

第1章 緒 言

近年の機械・構造物の高速化や軽量化により，従来では起こりえなかった振動問題が発生することがある．問題としている振動が，線形近似モデルを用いた解析で説明が可能である場合には，モード解析等の線形振動解析手法を用いることで十分に対応は可能である．しかしながら，線形振動解析ではまったく説明できない振動現象が発生している場合，その原因は系に内在する非線形性であることが多く，そのような系においては，系の非線形性を考慮した解析を行うことが必要となる．

非線形振動系において，一般に厳密な解を求めることは不可能であるため，非線形振動系の解析を行うには各種の近似解法や数値解法に頼らざるを得ない．非線形振動系の解析のための解法は，過去多くの研究者によって様々な手法が提案されてきた．現在，頻繁に利用されている解法としては，解析的近似解法では平均法⁽¹⁾，調和バランス法⁽²⁾，多重尺度法⁽³⁾，数値解法ではルンゲ・クッタ・ギル法やシューティング法⁽⁴⁾などを挙げることができる．これらの解法は，それぞれが長所・短所を併せ持ち，解くべき運動方程式の性質と解析目的によって，最適なものを選択する必要がある．非線形振動問題において，広範囲な系に対して適用でき，かつ高精度な解析手法の開発は長年多くの研究者が取り組んできた大きなテーマであり，適用範囲，精度，演算量などの様々な要求を完全に満足する決定的な解析手法は未だ開発されていないのが現状である．

前述の非線形振動系に対する解法のうち，平均法は，近似解が閉じた形で求められること，適用対象が形式的にはかなり広範囲であること，計算手続きが比較的容易であること，過渡応答が求められること等の長を有していることもあって，これまで理論的研究の場面で多用されてきた．しかしながら，1項のみの三角関数を母解として用いる従来の平均法は基本的に弱非線形系を対象とする手法であり，高調波成分の影響が大きくなる非線形性の強い系に対しては，定量的のみならず定性的にも不十分な結果しか与えないことが多い．したがって，平均法の上記の特長を活かすためにも，より高精度の近似解が得られるように平均法を改良することは，強非線形系に対する理論的研究を深める上で極めて重要な課題であると考えられる．

このような問題意識に基づいて，これまでに平均法に対するいくつかの改良法が提案されてきた．それらは方法論的見地から次の2種類に大別される．その一つは，三角関数を母解とする平均法によって得られた近似解に対する2次的な精度改善法である⁽⁵⁾．しかしながら，その数式処理には膨大な労力を要するので実用性の面で問題が多い．いま一つは，三角関数に代わるより適切な関数を母解として利用するという方法である⁽⁶⁾⁻⁽¹²⁾．たとえば，Roy⁽¹⁰⁾は，不減衰自由振動の厳密解がヤコビの楕円関数で表される3種類の非線形系を取扱い，その楕円関数を母解として調和外力と粘性減衰が作用するときの定常振動解を求める手法を提案している．上記の課題からすれば，このタイプの改良法には大きな可能性があると考えられるが，現状では適用対象が限

定されるだけでなく、近似解の計算に要する労力に比して十分な精度が得られないものが多い⁽¹³⁾。

本研究では、非線形振動系に対する代表的近似解法である平均法の高性能化を目的として、平均法の母解として、ヤコビの楕円関数を利用した平均法（以後、楕円平均法と呼ぶ）を開発する。本研究で開発する楕円平均法は、ばね関数が変位の1次+3次項で構成される Duffing 系または1次+2次項で構成される2次ばね系に対して、減衰項や外力項等からなる微小な摂動項が付加された系を解析対象としたもので、比較的簡単な計算手続きにより、強い非線形性を有する振動系の定常周期解を求めることができる。本報告書は、以下のような構成となっている。

本報告書の第2章では、Duffing 系を基盤とした系を解析対象とした楕円平均法について述べる。Duffing 系は、変位の1次と3次ばね項の係数の符号の組み合わせにより、それぞれが固有の振動特性をもつ漸硬型、漸軟型、飛移り型振動系（両振りモード、片振りモード）に分類される。著者らは、これらの系を基盤とする振動系の定常周期解を求める方法として、単一项のヤコビの楕円関数を母解として利用した単項型楕円平均法（cn 型平均法、sn 型平均法、dn 型平均法）を開発してきた⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁷⁾。この方法は、基盤となる系の不減衰自由振動解を母解として用いる方法であり、漸硬型 Duffing 系と飛移り型振動系（両振りモード）を基盤とする系には cn 関数を、漸軟型 Duffing 系を基盤とする系には sn 関数を、飛移り型振動系（片振りモード）を基盤とする系には dn 関数を利用するものである。第2章では、3個のヤコビの楕円関数の一般化表記関数（ep 関数）を導入して、これまでは別個に定式化されていた cn 型、sn 型、dn 型平均法の理論展開を統合し、より一般化された形式の単項型楕円平均法について述べる。また、楕円平均法で得られた近似解に対する安定判別法として、基礎式の変分方程式を利用した安定判別法、および平均化方程式の変分方程式を利用した安定判別法の2つの方法について検討し、楕円平均法に対して最適な安定判別法について検討を行った。

第3章では、ばね関数が、変位に関して1次と2次項で構成される2次ばね系を基盤とする系を解析対象とした楕円平均法⁽¹⁸⁾⁻⁽²⁰⁾について述べる。この方法では、不減衰2次ばね系に自由振動解である sn 関数の自乗関数を平均法の母解として利用し、解が奇数・偶数次のフーリエ級数で構成されるいわゆる非奇数次解を求めることが可能である。

第4章では、第2章で提案した Duffing 系を基盤とする系に対する単項型楕円平均法のさらなる高性能化を目的として、異種の2つの楕円関数を結合した関数を母解とした結合型楕円平均法⁽²¹⁾⁻⁽²³⁾について述べる。この結合型楕円平均法は、cn 関数と sn 関数を結合した関数を母解として利用するものである。単項型楕円平均法と比較して、この方法は、広範な非線形振動系の近似解を求めることが可能であり、単項型楕円平均法よりさらに高精度な近似解を求めることが可能である。さらには、単項型楕円平均法では求めることが不可能であった高調波振動や分数調波振動の定常周期解をも計算することが可能である。

第5章は、本研究の結論である。

なお、2～4章については、各章ごとに具体的な例題に対する数値計算結果を示した。これらの数値計算では、高精度数値解法であるシューティング法による高精度数値解および従来の三角関数を母解とした平均法との比較を行い、本研究で提案した本手法の有効性について検証を行った。

第2章 Duffing系を基盤とする系に対する単項型楕円平均法

2.1 基礎式

非線形復元力 $S(x)$ が

$$S(x) = \beta_1 x + \beta_3 x^3, \quad (\beta_1 = \pm 1, \beta_3 = \pm 1) \quad \dots\dots\dots(2.1)$$

のように変位 x に関する 1 次線形ばね項と 3 次の非線形ばね項で記述される振動系は、一般に **Duffing** 型振動系と称され、非線形振動系の最も代表的な非線形振動モデルとして知られている。この **Duffing** 型振動系は、ばね関数中のパラメータ β_1, β_3 の値により、振動特性の異なる 3 種の振動系（漸硬型、漸軟型、飛移り型）に分類される。図 2.1 には、これら 3 振動系の復元力特性を示した。本章では、まず、楕円平均法の母解として利用される 3 振動系の自由振動解について概論する。その後、漸硬型、漸軟型、飛移り型の **Duffing** 型振動系を基盤とする系の強制振動の定常周期解を簡便かつ高精度に求める方法として、単一項のみのヤコビの楕円関数を母解として利用した楕円平均法（以後、単項型楕円平均法と呼ぶ）について論じる。

本章では、次のようなダフイング方程式に基づく周期系の無次元化非線形常微分方程式を解析の対象とする。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \beta_1 x + \beta_2 x^3 &= \varepsilon f(\omega t, x, \dot{x}) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= f(\omega t + 2\pi, x, \dot{x}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.2)$$

ここに、 x は変位を表す無次元変数、 t および ω はそれぞれ時間および角振動数を表すパラメータであり、“ \cdot ” は t に関する微分を示す。また、 ε はダフイング方程式に対する摂動項 f の大きさを表す微小パラメータである。この摂動項 f は、強制力項、減

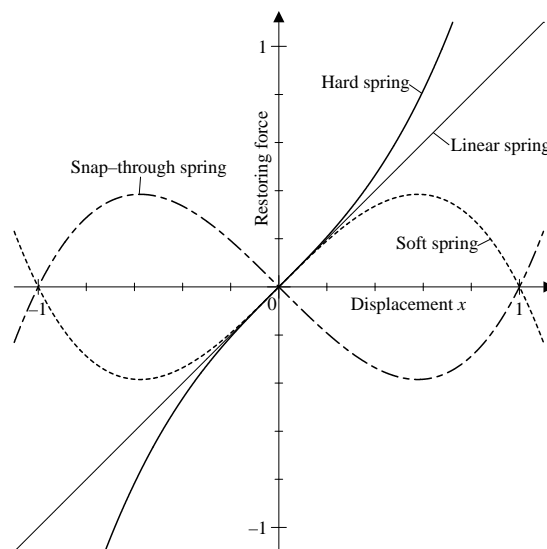


図2.1 Duffing型振動系の復元力特性

衰力項, x^3 以外の非線形復元力項から構成される. また, 右辺のばね関数中のパラメータ β_1, β_3 の値の組み合わせにより, 式(2.2)の右辺は, 次の振動系に分類される.

