

CAD を利用した方程式による形状定義 -歯車形状の作成-

鹿児島大学工学部技術部
萩原孝一

はじめに

機械要素には、カムや歯車など方程式で定義されている形状のものが多く存在する。従来利用していた CAD/CAM システムでは、そのような形状を直接定義する方法がなく、その形状上の複数点の座標値を外部で別途計算し点列を作成、それを結ぶ直線で近似して表現し、作図や加工に利用していた。しかしながら、精度を上げるためには計算点数が膨大になることや、扱える点列の個数に制限があり、精度上の限界があるなどの問題があった。CAD 上で必要とする曲線を方程式によって定義することができれば、前述の制限から解放され高精度化および作業の省力化がはかれる。

近年鹿児島大学学術情報基盤センターに、パラメトリック修正機能やリレーショナル機能および方程式によって曲線を定義する機能をもつ 3 次元 CAD (Pro Engineer Wildfire, 以下 pro/e) が導入され、利用可能となった。今回方程式で定義される形状の代表である歯車形状の作成を pro/e を使用して行ったので、その手順をここに報告する。

キーワード : 3 次元 CAD インボリュート曲線 リレーショナル機能 パラメトリック修正機能

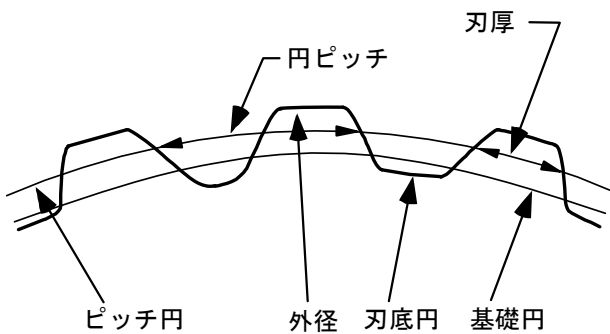


図 1 歯車の用語

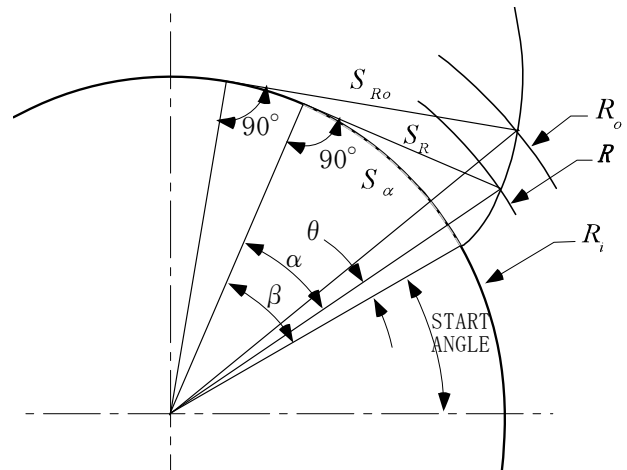


図 2 インボリュート曲線の定義

1. 歯車の用語

今回作成したものは平歯車で、それを定義する主な用語と標準寸法は図 1 および以下の式のとおりである。

歯数	Z
モジュール	$m = D_0 / Z$
ピッチ円直径	$D_0 = Z * m$
刃先円直径	$D_k = (Z + 2) * m$
基礎円直径	$D_g = Z * m * \cos \theta$
刃底円直径	$D_r = (Z - 2 - 2k)m$
円ピッチ	$t_0 = \pi m$

pro/e 上で作図される際には、リレーショナル機能という各寸法間の関連を定義できる機能によって、上式の関係を保つように各寸法が制御される。また、寸法はパラメータとして扱われるた

