theta) \\ G_{\theta y}(z; z_{so}) &= G_{x'x'} \sin \theta' \sin(\theta' - \theta) \\ &\quad + G_{y'y'} \cos \theta' \cos(\theta' - \theta) \\ G_{\theta z}(z; z_{so}) &= G_{x'z} \sin(\theta' - \theta) \\ G_{zx}(z; z_{so}) &= G_{zx'} \cos \theta' \\ G_{zy}(z; z_{so}) &= G_{zx'} \sin \theta' \end{aligned} \quad (16b)$$

時間・空間領域のグリーン関数は、式(12)の3重フーリエ変換によって求められるが、振動数領域のグリーン関数は、次式の2重フーリエ変換によって求められる。

$$\begin{aligned} g_{jl}(r, \theta, z, \omega; x_{so}, y_{so}, z_{so}) \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint G_{jl}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so}) \\ \times e^{i[\kappa_x(x-x_{so}) + \kappa_y(y-y_{so})]} d\kappa_x d\kappa_y \end{aligned} \quad (17)$$

上式の2重フーリエ変換から円筒座標系での振動数領域のグリーン関数は、式(3)と式(14)を使うと、調和平面波は、 $e^{i[\kappa_x(x-x_{so}) + \kappa_y(y-y_{so})]} = e^{i[\kappa r \cos(\theta' - \theta)]}$ のように書き換えられ、式(17)は次式のような円筒座標による積分に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} g_{jl}(r, \theta, z, \omega; x_{so}, y_{so}, z_{so}) = \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \kappa G_{jl}(z; z_{so}) e^{i[\kappa r \cos(\theta' - \theta)]} d\theta' d\kappa \end{aligned} \quad (18)$$

式(16b)を式(18)に代入して θ' に関する積分を行い、ベッセル関数の積分表示¹⁵⁾を用いると、次式のように円筒座標系での振動数領域のグリーン関数が求められる。

(1) x軸方向荷重の場合

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{rx}(r, \theta, z, \omega; x_{so}) \\ g_{\theta x}(r, \theta, z, \omega; x_{so}) \\ g_{zx}(r, \theta, z, \omega; x_{so}) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1(\kappa r)}{\partial(\kappa r)} & \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} & 0 \\ \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} & \frac{\partial J_1(\kappa r)}{\partial(\kappa r)} & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\kappa r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{so}) \\ G_{y'y'}(z; z_{so}) \\ iG_{zx'}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \kappa d\kappa \end{aligned} \quad (19a)$$

(2) y 軸方向荷重の場合

$$\begin{pmatrix} g_{ry}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \\ g_{\theta y}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \\ g_{zy}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial J_1(\kappa r)}{\partial(\kappa r)} & \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} & 0 \\ \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} & \frac{\partial J_1(\kappa r)}{\partial(\kappa r)} & 0 \\ 0 & 0 & J_1(\kappa r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z; z_{so}) \\ G_{y'y'}(z; z_{so}) \\ iG_{zx'}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \kappa d\kappa \quad (19b)$$

(3) z 軸方向荷重の場合

$$\begin{pmatrix} g_{rz}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \\ g_{\theta z}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \\ g_{zz}(r, \theta, z, \omega; \mathbf{x}_{so}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_1(\kappa r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0(\kappa r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} iG_{x'z'}(z; z_{so}) \\ 0 \\ G_{zz}(z; z_{so}) \end{pmatrix} \kappa d\kappa \quad (19c)$$

ここに,

$$\mathbf{x}_{so} = (x_{so}, y_{so}, z_{so})^T = \begin{pmatrix} x_{so} \\ y_{so} \\ z_{so} \end{pmatrix} \quad (20a)$$

$$r = \sqrt{(x - x_{so})^2 + (y - y_{so})^2} \quad (20b)$$

上式の円筒座標系での振動数領域のグリーン関数は、従来の伝統的な円筒座標系の波動方程式から求められる動的グリーン関数⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾と同じである。