- a) 漸硬型 Duffing 振動系 : $\beta_1 = \beta_3 = 1$
- b) 漸軟型 Duffing 振動系 : $\beta_1 = 1, \beta_3 = -1$
- c) 飛移り型 Duffing 振動系 : $\beta_1 = -1, \beta_3 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{c-1) 両振りモード} \\ \text{c-2) 片振りモード} \end{array} \right.$

漸硬型及び漸軟型 Duffing 振動系の自由振動解は, 解の調波成分が 1, 3, 5... 次の奇数次のフーリエ級のみで構成されるいわゆる奇数次解であり, 振動波形は対称波形となる. 一方, 飛移り型 Duffing 振動系には, 2 個の安定平衡点 ($x = \pm 1$) と 1 個の不安定平衡点 ($x = 0$) が存在し, 与えられた初期条件の相違により, これらの 3 個の平衡点まわりに振動する別個な 3 種の振動解が存在する. 本報告では, この安定平衡点 $x = -1$ または $x = 1$ まわりに振動する振動解を, 片振りモード (Half-swing mode) の解と呼ぶ. この片振りモードの解は, 奇数次及び偶数次のフーリエ級数で構成される非奇数次解であり, その振動波形は非対称波形となる. 安定平衡点 $x = 1$ と $x = -1$ まわり振動する 2 つの片振りモード解は互い符号を反転したのみの解である. 一方, 飛移り型 Duffing 振動系には, 不安定平衡点である $x = 0$ まわりに振動する解が存在し, その解を両振りモード (Full-swing mode) の解と呼ぶ, 両振りモードの解は奇数次解であり, その振動波形は対称波形である. このモードでは, 3 個の平衡点をすべて通過する大振幅振動が発生する.

2.2 ヤコビの楕円関数に対する一般化表記とその微分公式

3 種類のヤコビの楕円関数, すなわち cn 関数, sn 関数, dn 関数を総括的に次のように一般化表記関数 $ep(v, k)$ を用いて表現する.

$$ep(v, k) = sn(v, k) \cup cn(v, k) \cup dn(v, k) \quad \dots\dots\dots(2.3)$$

各ヤコビの楕円関数の v に関する偏微分は次式で表される.

$$\left. \begin{array}{l} sn'(v, k) = cn(v, k) dn(v, k) \\ cn'(v, k) = -sn(v, k) dn(v, k) \\ dn'(v, k) = -k^2 sn(v, k) cn(v, k) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

ただし, " ' " = $\partial / \partial v$ である. この一般化関数 $ep(v, k)$ の v に関する偏微分を次式で表わす.

$$\frac{\partial ep(v, k)}{\partial v} = ep'(v, k) \quad \dots\dots\dots(2.5)$$

さらに, $ep(v, k)$ に関する 2 階偏微分は次式となる.

$$\frac{\partial^2 \text{ep}(v, k)}{\partial v^2} = \text{ep}''(v, k) = 2\rho_1 \text{ep}^3(v, k) + \rho_2 \text{ep}(v, k) \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

式(2.5),(2.6)中の $\text{ep}'(v, k)$, ρ_1 , ρ_2 は, $\text{ep}(v, k)$ に対応する関数によって定義される関数であり, その定義を表 2.1 に示した. さらに, 楕円関数の微分公式⁽²⁶⁾を利用することにより, $\text{ep}(v, k)$ の母数 k に関する微分公式として次式を得る.

$$\frac{\partial \text{ep}(v, k)}{\partial k} = \frac{1}{k(k')^2} \left[\left\{ \left((k')^2 - \frac{E}{K} \right) v - Z(v, k) \right\} \text{ep}'(v, k) + \rho_1 \{1 - \text{ep}^2(v, k)\} \text{ep}(v, k) \right] \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

ここに, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ は楕円積分の補母数, $Z(v, k)$ はヤコビの zeta 関数⁽²⁵⁾, $K = K(k)$ は第一種完全楕円積分, $E = E(k)$ は第 2 種完全楕円積分である. さらに, $\text{ep}'(v, k)$ の k に関する偏微分は, 楕円関数の微分公式⁽²⁶⁾を利用することにより次式となる.

$$\frac{\partial \text{ep}'(v, k)}{\partial k} = \frac{1}{k(k')^2} \left[\left\{ \left((k')^2 - \frac{E}{K} \right) v - Z(v, k) \right\} \left\{ 2\rho_1 \text{ep}^3(v, k) + \rho_2 \text{ep}(v, k) \right\} - \left\{ 2\rho_1 \text{ep}^2(v, k) + \rho_3 \right\} \text{ep}'(v, k) \right] \quad (2.8)$$

ここで, ρ_3 の定義を表 2.1 に示した.

2.3 Duffing 型振動系の自由振動解

$\varepsilon = 0$ のとき, 式(2.2)は次式となる.

$$\ddot{x} + \beta_1 x + \beta_3 x^3 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

上式は, 不減衰 Duffing 自由振動方程式であり, その自由振動厳密解は, ヤコビの楕円関数を用いて表される^{(27), (28)}. 式(2.9)の自由振動の厳密解 $\hat{x}(t)$ は, 式(2.3)で定義した一般化関数 $\text{ep}(v, k)$ を用いて次式のように表される.

$$\hat{x}(t) = \hat{A} \text{ep}(\hat{v}, \hat{k}), \quad \hat{v} = \hat{\alpha}(\hat{\omega}t + \hat{\theta}), \quad \hat{\alpha} = \frac{nK(\hat{k})}{\pi} \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

表2.1 $\text{ep}(v, k)$ と $\text{ep}'(v, k)$, $\rho_1(k)$, $\rho_2(k)$ and $\rho_3(k)$ の対応

$\text{ep}(v, k)$	$\text{ep}'(v, k)$	$\rho_1(k)$	$\rho_2(k)$	$\rho_3(k)$
$\text{sn}(v, k)$	$\text{cn}(v, k) \text{dn}(v, k)$	k^2	$-(k^2 + 1)$	0
$\text{cn}(v, k)$	$-\text{sn}(v, k) \text{dn}(v, k)$	$-k^2$	$2k^2 - 1$	k^2
$\text{dn}(v, k)$	$-k^2 \text{sn}(v, k) \text{cn}(v, k)$	-1	$-(k^2 - 2)$	k^2

表 2.2 Duffing 型振動系自由振動の厳密解

β_1	β_3	Type of spring property	Exact solution	n	
1	1	Hardening spring system	$\hat{A} \operatorname{cn}(\hat{v}, \hat{k})$	2	
1	-1	Softening spring system	$\hat{A} \operatorname{sn}(\hat{v}, \hat{k})$	2	
-1	1	Snap-through spring system	Full-swing mode	$\hat{A} \operatorname{cn}(\hat{v}, \hat{k})$	2
			Half-swing mode	$\hat{A} \operatorname{dn}(\hat{v}, \hat{k})$	1

ここで、 \hat{A} , $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$ and \hat{k} は、それぞれ自由振動の振幅、振動数、位相、母数である。式(2.10)中の n は、 $\operatorname{ep}(v, k)$ に適用される関数の形によって定義される値であり、表 2.2 に $\operatorname{ep}(v, k)$ の関数形と n の値の対応を示した。また、位相角 $\hat{\theta}$ は一般性を失うことなく任意の値をとることができる。

式(2.10)の $\hat{x}(t)$ を式(2.9)に代入し、式(2.6)の関係式を用いることにより、次式を得る。

$$(2\hat{\alpha}^2\hat{\omega}^2\rho_1 + \beta_3\hat{A}^2)\hat{A}\operatorname{ep}^3(\hat{v}, \hat{k}) + (\hat{\alpha}^2\hat{\omega}^2\rho_2 + \beta_3)\hat{A}\operatorname{ep}(\hat{v}, \hat{k}) = 0. \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

上式の $\operatorname{ep}(v, k)$ と $\operatorname{ep}^3(v, k)$ の係数を零に等値することにより、 \hat{A} , $\hat{\omega}$, \hat{k} 間の関係式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} 2\hat{\alpha}^2\hat{\omega}^2\hat{\rho}_1 + \beta_3\hat{A}^2 &= 0 \\ \hat{\alpha}^2\hat{\omega}^2\hat{\rho}_1 + \beta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

表 2.2 には、Duffing 型自由振動系の振動タイプに対する厳密解の対応を示した。

2.4 Duffing 型振動系を基盤とする系に対する楕円平均法

2.4.1 振動系に対する近似解の仮定 式(2.2)で表される振動系の高精度な定常周期解の近似解を求めるために、非振動系 [式 (2.9)] の自由振動解であるヤコビの楕円関数を平均法の母解として利用する。

式(2.2)の定常周期解の近似解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \operatorname{ep}(v, k) \\ \dot{x}(t) &= -A\alpha\omega \operatorname{ep}'(v, k), \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

ここに、

$$v = \alpha u, \quad u = \omega t + \theta, \quad \alpha = \frac{nK(k)}{\pi} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

であり、未知変数は振幅 $A = A(t)$ 、位相角 $\theta = \theta(t)$ 、楕円関数の母数 $k = k(t)$ の 3 個で

ある. 式(2.2)において $\varepsilon \neq 0$ の摂動系の場合には, これらはいずれも一般に時間 t の関数である [式(2.14)から分かるように, k は A と関係する量であるので, A を時間の関数とみなす以上, k も時間の関数と考えるのが自然である]. ただし, 定常振動状態ではこれらはいずれも定数となり, $x = x(t)$ は t に関して周期 $2\pi/\omega$, u に関して周期 2π , v に関して周期 $2nK$ の関数となる.