め、パラメトリック修正機能により、大きさの違う歯車の作成も、寸法値を変化させることで比較的簡単に実現できる。

作成した歯車の諸元を表 1 に示す。

表 1 作成した歯車の諸元

歯形	並刃	
モジュール	m	4
圧力角	θ	20°
刃数	Z	14

2. CAD でのインボリュート曲線の作成

2.1 インボリュート曲線を定義する方程式

方程式を基にデータ曲線を作成する機能を利用するので、はじめに歯車の歯形曲線を表現する方程式を求めなければならない。

歯車にはインボリュートおよびサイクロイド歯形があるが、広く使われているのはインボリュート歯形である。インボリュート曲線は図 2 のように幾何的に定義される曲線である。この幾何的關係から、インボリュート曲線を表現する方程式を円柱座標系にて求める。

ここで、

$$R_i = \text{基礎円直径}/2$$

$$R_o = \text{刃先円直径}/2$$

$$R = \text{インボリュート曲線上のある一点における半径}$$

$$S_\alpha = \text{基礎円におけるインボリュート曲線開始点と } R \text{ に達する接線との接点間の円弧長}$$

$$S_R = \text{インボリュート曲線上の任意の点までの接線の長さ}$$

$$S_{Ro} = \text{刃先円とインボリュート曲線が交わる点までの接線長さ}$$

$$\beta = \text{インボリュート曲線開始点と基礎円上の接点間の角度}$$

$$\theta = R_i \text{ から } R_o \text{ に至るインボリュート曲線上の任意の位置における開始点からの角度}$$

$$\alpha = \text{インボリュート曲線上のある点とそこからの基礎円への正接点とでなす角度}$$

$$\text{START_ANGLE} = \text{水平な軸からインボリュート曲線が始まる位置までの角度}$$

とする。

インボリュート曲線の定義より、

$$S_\alpha = S_R = \left(\frac{2 * \pi}{360} \right) * R_i * \beta$$

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{S_\alpha}{R_i} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{S_R}{R_i} \right)$$

S_R は 0 から S_{Ro} まで線形に変化するの、0 から 1 まで線形に変化する変数 t を導入し、

$$S_R = S_{Ro} * t$$

とする。ピタゴラスの定理より、

$$R = \sqrt{S_R^2 + R_i^2}$$

同様に

$$S_{Ro} = \sqrt{R_o^2 - R_i^2}$$

ここで、 S_R を $S_{Ro} * t$ で置き換え、

$$R = \sqrt{(S_{Ro} * t)^2 + R_i^2}$$

とする。

次に、 β を求めるために、前述の式

$$S_R = \left(\frac{2\pi}{360} \right) * R_i * \beta$$

より、 S_R を $S_{Ro} * t$ で置き換え、 β について書き換えると、

$$\beta = \frac{S_{Ro} * t}{R_i} * \left(\frac{360}{2\pi} \right)$$

となる。

また、 α を求めるために、前述の式

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{S_R}{R_i} \right)$$

において、 S_R を $S_{Ro} * t$ で置き換え、

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{S_{Ro} * t}{R_i} \right)$$

とする。 θ を表す式は、 $\theta = \beta - \alpha$ なので、

$$\theta = \left(\frac{S_{Ro} * t}{R_i} * \left(\frac{360}{2\pi} \right) \right) - \left(\tan^{-1} \left(\frac{S_{Ro} * t}{R_i} \right) \right)$$

となる。

R_o 、 R_i および t を変数とする式を求めるために、新たに変数 γ を

$$\gamma = S_{Ro} * t$$

と定義する。これで S_{Ro} を置き換え、

$$\gamma = \sqrt{R_o^2 - R_i^2} * t \tag{1}$$

とし、 R についての式、

$$R = \sqrt{(S_{Ro} * t)^2 + R_i^2}$$

これを γ で置き換え、

$$R = \sqrt{\gamma^2 + R_i^2} \tag{2}$$

を得、同様の置き換えを θ の式についても行い、

$$\theta = \left(\frac{\gamma}{R_i} * \left(\frac{360}{2\pi} \right) \right) - \left(\tan^{-1} \left(\frac{\gamma}{R_i} \right) \right) \tag{3}$$