3. 剛性行列とフーリエ変換による 3 次元半無限弾性体の表面荷重による動的グリーン関数の数値計算例

2章において動的グリーン関数を直交座標系と円筒座標系による2つの表現式(式(12b)と式(19))を示した。ここでは、半無限弾性体上の鉛直荷重と水平荷重による3次元動的グリーン関数を取り上げ、円筒座標系による Lamb (1904)²⁾、妹沢 (1929)¹⁰⁾、田治見 (1968)¹¹⁾の研究から数値解を求めた吉田 (1994)¹²⁾の結果が、直交座標系の定式化による波数に関する高速2重フーリエ変換 (2DFFT) により効率よく求められることを示す。

3.1 剛性行列による 3 次元半無限弾性体の表面荷重による動的グリーン関数

動的グリーン関数を求めるためには、式(8)で示す SH 波と P・SV 波による5つの動的グリーン関数が必要となる。

ここでは、半無限弾性体の地表面に作用する単位振幅の調和波の荷重に対する振動数・波数領域のグリーン関数を示す。式(5)の剛性方程式より、次式のように求められる。なお、以下の式において剛性行列の具体式は省略するが文献^{13),14)}のものを用いている。

(1) SH 波のグリーン関数:

この場合、式(5)は次式のようになる。

$$K_{half}^{SH} G_{y'y'}(z_0) = 1 \quad (21a)$$

したがって、

$$G_{y'y'}(z_0) = (K_{half}^{SH})^{-1} = -\frac{1}{i\mu\gamma} \quad (21b)$$

ここに、 μ はせん断剛性を表す。

(2) P・SV 波のグリーン関数:

x' 軸方向の荷重の場合:

この場合、式(5)は次式のようになる。

$$\mathbf{K}_{half}^{PSV} \begin{pmatrix} G_{x'x'}(z_0) \\ iG_{zx'}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22a)$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} G_{x'x'}(z_0) \\ iG_{zx'}(z_0) \end{pmatrix} = (\mathbf{K}_{half}^{PSV})^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\mu R(\kappa)} \begin{pmatrix} \gamma \left(\frac{\omega}{C_S}\right)^2 \\ -\kappa \left[\left(\frac{\omega}{C_S}\right)^2 - 2\kappa^2 - 2i\gamma \right] \end{pmatrix} \quad (22b)$$

ここに、 C_S 、 C_P は S 波と P 波の速度を表し、 $R(\kappa)$ はレイリー関数で次式のように与えられる。レイリー波速度 C_R は $R(\omega/C_R) = 0$ から求められる。

$$R(\kappa) = 4\kappa^2\nu\gamma + \left[2\kappa^2 - \left(\frac{\omega}{C_S}\right)^2 \right]^2 \quad (22c)$$

また、

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_P}\right)^2 - \kappa^2}, \quad \text{Im}(\nu) \geq 0 \quad (22d)$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 - \kappa^2}, \quad \text{Im}(\gamma) \geq 0 \quad (22e)$$

z軸方向の荷重の場合:

$$\mathbf{K}_{half}^{PSV} \begin{pmatrix} G_{x'z}(z_0) \\ iG_{zz}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (23a)$$

したがって,

$$\begin{pmatrix} G_{x'z}(z_0) \\ iG_{zz}(z_0) \end{pmatrix} = (\mathbf{K}_{half}^{PSV})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \\ = \frac{i}{\mu R(\kappa)} \begin{pmatrix} \kappa \left[\left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 - 2\kappa^2 - 2\nu\gamma \right] \\ \nu \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (23b)$$

3.2 半無限 3 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (グリーン関数)

(1) 直交座標系によるグリーン関数 (フーリエ変換を用いた表現)

前項で示した半無限 2 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (5つのグリーン関数) を式(13)に代入すると, 半無限 3 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (振動数・波数領域のグリーン関数) を求めることができる。