式(2.2)の右辺のパラメータ β_1, β_3 の値の組み合わせに対応して, $\text{ep}(v, k)$ に各楕円関数を代入することにより, 次のように各振動系の定常周期解を求めることができる,

- a) $\beta_1 = +1, \beta_3 = +1 \rightarrow \text{ep}(v, k) = \text{cn}(v, k)$: 漸硬型 Duffing 系を基盤とする系
- b) $\beta_1 = +1, \beta_3 = -1 \rightarrow \text{ep}(v, k) = \text{sn}(v, k)$: 漸軟型 Duffing 系を基盤とする系
- c) $\beta_1 = -1, \beta_3 = +1 \rightarrow \text{ep}(v, k) = \text{cn}(v, k)$: 飛移り型 Duffing 系を基盤とする系
(両振りモード)
- d) $\beta_1 = -1, \beta_3 = +1 \rightarrow \text{ep}(v, k) = \text{dn}(v, k)$: 飛移り型 Duffing 系を基盤とする系
(片振りモード)

なお, 以下の議論では, 式表現の簡単化のため, ヤコビの楕円関数の一般化表記関数 $\text{ep}(v, k)$ とヤコビの zeta 関数 $Z(v, k)$ をそれぞれ ep, Z と略記する.

2.4.2 時間微分公式 以後の計算に必要な時間 t に関する微分公式を導出する.

$$\frac{dK}{dk} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

であること⁽²⁶⁾に注意すると, $v = 2K(\omega t + \theta)/\pi$ の時間 t に関する微分は次式となる.

$$\dot{v} = \frac{n}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} u + K(\omega + \dot{\theta}) \right] \dots\dots\dots(2.16)$$

ここに, $k' = \sqrt{1-k^2}$ は補母数, $E = E(k)$ は第 2 種完全楕円積分である. 仮定により, 振幅 A , 位相角 θ および母数 k はいずれも時間 t の関数であること, および式(2.16)の関係を考慮すると, 時間微分の公式は次式のようになる.

$$\frac{d}{dt} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A} + \dot{k} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{n}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left\{ \frac{E}{(k')^2} - K \right\} u + K(\omega + \dot{\theta}) \right] \frac{\partial}{\partial v} \dots\dots\dots(2.17)$$

2.4.3 平均化方程式の導出 式(2.17)の時間微分公式を利用して, 式(2.13)の第 1 式を時間 t に関して微分することにより, 次式を得る.

$$\dot{x} = \dot{A} \text{ep} + A \alpha(\omega + \dot{\theta}) \text{ep}' + \dot{k} \frac{A}{k(k')^2} \varphi_1 \dots\dots\dots(2.18)$$

ここに,

$$\varphi_1 = -Z \text{ep}' + \rho_1(\text{ep} - \text{ep}^3) \dots\dots\dots(2.19)$$

であり, $\tilde{E}(u, k)$ は第 2 種楕円積分を示す. 式(2.18)と式(2.13)の第 2 式とを比較すると,

次の関係式を得る.

$$\dot{A}ep + \dot{\theta}A\alpha ep' + \dot{k}\frac{A}{k(k')^2}\varphi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(2.20)$$

一方, 式(2.13)の第2式を時間微分することにより,

$$\ddot{x} = \dot{A}\alpha\omega ep' + A\alpha^2\omega(\omega + \dot{\theta})\varphi_2 + \dot{k}\frac{A\alpha\omega}{k(k')^2}\varphi_3 \quad \dots\dots\dots(2.21)$$

を得る. ここに, φ_2, φ_3 は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= ep(2\rho_1 ep^2 + \rho_2) \\ \varphi_3 &= \left\{ \frac{E}{K} - (k')^2 - \rho_3 \right\} ep' - 2\rho_1 ep^2 ep' - Z\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.22)$$

結局, 式(2.13)の第1式と式(2.21)を式(2.2)へ代入して整理することによって,

$$\dot{A}\alpha\omega ep' + \dot{\theta}A\alpha^2\omega\varphi_2 + \dot{k}\frac{A\alpha\omega\varphi_3}{k(k')^2} = \varepsilon f(u - \theta, A\text{cn}, -A\alpha\omega\text{sndn}) - \eta \quad \dots\dots\dots(2.23)$$

が求められる. ここに,

$$\eta = \{\beta_1 + \alpha^2\omega^2\rho_2\}Aep + (\beta_3A^2 + 2\alpha^2\omega^2\rho_1)Aep^3 \quad \dots\dots\dots(2.24)$$

ところで, $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき明らかに $A \rightarrow \hat{A}, k \rightarrow \hat{k}$ であるから, 式(2.12)の関係を考慮すれば, ε が微小のとき, 式(2.24)の Aep および Aep^3 の係数はいずれも微小量となる. よって, 式(2.23)の右辺は微量となるので, $\dot{A}, \dot{\theta}, \dot{k}$ も微小量(時間に関してゆっくりと変化する関数)とみなすことができる. したがって, これらの量に対して通常の方法と同様の平均化処理を施すことが可能である. ところが, 今の場合には, 未知変数が A, θ, k の3個であるのに対し, これら3変数の間の関係式が式(2.20)および式(2.23)の2本しか存在しないので, 求解問題としては不適である. そこで, この問題に対処するために, まず式(2.20), (2.23)から $\dot{A}, \dot{\theta}, \dot{k}$ をそれぞれ個別に消去することによって3本の関係式を求める. 次に, 短い時間範囲内では A, θ, k を定数とみなせるので, これら3本の関係式を $u (= \pi v / 2K = \omega t + \theta)$ に関して1周期($0 \sim 2\pi$)にわたって平均化し, 3本の独立な平均化方程式を導出する.

平均化処理を行う過程で, 楕円関数のフーリエ級数展開 (q 展開⁽²⁴⁾)が重要な役割を果たす. これらがどのような項に展開されるか, 以下の議論に必要なものを整理すると, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}, \text{sn cn}, \text{sndn} &\rightarrow \sin \frac{(2m+1)n}{2} u, \quad \text{cn}, \text{cn dn} \rightarrow \cos \frac{(2m+1)n}{2} u \\ \text{dn} &\rightarrow \cos mnu, \quad Z \rightarrow \sin(m+1)u \\ \varphi_1, \varphi_2 &\rightarrow \sin \frac{(2m+1)n}{2} u, \quad \varphi_3 \rightarrow \cos \frac{(2m+1)n}{2} u \quad (\text{ep} = \text{cn} \cup \text{dn}) \\ \varphi_1, \varphi_2 &\rightarrow \cos \frac{(2m+1)n}{2} u, \quad \varphi_3 \rightarrow \sin \frac{(2m+1)n}{2} u \quad (\text{ep} = \text{sn}) \end{aligned} \right\} (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\dots\dots\dots(2.25)$$

以下の式中において“ $\bar{}$ ”が付された変数や記号は、平均化処理が施された量であることを示す。また、 $\bar{K} = K(\bar{k})$, $\bar{E} = E(\bar{k})$, $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{k}) = n\bar{K}/\pi$ である。

まず、式(2.20), (2.23)から \dot{A} を消去したのちに、式(2.25)の性質と三角関数の直交性を考慮して、 u に関して 1 周期にわたる平均化を行うと、

$$\dot{\theta}\bar{A}\omega\bar{\Psi}_1 + \bar{A}\omega^2\bar{\Psi}_2 + \beta_1\bar{A}\bar{\Psi}_3 + \beta_3\bar{A}^3\bar{\Psi}_4 = \varepsilon\bar{H}_1 \quad \dots\dots\dots(2.26)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= \Psi_1(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} (\varphi_2 \text{ep} - \text{ep}'^2) du, & \bar{\Psi}_2 &= \Psi_2(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_2 \text{ep} du \\ \bar{\Psi}_3 &= \Psi_3(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \text{ep}^2 du, & \bar{\Psi}_4 &= \Psi_4(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \text{ep}^4 du \\ \bar{H}_1 &= H_1(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) = \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \text{ep}, \bar{A}\omega\bar{\alpha} \text{ep}') \text{ep} du. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.27)$$