を得る。

Pro/TABLE TM Wildfire 3.0 (c) 2006 by Parametric Technology Corporation A	
ファイル(E) 編集(E) ビュー(V) フォーマット(O) ヘルプ(H)	
	C1 C2
R1	/* 円柱座標系にパラメトリック方程式を入力します。
R2	/* r, theta(θ), zの値を定義する方程式では、tの値は0~1になります。
R3	/* 例: x-y平面の円では基準を中心とします。
R4	/* そして、半径=4の場合、パラメトリック方程式は次のようになります:
R5	/* r = 4
R6	/* theta(θ) = t * 360
R7	/* z = 0
R8	/*-----
R9	solve
R10	gamma=t*(sqrt((major_dia/2)^2-(base_dia/2)^2))
R11	for gamma
R12	r = sqrt(gamma^2+(base_dia/2)^2)
R13	theta=start_angle+(gamma*(360/(2*pi*(base_dia/2)))-atan(gamma/(base_dia/2)))
R14	Z=0
R15	
R16	

図3 方程式テーブル

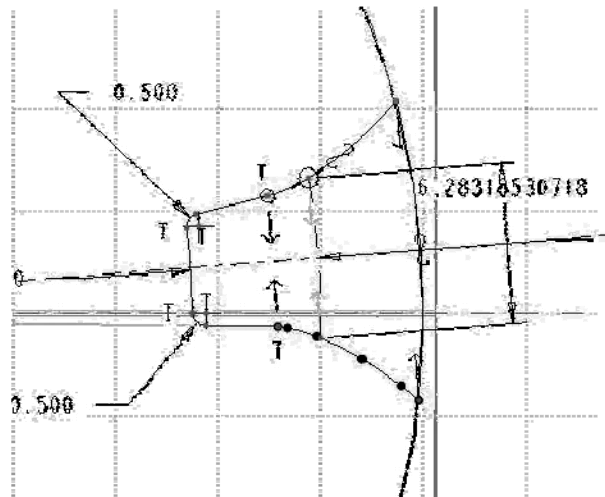


図5 歯形の断面

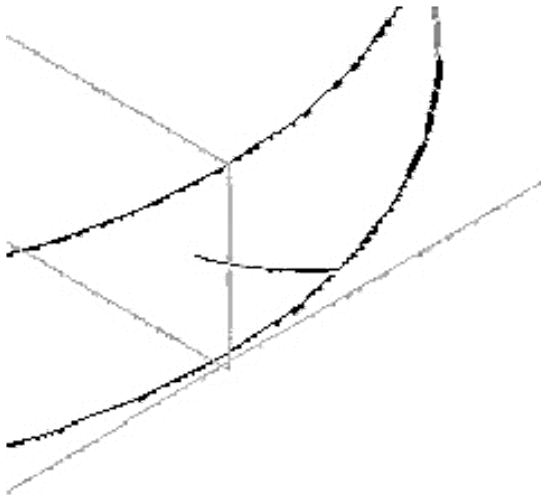


図4 インボリュート曲線

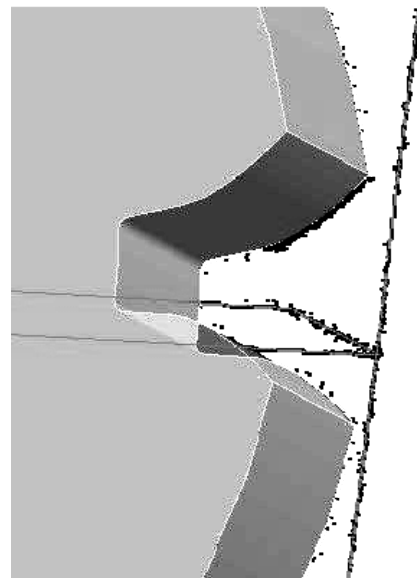


図6 歯形のカット

2.2 インボリュート曲線の作成

pro/eにて方程式で定義されるデータム曲線を作成するコマンドを実行し、(1)、(2)および(3)式を図3のように方程式テーブルに記述する。

入力が完了すると、図4のようにインボリュート曲線がデータム曲線として作成される。

3. 歯車形状の完成

作成したデータム曲線を使用して、歯形となる外形線を作図する。中心線を引いて先に作成した曲線をミラーコピーする。この際、円ピッチと刃厚をリレーションとして関連づけてインボリュート曲線間の距離を調節する。図5に歯形断面を示す。