ここでは, 円筒座標系による Lamb (1904)²⁾, 妹沢 (1929)¹⁰⁾, 田治見 (1968)¹¹⁾の研究から数値解を求めた吉田 (1994)¹²⁾の結果と比較するために必要な鉛直荷重による鉛直変位のグリーン関数 G_{zz} と, x軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xx} の2つの式を示しておく。

鉛直荷重による鉛直変位のグリーン関数 G_{zz} :

$$G_{zz}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so}) = \frac{i\nu \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2}{\mu R(\kappa)} \quad (24a)$$

x軸方向荷重によるグリーン関数 G_{xx} :

$$G_{xx}(\kappa_x, \kappa_y, \omega, z; x_{so}, y_{so}, z_{so}) = \frac{i}{\mu R(\kappa)\kappa^2} \left[\kappa_x^2 \gamma \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2 + \kappa_y^2 \frac{R(\kappa)}{\gamma} \right] \quad (24b)$$

(2) 円筒座標系によるグリーン関数

前項で示した半無限 2 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (5つのグリーン関数) を

式(19)に代入すると, 円筒座標による半無限 3 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (振動数・波数領域のグリーン関数) を求めることができる。

ここでは, 鉛直荷重による鉛直変位のグリーン関数 $g_{zz}(\omega; \mathbf{x}_{so})$ と, x軸方向荷重によるグリーン関数 $g_{xx}(\omega; \mathbf{x}_{so})$ の2つの式を示すが, これらの式は, 円筒座標系による Lamb (1904)²⁾, 妹沢 (1929)¹⁰⁾, 田治見 (1968)¹¹⁾の式と同じである。

鉛直荷重による鉛直変位のグリーン関数 $g_{zz}(\omega; \mathbf{x}_{so})$:

$$g_{zz}(\omega; \mathbf{x}_{so}) = \frac{i}{2\pi\mu} \int_0^\infty \frac{\kappa\nu \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2}{R(\kappa)} J_0(\kappa r) d\kappa \quad (25a)$$

x軸方向荷重によるグリーン関数 $g_{xx}(\omega; \mathbf{x}_{so})$:

$$g_{xx}(\omega; \mathbf{x}_{so}) = \frac{i}{4\pi\mu} \int_0^\infty \left[\frac{\gamma \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2}{R(\kappa)} + \frac{1}{\gamma} \right] J_0(\kappa r) \kappa d\kappa \\ - \frac{i}{4\pi\mu} \cos 2\theta \int_0^\infty \left[\frac{\gamma \left(\frac{\omega}{C_s}\right)^2}{R(\kappa)} - \frac{1}{\gamma} \right] J_2(\kappa r) \kappa d\kappa \quad (25b)$$

ここに,

$$\mathbf{x}_{so} = (x_{so}, y_{so}, 0)^T = \begin{pmatrix} x_{so} \\ y_{so} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25c)$$

$$r = \sqrt{(x - x_{so})^2 + (y - y_{so})^2} \quad (25d)$$

3.3 既往の半無限 3 次元弾性体の表面に単位調和荷重が作用する場合の表面の変位 (グリーン関数) との比較

(1) 鉛直調和荷重による鉛直変位の動的グリーン関数の数値解の結果と比較

式(25a)は妹沢(1929)¹⁰⁾, 田治見(1968)¹¹⁾の研究により, 振動数 $\omega \rightarrow 0$ として求められる静的グリーン関数と振動数特性を分離して, 次式のように表される。

$$g_{zz}(\omega; \mathbf{x}_{so}) = \frac{(1 - \nu_p)}{2\pi\mu r} e^{-i\omega t} (f_1 - if_2) \quad (26)$$

吉田 (1994)¹²⁾は, 式(25a)の数値積分を求め, 式(26)の振

動数特性 f_1, f_2 を無次元振動数 $\omega r / C_s$ の関数として数値表を作成している¹⁶⁾。

一方、この場合の直交座標系による動的グリーン関数は、式(24a)を式(17)に代入し、波数による2重フーリエ変換を行って求めることができる。

吉田 (1994)^{12),16)}の数値表による振動数特性 f_1, f_2 と2重フーリエ変換によるものを比較し、図-4に示す。2重フーリエ変換では、表-1と表-2のような半無限弾性体の物性値と次式のような離散化パラメータを用いた。