次に、式(2.20), (2.23)から $\dot{\theta}$ を消去したのちに同様の操作を行うことにより、

$$\dot{A}\omega\bar{\Psi}_5 + \dot{k}\bar{A}\omega\bar{\Psi}_6 = \varepsilon\bar{H}_2 \quad \dots\dots\dots(2.28)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_5 &= \Psi_5(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{\alpha}} \bar{\Psi}_1, & \bar{\Psi}_6 &= \Psi_6(\bar{k}) = \frac{\bar{\alpha}}{k(\bar{k}')^2} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 \varphi_2 - \varphi_3 \text{ep}') du \\ \bar{H}_2 &= H_2(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) = - \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \text{ep}, \bar{A}\bar{\alpha}\omega \text{ep}') \text{ep}' du. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.29)$$

さらに、式(2.20), (2.23)から \dot{k} を消去したのちに同様の操作を行うことにより、

$$\dot{\theta}\bar{A}\omega\bar{\Psi}_7 + \bar{A}\omega^2\bar{\Psi}_8 + \beta_1\bar{A}\bar{\Psi}_9 + \beta_3\bar{A}^3\bar{\Psi}_{10} = \varepsilon\bar{H}_3 \quad \dots\dots\dots(2.30)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Psi}_7 &= \Psi_7(\bar{k}) = \bar{\alpha}\bar{k}(\bar{k}')^2\bar{\Psi}_6, & \bar{\Psi}_8 &= \Psi_8(\bar{k}) = \bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_1 \varphi_2 du \\ \bar{\Psi}_9 &= \Psi_9(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_1 \text{ep} du, & \bar{\Psi}_{10} &= \Psi_{10}(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_1 \text{ep}^3 du \\ \bar{H}_3 &= H_3(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}) = \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \text{ep}, \bar{A}\omega\bar{\alpha} \text{ep}') \varphi_1 du. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.31)$$

式(2.26)~(2.31)中の \bar{H}_1 , \bar{H}_2 , \bar{H}_3 は、解析の対象とする個々の振動系ごとに定義される関数であり、式(2.2)の右辺の摂動項 f に依存してその結果が変化する。一方、 $\bar{\Psi}_1 \sim \bar{\Psi}_{10}$ はすべて母数 \bar{k} のみの関数であり、 f に依存しない。しかも、これらは解析的に求めることが可能であり、その結果は次のようになる。

(a) ep = cn の場合

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\Psi}_1 &= \frac{16\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_1, \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{\bar{\Psi}_1}{2}, \quad \bar{\Psi}_3 = \frac{2\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2 \right\} \\
 \bar{\Psi}_4 &= \frac{2\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ 2(2\bar{k}^2 - 1) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + (2 - 3\bar{k}^2)(\bar{k}')^2 \right\}, \quad \bar{\Psi}_5 = \frac{8\bar{K}}{3\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_1 \\
 \bar{\Psi}_6 &= \frac{4\bar{K}}{3\bar{k}^3(\bar{k}')^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_7 = \frac{8\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_8 = \frac{\bar{\Psi}_7}{2}, \quad \bar{\Psi}_9 = -\frac{\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - (\bar{k}')^2 \right\} \\
 \bar{\Psi}_{10} &= \frac{\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} + 2(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 3(\bar{k}')^4 \right\} \\
 \bar{\Gamma}_1 &= (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2, \quad \bar{\Gamma}_2 = (1 - 2\bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - 4(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + 3(\bar{k}')^2.
 \end{aligned} \right\} \dots(2.32)$$

(b) ep = sn の場合

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\Psi}_1 &= -\frac{16\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_1, \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{\bar{\Psi}_1}{2}, \quad \bar{\Psi}_3 = -\frac{2\pi}{\bar{k}^2} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 1 \right) \\
 \bar{\Psi}_4 &= -\frac{2\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ 2(1 + \bar{k}^2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (2 + \bar{k}^2) \right\}, \quad \bar{\Psi}_5 = \frac{8\bar{K}}{3\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_1 \\
 \bar{\Psi}_6 &= \frac{4\bar{K}}{3\bar{k}^3(\bar{k}')^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_7 = \frac{8\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_8 = \frac{\bar{\Psi}_7}{2}, \quad \bar{\Psi}_9 = -\frac{\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - (\bar{k}')^2 \right\} \\
 \bar{\Psi}_{10} &= -\frac{\pi}{3\bar{k}^4} \left\{ (1 + \bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} + 2(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 3(\bar{k}')^2 \right\} \\
 \bar{\Gamma}_1 &= (1 + \bar{k}^2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2, \quad \bar{\Gamma}_2 = (1 + \bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - 4(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + 3(\bar{k}')^4
 \end{aligned} \right\} \dots(2.33)$$

(c) ep = dn の場合

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\Psi}_1 &= \frac{4\bar{K}^2}{3\pi} \bar{\Gamma}_1, \quad \bar{\Psi}_2 = \frac{\bar{\Psi}_1}{2}, \quad \bar{\Psi}_3 = 2\pi \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \\
 \bar{\Psi}_4 &= \frac{2\pi}{3} \left\{ 2(2 - \bar{k}^2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2 \right\}, \quad \bar{\Psi}_5 = -\frac{4\bar{K}}{3\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_1, \quad \bar{\Psi}_6 = \frac{2\bar{K}}{3\bar{k}^3(\bar{k}')^2} \bar{\Gamma}_2 \\
 \bar{\Psi}_7 &= -\frac{2\bar{K}^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_8 = -\frac{K^2}{3\pi\bar{k}^2} \bar{\Gamma}_2, \quad \bar{\Psi}_9 = -\frac{\pi}{\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - 2(\bar{k}')^2 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + (\bar{k}')^2 \right\} \\
 \bar{\Psi}_{10} &= \frac{\pi}{3\bar{k}^2} \left\{ (\bar{k}^2 - 2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} + 4(\bar{k}')^4 \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 2(\bar{k}')^4 \right\} \\
 \bar{\Gamma}_1 &= (\bar{k}^2 - 2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + 2(\bar{k}')^2, \quad \bar{\Gamma}_2 = (2 - \bar{k}^2) \frac{\bar{E}^2}{\bar{K}^2} - 2(\bar{k}')^2(\bar{k}^2 + 2) \frac{\bar{E}}{\bar{K}} + (\bar{k}')^2(\bar{k}^2 + 2).
 \end{aligned} \right\} \dots(2.34)$$

2.4.4 定常周期解の決定 定常周期振動では $\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{\theta}} = \dot{\bar{k}} = 0$ なので、その状態における \bar{A} , \bar{k} , $\bar{\theta}$ を求めるための方程式は、式(2.26), (2.28), (2.30)より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}\omega^2\bar{\Psi}_2 + \bar{A}\bar{\Psi}_3 + \bar{A}^3\bar{\Psi}_4 &= \varepsilon\bar{H}_1 \\ \varepsilon\bar{H}_2 &= 0 \\ \bar{A}\omega^2\bar{\Psi}_8 + \bar{A}\bar{\Psi}_9 + \bar{A}^3\bar{\Psi}_{10} &= \varepsilon\bar{H}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.35)$$

式(2.35)は、 \bar{A} , $\bar{\theta}$, \bar{k} に関する非線形代数方程式であるから、これをニュートン法などの数値解法を利用して解くことによって、式(2.2)の定常周期振動の近似解が求められる。

本手法は、摂動項 f を変更することにより、Duffing 型振動系を基盤とする種々の振動系に対して適用することができる。その場合、式(2.27), (2.29), (2.31)で定義される $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_3$ のみを f に対応して計算すればよい。しかしながら、任意の f に対して $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_3$ を解析的に計算することは困難である。このような場合には、これらの積分計算には数値積分や FFT を利用すればよい。これにより、簡単に式(2.2)の定常振動の近似解を高精度で求めることができる。これが本手法の特長である。

2.4.5 通常の方法との関係 本節と次節の議論は、 $\text{ep} = \text{cn} \cup \text{sn}$ の場合に限定する。ヤコビの楕円関数および第1種、第2種完全楕円積分は、母数が $k=0$ のとき、次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \text{cn}(u, 0) = \cos u, \quad \text{sn}(u, 0) = \sin u, \quad \text{dn}(u, 0) = 1 \\ Z(u, 0) = 0, \quad K(0) = E(0) = \pi/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.36)$$

このとき、式(2.13)の母解は、

$$\left. \begin{aligned} x = A \cos \omega t, \quad \dot{x} = -A\omega \sin \omega t \quad (\text{for ep} = \text{cn}) \\ x = A \sin \omega t, \quad \dot{x} = A\omega \cos \omega t \quad (\text{for ep} = \text{sn}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.37)$$

となり、通常の方法に一致する。 $K, E, E/K$ は、次のような k に関するべき級数で展開できる⁽²⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + o(k^6) \right\} \\ E &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + o(k^6) \right\} \\ \frac{E}{K} &= 1 - \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{16}k^4 + o(k^6). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.38)$$

ゆえに、式(2.35)に対して $k \rightarrow 0$ の極限計算を行うと、第1式および第2式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (\beta_1 - \omega^2)\bar{A} + \frac{3}{4}\beta_3\bar{A}^3 &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \cos u, -\bar{A}\omega \sin u) \cos u \, du \\ \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \cos u, -\bar{A}\omega \sin u) \sin u \, du &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(for ep = cn)}$$