この歯形断面で、歯車の基となる円盤をカットし、図6のような歯車の1つの谷を作る。

つづいて、先ほどのカットを歯数分中心周りにパターン化すると、図7の歯車形状が完成する。

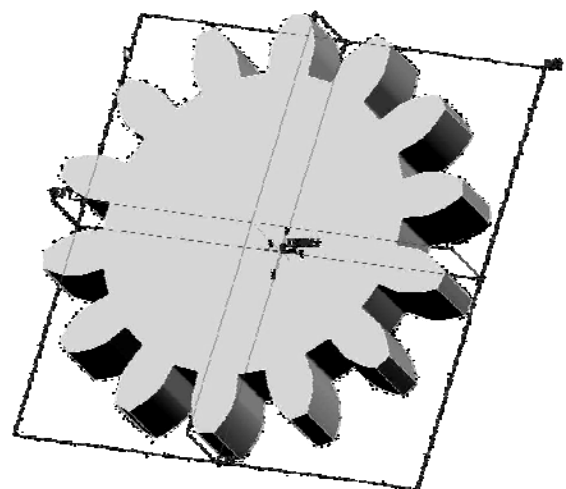


図7 完成した歯車

4. 製品形状の加工

今回、最終的に必要な形状は図 8 に示す 2 分割された押出加工用のダイであったため、先に作成した歯車形状と半月型の板形状との差をとることで、求める形状のモデリングを完了した。

この形状を基に、ワイヤカット放電加工機で切り出すよう CAM で加工経路を作成し、加工して、製品とした。

5. まとめ

これまで表計算ソフトウェアなどで点列の座標を計算し、それを直線近似で作図するという手間がかかっていた複雑な曲線の作成が、単一の CAD システム上で行えることが確認できた。使いこなしに当たっては、求める曲線をどのように計算式で表現するかという、幾何学的問題に対応する能力を養う必要があるということを痛感したが、機会があれば他形状の作成にも応用してみたい。

また、今回の事例は pro/e の豊富な機能の一部を利用したに過ぎず、他の機能を利用することでより高度な設計環境を手に入れることができる。これからも新たな機能の習得に努めて設計製作のさらなる高度化に貢献していきたい。

参考文献

- 1) Parametric Technology Corporation, Suggested Technique for the Creation of an Involute Gear Cutting (Three Methods) (http://www.ptc.com/cs/cs_22/howto/agf5043/agf5043.htm),2007
- 2) 機械設計便覧編集委員会編, 新版機械設計便覧, 丸善

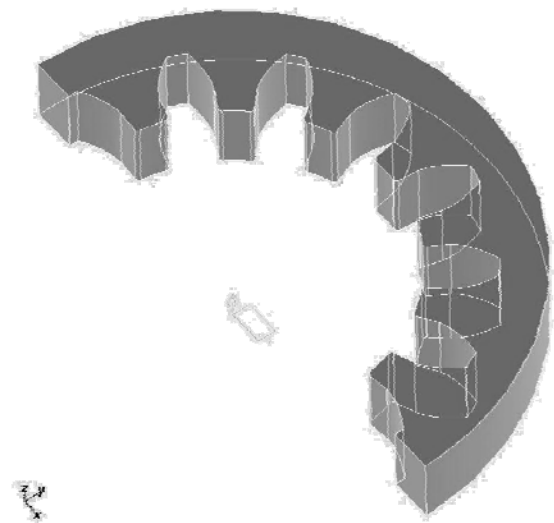


図 8 押出加工用ダイ