振動数・波数領域の離散化パラメータ：

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\omega_{\max}}{N_\omega} \\ \Delta\kappa_x &= \frac{2\pi}{L_x} = \frac{2\kappa_{x\max}}{N_\kappa} \\ \Delta\kappa_y &= \frac{2\pi}{L_y} = \frac{2\kappa_{y\max}}{N_\kappa} \end{aligned} \quad (27a)$$

時間・空間領域の離散化パラメータ：

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2\pi}{2\omega_{\max}} \\ \Delta x &= \frac{2\pi}{2\kappa_{x\max}} \\ \Delta y &= \frac{2\pi}{2\kappa_{y\max}} \end{aligned} \quad (27b)$$

フーリエ変換を使った計算では、ポアソン比を0.25, 0.3,

0.4, 0.45 と変えた4ケースに対して振動数特性 f_1, f_2 を無次元振動数の関数として求めた。

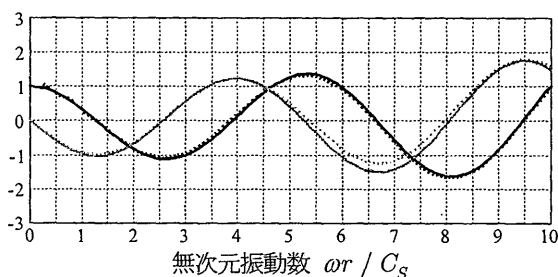
図-4の比較から、両者は殆ど一致しており、直交座標と剛性行列および2重フーリエ変換を用いる本論文の方法の検証がなされたものといえる。このことは、振動数特性 f_1, f_2 の数値表を使わずに、高速2重フーリエ変換(2DFFT)により式(17)を計算することで、振動数特性 f_1, f_2 を求めるもう1つの方法が確立できたことを意味する。

表-1 計算で用いた半無限弾性体の物性値

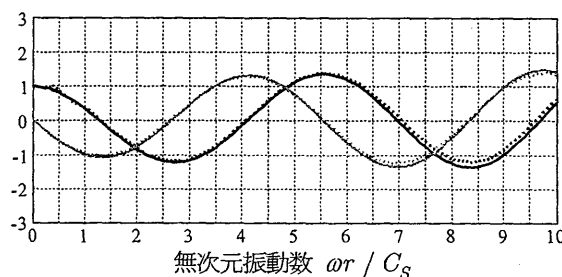
| | | | | | |
|-------|----------------------|------|------|------|------|
| 密度 | [kg/m ³] | 2800 | | | |
| P波速度 | [m/s] | 6000 | | | |
| S波速度 | [m/s] | 3460 | 3210 | 2450 | 1810 |
| ポアソン比 | [-] | 0.25 | 0.30 | 0.40 | 0.45 |
| Q値 | [-] | 100 | | | |

表-2 計算で用いた離散化パラメータ

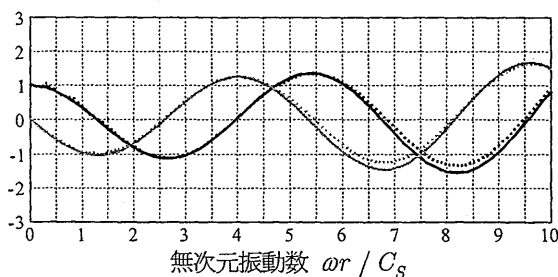
| | | |
|-----------|---------|---------------------------|
| 遮断円振動数 | [rad/s] | 31.4 |
| x方向の遮断波数 | [rad/m] | $\pm 6.28 \times 10^{-3}$ |
| y方向の遮断波数 | [rad/m] | $\pm 6.28 \times 10^{-3}$ |
| 振動数領域の分割数 | [-] | 1024 |
| 波数領域の分割数 | [-] | 1024 |
| 時間間隔 | [s] | 0.1 |
| x方向の空間間隔 | [m] | 500.0 |
| y方向の空間間隔 | [m] | 500.0 |