.....(2.39)

$$\left. \begin{aligned} (\beta_1 - \omega^2)\bar{A} + \frac{3}{4}\beta_3\bar{A}^3 &= \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \sin u, \bar{A}\omega \cos u) \sin u \, du \\ \int_0^{2\pi} f(u - \bar{\theta}, \bar{A} \sin u, \bar{A}\omega \cos u) \cos u \, du &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(for ep = sn)}$$

.....(2.40)

式(2.39), (2.40)は三角関数を母解とする通常の方法による定常周期解の決定方程式と一致している。また, $\bar{k} \rightarrow 0$ のとき $\bar{\Psi}_8, \bar{\Psi}_9, \bar{\Psi}_{10}, \bar{H}_3 \rightarrow 0$ なので, 式(2.39), (2.40)の第3式は恒等的に成立する。このように, $k \neq 0$ の場合の楕円平均法は, 三角関数を母解とする通常の方法を拡張した解法となっている。

2.4.6 適用限界に関する注意 式(2.2)の右辺の摂動項 f が, 次式のような変位に関する偶数べきの関数で表される場合を考える。

$$f = x^{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots(2.41)$$

ep = cn または ep = sn のとき, $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_3$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{cn}^{2n+1} \, du = 0 \\ \bar{H}_2 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{sn} \text{cn}^{2n} \, du = 0 \\ \bar{H}_3 &= \bar{A}^{2n} \int_0^{2\pi} \text{cn}^{2n} (Z \text{sn} \, \text{dn} - \bar{k}^2 \text{sn}^2 \text{cn}) \, du = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.42)$$

したがって, 偶数べき項の影響は $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ に全く反映されない。このように, ep = cn \cup sn とした単項型楕円平均法を偶数べきの成分を有する系に適用した場合, 通常の方法と同様に偶数べきの影響が無視されて計算精度が大きく損なわれることに注意を要する。これは, 偶数べき項を含む系では一般に非奇数次解 (偶数次をも含むフーリエ級数で表される解) が存在するのに対し, 式(2.13)の母解である cn 関数または sn 関数が奇数次のみのフーリエ級数しか含まないことに対応している。

2.4.7 単項型楕円平均法の分類 単項型楕円平均法は, 基盤となる振動系に対応して ep に適宜ヤコビの楕円関数を選定することにより, Duffing 型振動系を基盤とする系の定常周期解の近似解を求めることが可能である。本報告では, 母解として使用する楕円関数の種類により, この単項型楕円平均法をそれぞれ cn 型平均法, sn 型平均法, dn 型平均法と呼び分ける。表 2.3 には, Duffing 型振動系を基盤とする系に対する単項型楕円平均法の呼称の分類と母解の関係をまとめた。

表 2.3 Duffing 型振動系を基盤とする系に対する単項型楕円平均法の分類

Basic oscillator	Generating solution of averaging system	Type of elliptic averaging method
Duffing oscillator with hardening spring system ($\beta_1 = \beta_3 = 1$)	$\left. \begin{aligned} \text{ep} = \text{cn} \\ x(t) = A \text{cn}(v, k) \\ \dot{x}(t) = -A \alpha \omega \text{sn}(v, k) \text{dn}(v, k) \end{aligned} \right\}$	cn 型平均法 (Averaging method of cn type)
Duffing oscillator with snap through spring system (full swing mode) ($\beta_1 = -1, \beta_3 = 1$)		
Duffing oscillator with softening spring system ($\beta_1 = 1, \beta_3 = -1$)	$\left. \begin{aligned} \text{ep} = \text{sn} \\ x(t) = A \text{sn}(v, k) \\ \dot{x}(t) = A \alpha \omega \text{cn}(v, k) \text{dn}(v, k) \end{aligned} \right\}$	sn 型平均法 (Averaging method of sn type)
Duffing oscillator with snap through spring system (half swing mode) ($\beta_1 = -1, \beta_3 = 1$)	$\left. \begin{aligned} \text{ep} = \text{dn} \\ x(t) = A \text{dn}(v', k) \\ \dot{x}(t) = -A k^2 \alpha' \omega \text{sn}(v', k) \text{cn}(v', k) \end{aligned} \right\}$	dn 型平均法 (Averaging method of dn type)

Duffing 系を基盤とする振動系に対する単項型楕円平均法の分類のみを示したものである。

2.5 安定判別

楕円平均法によれば、安定解・不安定解ともに全く同等に求められる。したがって、得られた近似解に対して安定判別を行う必要がある。本報告では、以下のような2種類の安定判別法について検討する。

2.5.1 基礎式の変分方程式を利用する方法 この方法は、式(2.2)の変分方程式を利用して、得られた近似解の安定判別を行うものである。

解 x の微小変分を ξ とし、式(2.2)の変分方程式を正規形で表すと次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta_1 + 3\beta_3 x^2 + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x} & \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.43)$$

ここに、 $\xi_1 = \xi$ および $\xi_2 = \dot{\xi}$ であり、 x が定常振動解の場合には、式(2.43)は周期係数型の線形常微分方程式となるので、式(2.43)の零解、したがって定常周期解の安定性は、状態推移行列の2個の固有値（特性乗数）により判定できる。すなわち、特性乗数の絶対値がともに1より小であれば近似解 x は安定、どちらか一方が1より大であれば不安定である。この方法では、近似解 x が高精度で求められておりさえすれば、後述する数値計算結果からわかるように2次的な不安定領域も含めて非常に高精度の安定判別が可能である。その反面、状態推移行列を求めるには通常は数値積分を利用する必要があるので、次前節に述べる平均化方程式を利用する方法に比べて計算量

が大幅に増大することが欠点となる.

2.5.2 平均化方程式を利用する方法 この方法は定常周期解の安定性を平均化方程式の変分方程式から判別するものであり, 定常周期解の安定性は, 式(2.26), (2.28), (2.30)の変分方程式から判別される. 定常周期解に対する \bar{A} , $\bar{\theta}$, \bar{k} の微小変分をそれぞれ δA , $\delta \theta$, δk とすれば, 式(2.26), (2.28), (2.30)の変分方程式は次式のようなになる.

$$\left. \begin{aligned} \omega \bar{A} \bar{\Psi}_1 \delta \dot{\theta} &= \bar{X}_{11} \delta A + \bar{X}_{12} \delta \theta + \bar{X}_{13} \delta k \\ \omega \bar{\Psi}_5 \delta \dot{A} + \omega \bar{A} \bar{\Psi}_6 \delta \dot{k} &= \bar{X}_{21} \delta A + \bar{X}_{22} \delta \theta + \bar{X}_{23} \delta k \\ \omega \bar{A} \bar{\Psi}_7 \delta \dot{\theta} &= \bar{X}_{31} \delta A + \bar{X}_{32} \delta \theta + \bar{X}_{33} \delta k, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.44)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{11} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{A}} - \omega^2 \bar{\Psi}_2 - \beta_1 \bar{\Psi}_3 - 3\beta_3 \bar{A}^2 \bar{\Psi}_4, & \bar{X}_{12} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{\theta}} \\ \bar{X}_{13} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \bar{k}} - \omega^2 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_2}{d\bar{k}} - \beta_1 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_3}{d\bar{k}} - \beta_3 \bar{A}^3 \frac{d\bar{\Psi}_4}{d\bar{k}} \\ \bar{X}_{21} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{A}}, & \bar{X}_{22} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{\theta}}, & \bar{X}_{23} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \bar{k}} \\ \bar{X}_{31} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{A}} - \omega^2 \bar{\Psi}_8 - \beta_1 \bar{\Psi}_9 - 3\beta_3 \bar{A}^2 \bar{\Psi}_{10}, & \bar{X}_{32} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{\theta}} \\ \bar{X}_{33} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_3}{\partial \bar{k}} - \omega^2 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_8}{d\bar{k}} - \beta_1 \bar{A} \frac{d\bar{\Psi}_9}{d\bar{k}} - \beta_3 \bar{A}^3 \frac{d\bar{\Psi}_{10}}{d\bar{k}}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.45)$$

変分方程式(2.44)の解を次のように仮定する.

$$\delta A = \delta \tilde{A} e^{\lambda t}, \quad \delta \theta = \delta \tilde{\theta} e^{\lambda t}, \quad \delta k = \delta \tilde{k} e^{\lambda t} \quad \dots\dots\dots(2.46)$$

式(2.46)を式(2.44)に代入し, $\delta \tilde{A}$, $\delta \tilde{\theta}$, $\delta \tilde{k}$ (いずれも定数) が非自明な解を持つための条件を考慮すれば, 特性根 λ の決定方程式として次式を得る.

$$\left| \begin{array}{ccc} \bar{X}_{11} & \bar{X}_{12} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_1 & \bar{X}_{13} \\ \bar{X}_{21} - \lambda \omega \bar{\Psi}_5 & \bar{X}_{22} & \bar{X}_{23} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_6 \\ \bar{X}_{31} & \bar{X}_{32} - \lambda \omega \bar{A} \bar{\Psi}_7 & \bar{X}_{33} \end{array} \right| = 0 \quad \dots\dots\dots(2.47)$$

式(2.47)は λ に関する 2 次方程式であり, 特性根 λ の実部がともに負であれば定常周期解は安定, どちらか一方でも正であれば不安定と判別される.