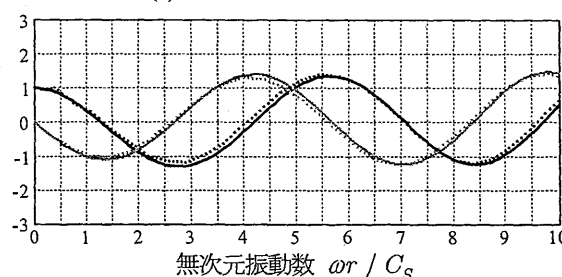
(a) ポアソン比0.25の場合



(c) ポアソン比0.40の場合



(b) ポアソン比0.30の場合



(d) ポアソン比0.45の場合

—— 吉田の研究での f_1 本研究での f_1 —— 吉田の研究での f_2 本研究での f_2

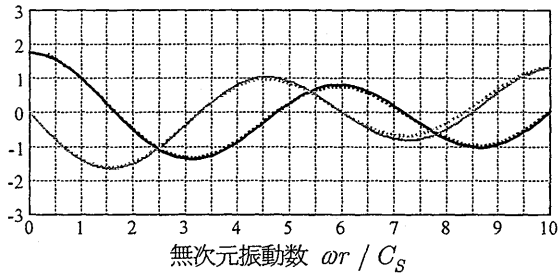
図-4 鉛直荷重による鉛直変位の動的グリーン関数の振動数特性の関数 f_1, f_2 の比較 (実線：吉田の研究^{12),16)}, 点線：本研究)

(2) 水平調和荷重による水平変位の動的グリーン関数の数値解の結果と比較

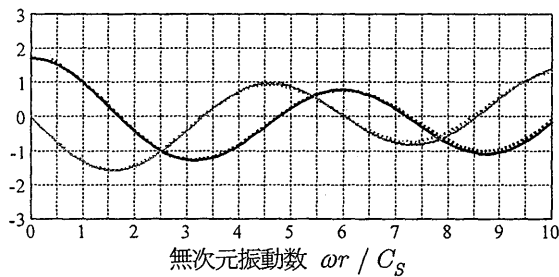
式(25b)の水平調和荷重による水平変位に対する動的グリーン関数に対して、妹沢(1929)¹⁰⁾、田治見(1968)¹¹⁾は、次式のように振動数特性を表す関数 g_1 、 g_2 と h_1 、 h_2 を導入し、式(25b)を次式のように表現し、鉛直荷重と同様に吉田(1994)¹²⁾は、それらの関数の数値表を作成している¹⁶⁾。

$$g_{xz}(\omega; \mathbf{x}_{so}) = \frac{1}{4\pi\mu r} e^{-i\omega t} \times (g_1 - ig_2 + \cos 2\theta(h_1 - ih_2)) \quad (28)$$

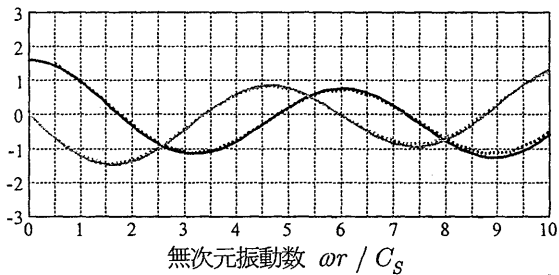
吉田(1994)^{12),16)}の数値表による振動数特性の関数 g_1 、 g_2 と h_1 、 h_2 を、2重フーリエ変換によるものと比較し、図-5に示す。



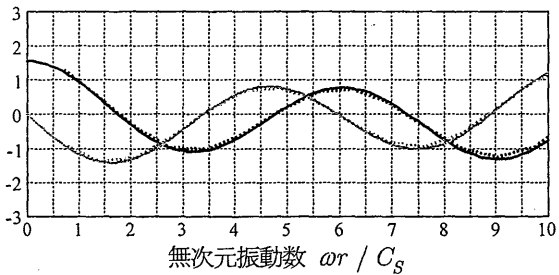
(a) ポアソン比0.25の場合



(b) ポアソン比0.30の場合



(c) ポアソン比0.40の場合



(d) ポアソン比0.45の場合

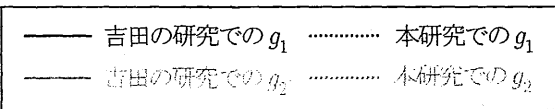
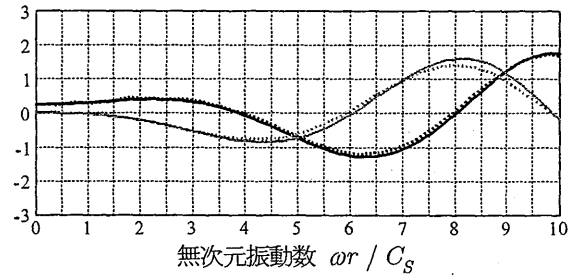
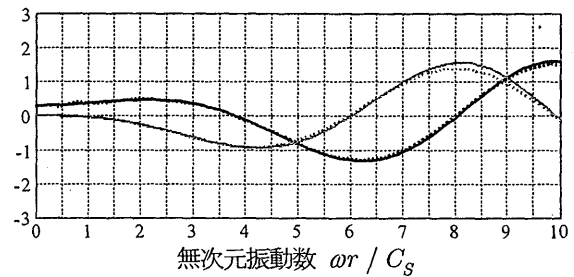


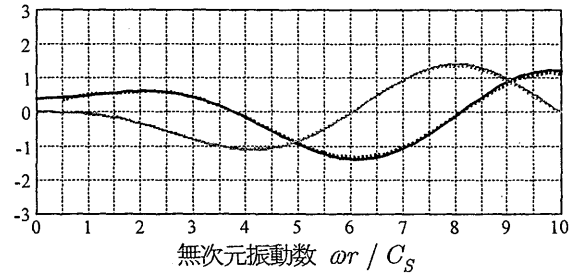
図-5 水平荷重による水平変位の動的グリーン関数の振動数特性の関数 g_1 、 g_2 の比較 (実線: 吉田の研究^{12),16)}, 点線: 本研究)



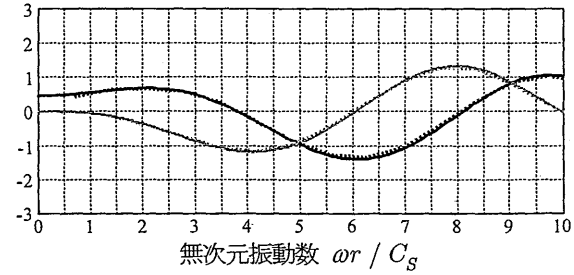
(a) ポアソン比0.25の場合



(b) ポアソン比0.30の場合



(c) ポアソン比0.40の場合



(d) ポアソン比0.45の場合

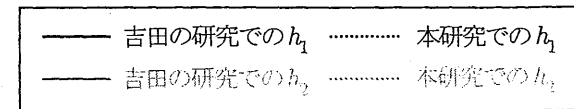


図-6 水平荷重による水平変位の動的グリーン関数の振動数特性の関数 h_1 、 h_2 の比較 (実線: 吉田の研究^{12),16)}, 点線: 本研究)

図-5の比較から、水平荷重による水平変位の場合にも、両者は殆ど一致しており、直交座標と剛性行列および2重フーリエ変換を用いる本論文の方法の検証がなされたものといえる。