この平均化方程式の変分方程式を利用した安定判別法は, 次節の具体的な計算結果で示すように, 振幅の周波数応答曲線の垂直接線部に相当するサドル・ノード分岐に起因する不安定領域の判別は可能であるが, ピッチフォーク分岐やホップ分岐に起因する 2 次的な不安定領域の判別は不可能となる. この安定判別法は, 演算量が少ないというメリットがある反面, 安定判別の精度が低いものとなる.

2.6 cn 型平均法による計算結果

2.6.1 強制漸硬型 Duffing 系に対する適用

A. 計算モデルおよび付帯事項 本報告で提案した cn 型平均法の有効性を、非線形振動系の代表的モデルである漸硬型の強制ダフニング方程式を対象として検証する。

粘性減衰を有し、調和外力が作用する無次元化ダフニング方程式の f は、一般性を失うことなく次式のように表される。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c \dot{x} \quad \dots\dots\dots(2.48)$$

ここに、 F , ω は強制力の振幅と角振動数、 c は減衰係数を代表するパラメータである。以下、 $F=1.0$, $c=0.02$, $\varepsilon=1.0$ とした場合の計算結果を示す。

式(2.48)の f に対しては、楕円関数の q 展開公式を利用することにより \bar{H}_1 , \bar{H}_2 , \bar{H}_3 を解析的に計算することが可能であり、結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \frac{2\pi^2 \bar{q}^{1/2}}{k\bar{K} 1+\bar{q}} F \cos \bar{\theta} \\ \bar{H}_2 &= \frac{\pi^3 \bar{q}^{1/2}}{k\bar{K}^2 1+\bar{q}} F \sin \bar{\theta} + \frac{4}{3k^2} \{(2\bar{k}^2 - 1)\bar{E} + (\bar{k}')^2 \bar{K}\} \omega c \bar{A} \\ \bar{H}_3 &= \pi(\bar{w} - \bar{k}^2 \bar{v}) F \cos \bar{\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.49)$$

ここに、 $\bar{q} = \exp\{-\pi K(\bar{k}') / K(\bar{k})\}$ であり、

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= (1 - \bar{\alpha}^{-2}) \frac{\pi \bar{q}^{1/2}}{k^3 \bar{K} 1 + \bar{q}} \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\beta}_m (\bar{\gamma}_m - \bar{\gamma}_{1-m}) \\ \bar{\beta}_m &= \frac{\pi^2}{k\bar{K}^2} (2m-1) \frac{\bar{q}^{m-1/2}}{1 + \bar{q}^{2m-1}} \\ \bar{\gamma}_m &= \frac{2\pi}{\bar{K}} \frac{\bar{q}^m}{1 - \bar{q}^{2m}}, \quad \bar{\gamma}_0 = 0, \quad \bar{\gamma}_{-m} = -\bar{\gamma}_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.50)$$

ところで、任意の摂動項 f に対しては \bar{H}_1 , \bar{H}_2 , \bar{H}_3 の解析的な計算が困難となる。そのような場合には数値積分または FFT を利用すればよい。本章の数値計算においては、 \bar{H}_1 , \bar{H}_2 , \bar{H}_3 の計算は数値積分を利用した。式(2.48)で表される漸硬型 Duffing 系については、式(2.49)による結果と数値積分を用いた結果は全く同様の計算結果が得られることを確認している。また、定常周期解の決定方程式 [式(2.35)] の求解法としてニュートン法を用いる際に必要となるヤコビ行列の要素や、安定判別に利用する行列式 [式(2.45)] の要素には、 \bar{A} , \bar{k} , $\bar{\theta}$ に関する偏導関数が必要となるが、これらも解析的に求めることはかなり面倒である。このため、本報の数値計算においては、これらを数値差分で代用した。このような処理を行うことによって、汎用性の高いプログラムが作成可能である。

以下では、シューティング法による数値解 x_s および $x_t = A_t \cos(\omega t + \theta_t)$ を母解とする通常の平均法による近似解 x_t との比較を通して、本手法の有効性を検証する。シューティング法の数値積分にはルンゲ・クッタ・ギル法を利用し、1周期を1024分割して計算した。このとき、シューティング法による数値解 x_s は、ほぼ正解とみなして良い程度の十分な精度を有していることを確認している。一方、通常の平均法による定常周期解の振幅 \bar{A}_t と位相 $\bar{\theta}_t$ は、次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} (1 - \omega^2)\bar{A}_t + \frac{3}{4}\bar{A}_t^3 &= F \cos \bar{\theta}_t \\ \bar{\theta}_t &= -\sin^{-1}\left(\frac{\omega c \bar{A}_t}{F}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.51)$$

また、式(2.51)から得られた x_c に対する安定判別は、2.5.2節と類似の方法によった。

本章で示す図では、太線および細線は、それぞれ楕円平均法による近似解と三角関数を母解とする通常の平均法による近似解であり、実線は安定解、破線は不安定解を示す。また、図中、cn型、sn型、dn型平均法による近似解をそれぞれ x_{cn} , x_{sn} , x_{dn} と表し、通常の平均法による近似解を x_t と表記する。○, △, □印はそれぞれサドル・ノード分岐、ピッチフォーク分岐、ホップ分岐に基づく安定・不安定境界を示す。また、一点鎖線は自由振動の振幅であり、シューティング法による高精度数値解の最大振幅 x_s を (安定解) と (不安定解) で示している。

安定判別法は、本章のすべての計算結果において2.5.1節で示した基礎式の変分方程式を利用した判別法を利用した。

B. 振幅と位相の周波数応答 図2.2に $\varepsilon=1.0$ としたときの主共振領域における振幅の周波数応答を示す。図2.2(a)は、 $\omega=0.35 \sim 3.0$ における振幅周波数応答の全域的様相、図2.2(b)は、2次および3次高調波共振が発生する振動域 ($\omega=0.35 \sim 0.8$) の振幅周波数応答の拡大図である。図2.2から、楕円平均法による近似解はシューティング法による数値解と極めてよく一致しており、通常の平均法による近似解よりも計算精度がかなり改善されていることが確認できる。また、楕円平均法および従来の平均法ともに、いわゆる周波数応答曲線の垂直接線部(サドル・ノード分岐点)が安定・不安定の境界となっている。この結果は、シューティング法の結果と一致している。

図2.2(b)を参照すると、シューティング法による結果では、主共振左側すそ部の $\omega=0.69 \sim 0.74$ に局所的に不安定となる領域が確認できる。この安定・不安定の境界点はピッチフォーク分岐であり、この点から2次の高調波共振解が分岐発生することが知られている⁽³⁰⁾。シューティング法による結果では、ピッチフォーク分岐は $(\omega_p, x_p) = (0.6905, 0.9523)$, $(\omega_p, x_p) = (0.7407, 0.9716)$ であった。図2.2(b)に示すように、2.5.1節で示した基礎式の変分方程式を利用した判安定を用いたcn型平均法では、この2次的な不安定領域の判別は可能である。cn型平均法によるピッチフォーク分岐点の計算結果は $(\omega_p, x_p) = (0.6906, 0.9536)$, $(\omega_p, x_p) = (0.7404, 0.9723)$ であり、シ

シューティング法による結果とほぼ一致する。一方、2.5.2 節で論じた平均化方程式を利用した安定判別法を用いた場合には、この 2 次的不安定領域の解はすべて安定と判別される。基礎式の変分方程式を用いた安定判別法の精度は、周知のように得られた近似解の精度に大きく依存する。cn 型平均法によれば高精度な近似解が得られるため、変分方程式に基づく安定判別法の計算精度も非常に高くなる。したがって、平均化方程式を利用する安定判別法に比べて、状態推移行列を計算するために多くの計算量を必要とするという欠点はあるものの、得られた近似解の高い計算精度を活かすとともに確実な安定判別を行うためにも、変分方程式に基づく判別法を利用することが推奨される。図 2.3(b)から、従来の平均法と同様に cn 型平均法によっても 3 次の高調波共振解を求めることは不可能であることがわかる。この 3 次高調波共振の発生する低振動数領域では、cn 型平均法の近似解の計算精度は悪化する。この 3 次高調波共振に対する楕円平均法の適用については、第 4 章で論じる。

図 2.3 は、位相の周波数応答である。位相についても cn 型平均法とシューティング法による結果は、よく一致していることがわかる。

C. 計算精度 単項型楕円平均法によれば、基本波成分だけでなく高調波成分をも求めることができる。このため、本手法により得られた近似解の計算精度を、シューティング法による数値解を基準として、次式で定義される最大値の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} によって評価する。

$$E_{\max} = \frac{|A - X_s|}{X_s} \dots\dots\dots(2.52)$$

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \{(a_n - a_{s,n})^2 + (b_n - b_{s,n})^2\}} \dots\dots\dots(2.53)$$

式(2.52)の X_s はシューティング法で得られた数値解の最大振幅、式(2.53)の $a_{s,n}$, $b_{s,n}$ は FFT により求めた数値解の n 次の余弦及び正弦フーリエ係数である。また、 a_n , b_n は楕円平均法による近似解のフーリエ係数である。 a_n , b_n は、ヤコビの楕円関数のフーリエ展開式 (q 展開公式) を利用することにより、次のように求めることができる。

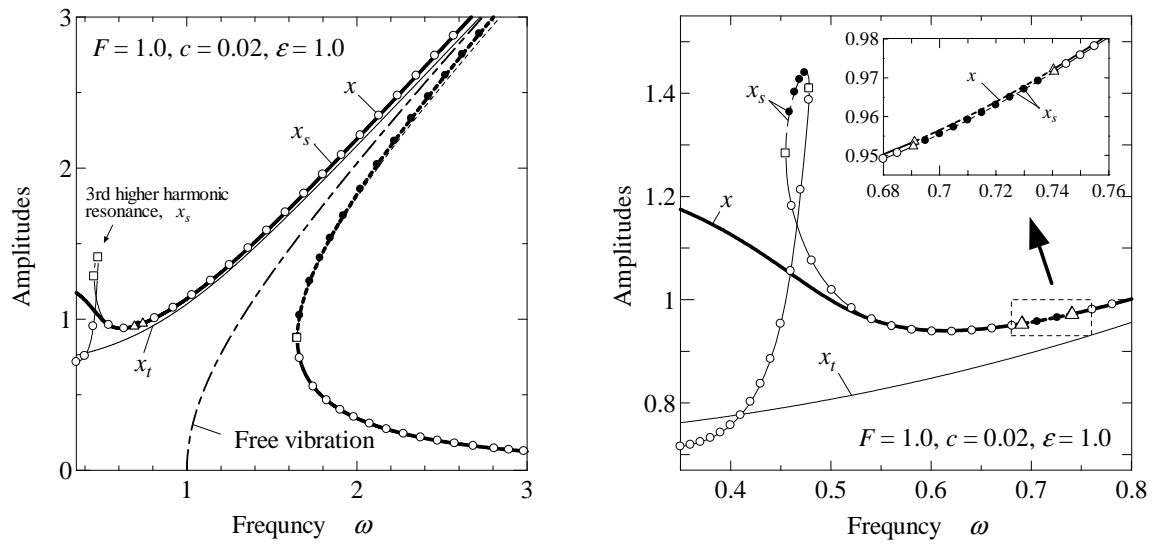
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \sum_{n \geq 1}^{\text{odd}} A_n \cos[n(\omega t - \bar{\theta})] \\ &= \sum_{n \geq 1}^{\text{odd}} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \\ A_n &= \frac{2\pi \bar{A}}{k\bar{K}} \frac{\bar{q}^{n/2}}{1 - \bar{q}_n}, \quad (n = 1, 3, 5, \dots, \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.54)$$

従来の平均法による近似解に対しても同様の誤差評価を行った。

図 2.4 および図 2.5 に E_{\max} と E_{rms} の結果を示す。図中の線種の意味は図 2.2 と同様である。これらの図から、楕円平均法による近似解は、従来の平均法と比較して計算精

度が大幅に改善されていることがわかる．とくに高振動数領域での精度改善効果が著しい．なお，図 2.4 において E_{\max} が局所的に鋭い谷を示しているが，これは， A と X_s が一致する点であり，この点において E_{\max} は零となる．ただし， E_{\max} は零とはならないため，厳密解が得られたわけではない．

D. 調波振幅の周波数応答 次に，楕円平均法による近似解の高調波成分の計算結果（太線）を，シューティング法による計算結果（ ， および細線）と比較する．図 2.6 に両者の 1 次から 9 次までの奇数次調波振幅 ($A_1 \sim A_9$) を示した．周知のように，漸硬型 Duffing 方程式の主共振領域の解は奇数次調波のみからなる奇数次解であり⁽³⁰⁾，cn 関数を用いた楕円平均法の近似解もまた奇数次解である．図 2.6 から，基本波だけでなく奇数次高調波の振幅もまた，主共振域における楕円平均法の安定解はシューティング法の結果と非常によく一致していることがわかる．しかしながら，高調波共振が発生する低振動数域では各調波成分ともに誤差が急激に増大する．



(a) 振幅の周波数応答の全体的様相

(b) 3次高調波振動発生域の拡大図

図 2.2 漸硬型 Duffing 系の振幅の周波数応答 ($F=1.0, c=0.02, \varepsilon=1.0$)

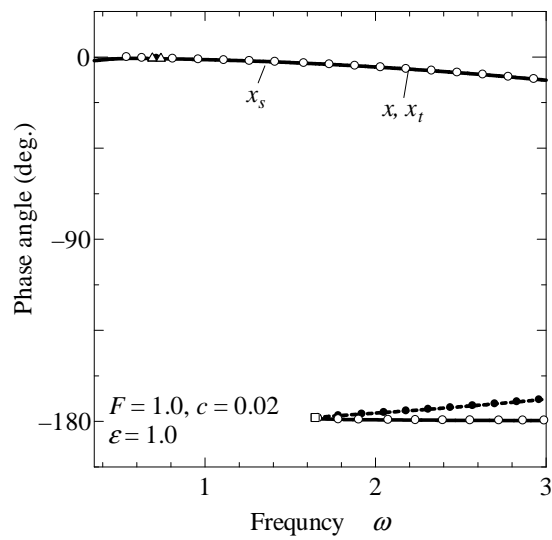


図 2.3 漸硬型 Duffing 系の位相の周波数応答 ($F=1.0, c=0.02, \varepsilon=1.0$)

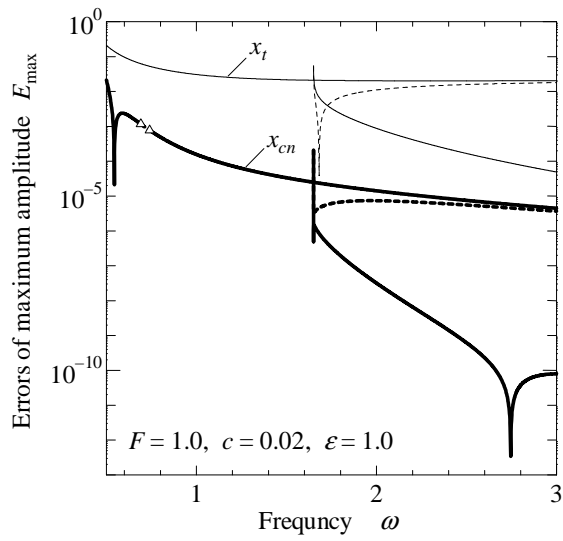


図 2.4 漸硬型 Duffing 系の振幅の相対誤差

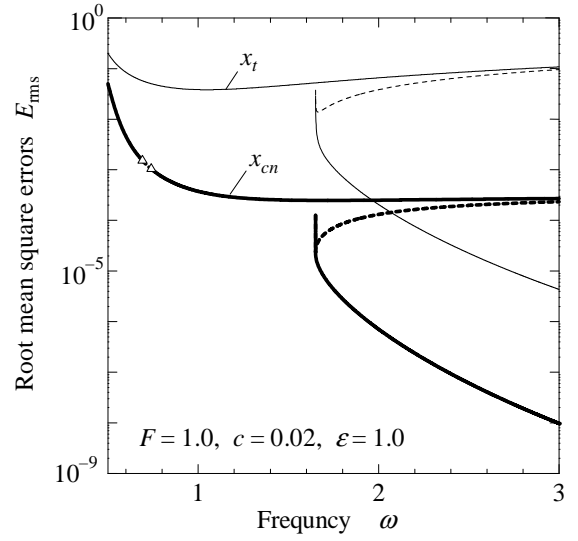


図 2.5 漸硬型 Duffing 系の rms 誤差

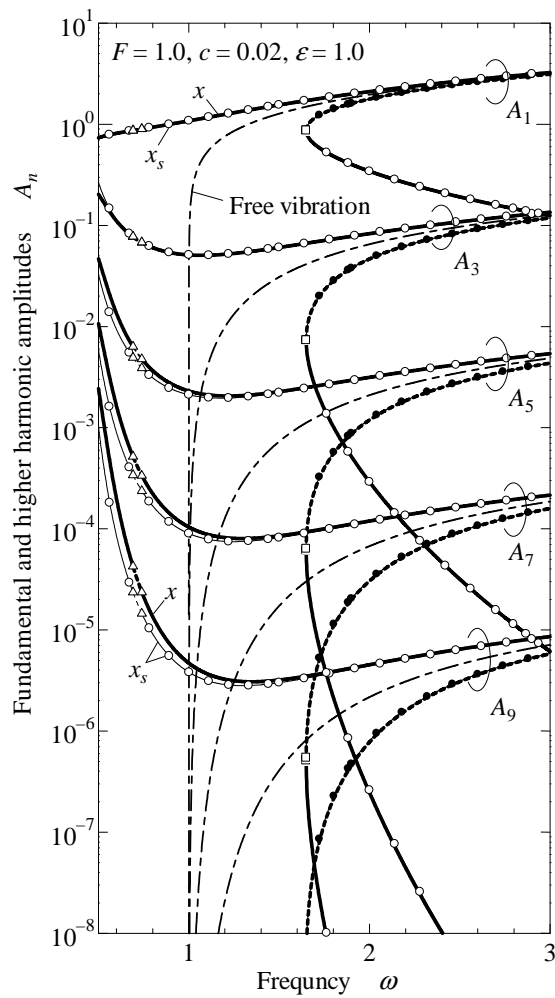


図 2.6 漸硬型 Duffing 系の調波振幅の周波数応答

E. 振動波形 図 2.7 に主共振領域($\omega=2.0$)および低振動数領域($\omega=0.6$)における安定解の振動波形と位相平面図を示した. 楕円平均法による近似解は, 最大振幅のみならず波形の微妙な歪みにいたるまで, シューティング法による計算結果と極めてよく一致している.