4. まとめ

本論文では、直交座標系と剛性行列による水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の定式化を整理して、この定式から、これまで伝統的に行われてきた円筒座標系における3次元動的グリーン関数を導き、両座標系による水平成層弾性体の3次元動的グリーン関数の関係を明確にした。この定式化により、動的グリーン関数が2重フーリエ積分または、ベッセル関数を含む波数に関する1重積分、の2つの方法により計算できることがわかった。従来から用いられてきたベッセル関数を含む波数に関する1重積分は、吉田(1994)¹³が示しているような数値計算上の複雑な工夫が必要となり、また、波数に関する2重フーリエ積分よりも計算上有利のように考えられるが、多数点の変位を計算するためにはその地点数ほど1重積分を繰り返す必要がある。一方、本論文で示した2重フーリエ積分の方法では、離散化高速2重フーリエ変換(2DFFT)により複雑な計算上の工夫無しに1回の計算で多数点の変位が求められる特徴がある。どちらの方法においても、コンピュータの性能向上により極めて短時間(一瞬)で計算が終了する。

2つの方法の数値計算例として、半無限弾性体上の鉛直荷重と水平荷重による3次元動的グリーン関数を取り上げ、円筒座標系による数値解を求めた吉田(1994)^{12,10}の結果が、直交座標系の定式化による波数に関する高速2重フーリエ変換(2DFFT)により効率よく求められることがわかった。

参考文献

1) 齊藤将司, 原田隆典, 王宏沢, 森源次, 山下典彦: 地表面の鉛直方向調和振動荷重による地盤の層厚・弾性定数の推定方法とその数値実験による検証, 応用力学論文集, Vol. 10, pp.593-600, 2007.

- 2) Lamb, H. : On the propagation of tremors at the surface of an elastic solid, *Phi. Trans. Roy. Soc., London*, A203, pp.1-42, 1904.
- 3) Aki, K. and Richards, P. G. : *Quantitative Seismology*, 2nd Edition, University Science Books, 2002.
- 4) 日本建築学会: 地盤震動—現象と理論—, 丸善, 2005.
- 5) Haskell, N. A. : The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, pp.17-34, 1953.
- 6) Luco, J. E. and Apsel, R. J. : On the Green's functions for a layered half-space, Part I, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 73, pp.909-929, 1983.
- 7) Kausel, E. and Roësset, J. M. : Stiffness matrices for layered soils, *Bull. Seism. Soc. Am.*, Vol. 71, pp.1743-1761, 1981.
- 8) Buchon, M. : Discrete wave number representation of elastic wave field in three dimensional space, *J. Geophys. Res.*, Vol. 84, pp.3609-3614, 1979.
- 9) 原田隆典, 王宏沢: 剛性マトリックスによる水平成層地盤の波動解析, 地震第2輯, 第57巻, pp.387-392, 2005.
- 10) 妹沢克惟: Further studies on Rayleigh waves having Some azimuthal distribution, *震研彙報*, vol. 6, 1929.
- 11) 金井清, 田治見宏, 大沢胖, 小林啓美: 建築構造学大系1 地震工学, 第3章—第4章, 1968.
- 12) 吉田一博: 半無限弾性地盤上の矩形基礎の各種の動的地盤ばねについて, *日本建築学会論文報告集*, 第457号, pp. 19-28, 1994.
- 13) 原田隆典, 大角恒雄, 奥倉英世: 3次元直交座標系における波動場の解析解とその地震動波形作成への応用, *土木学会論文集*, No.612/1-46, pp.99-108, 1999.
- 14) 原田隆典: 海洋および内陸型地震の震源域における長大構造物の応答特性の評価とその予測法, 平成13年~平成15年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)研究成果報告書, 宮崎大学工学部, 宮崎大学学術情報リポジリー, <http://hdl.handle.net/10458/1053>, 2004.
- 15) 多谷虎男: ベッセル関数と弾性波動理論, 山海堂, 1986.
- 16) 日本建築学会: 入門・建物と地盤との動的相互作用, 丸善, 1996.

(2011年3月8日 受付)