F. 摂動項の大きさによる rms 誤差の変化 次に, $F=1.0, \omega=1.4$ として, Duffing 方程式に対する摂動項の大きさを表す ε を変化させたときの E_{rms} の結果を図 2.8 に示す. 両図より, ε の値が小さくなるにつれて, 楕円平均法による近似解の計算精度は向上するのに対して, 従来の平均法による近似解ではほとんど向上しないことが見て取れる.

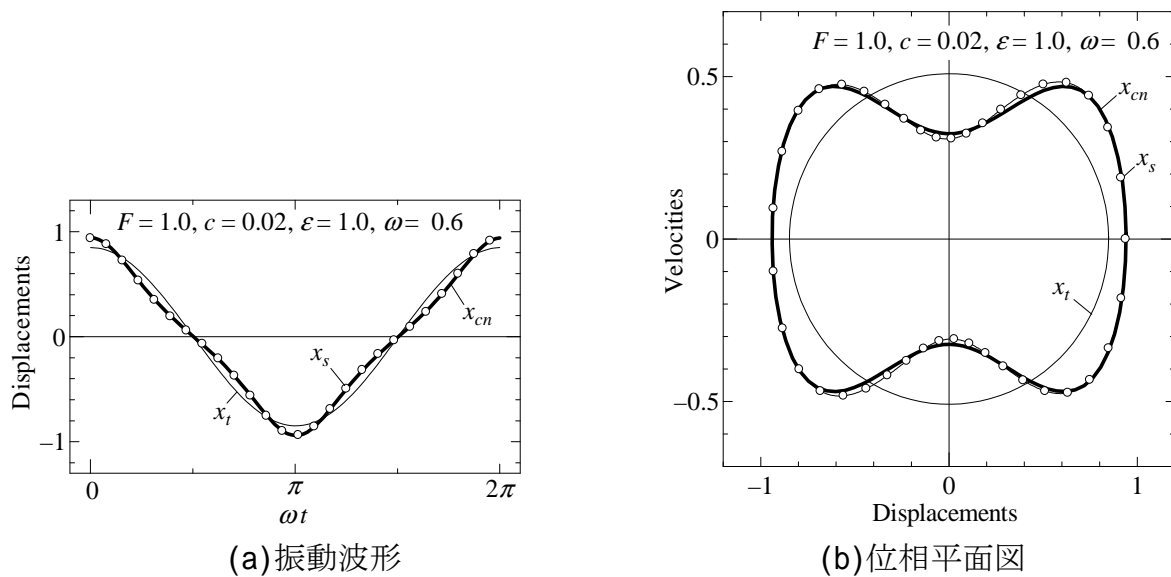


図 2.7 漸硬型 Duffing 系の振動波形 ($\omega=0.6$)

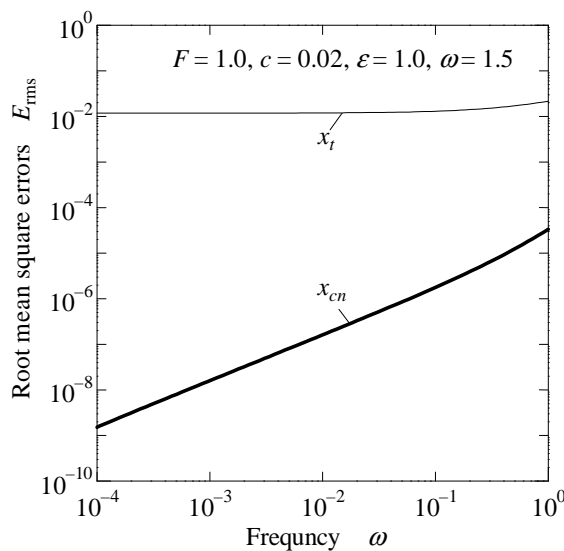


図 2.8 漸硬型 Duffing 系における rms 誤差に及ぼす摂動項の大きさ ε の影響

2.6.2 Duffing-van der Pol 系に対する適用 前節で示した単純な Duffing 方程式以外の系への適用例として、減衰項を van der Pol 型の非線形減衰項に変更したいわゆる Duffing-van der Pol 系に対する数値計算結果を示す。このとき、式(2.2)の f は次式のように表される。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t + c(1 - x^2)\dot{x} \quad \dots\dots\dots(2.55)$$

上式中の c の値を $c=0.95$ および $c=1.0$ と置いたときの (最大) 振幅の周波数応答曲線を、それぞれ図 2.9(a) および図 2.9(b) に示す。ただし、両図ともに $F=1.0$ とした。図 2.9(a) の $c=0.95$ のときには、従来の平均法の計算結果では主共振領域において安定と不安定解よりなる孤立した島状の分枝が存在し、シューティング法の結果と大きく異なっている。一方、楕円平均法の結果はシューティング法の結果とよく一致しており、このような島状の分枝は存在しない。図 2.9(b) のように $c=1.0$ となると、いずれの結果ともに対応曲線には島状の分枝が存在するようになるが、従来の平均法の結果はシューティング法の結果に対して大きな誤差を生じている。このように、比較的大きな非線形減衰項を有する Duffing-van der Pol 系においても、楕円平均法によれば従来の平均法よりも高精度の近似解が求められることが確認された。

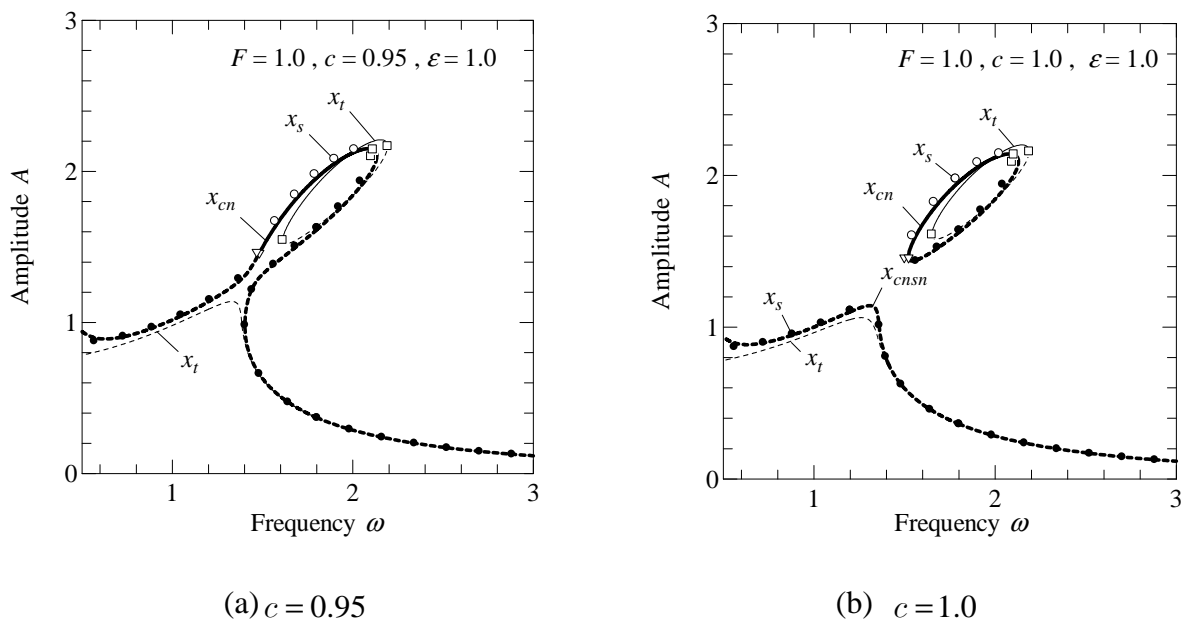


図 2.9 Duffing - van del Pol 系の振幅の周波数応答 ($F = 1.0, \varepsilon = 1.0$)

2.7 sn 型平均法による計算結果（振子型振動系への適用）

次に、強制力と減衰のみが作用する単純な Duffing 方程式よりも非線形特性がやや複雑な振子型振動系の強制振動に対して、sn 型平均法を適用した場合の計算結果を示す。この系の無次元化運動方程式は次式で表される。

$$\ddot{\phi} + \varepsilon c \dot{\phi} + \sin \phi = \varepsilon T \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(2.56)$$

ここに、 ϕ は支点まわりの振子の回転角、 T 、 ω は振子系に加えられる周期的強制トルクの振幅および角振動数、 c は減衰係数を代表するパラメータである。 $\phi = \sqrt{6}x$ 、 $T = \sqrt{6}F$ なる変換を行い、式(2.56)を式(2.2)の形に変形すると、 f は次のように表される。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c\dot{x} - \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \right\} \quad \dots\dots\dots(2.57)$$

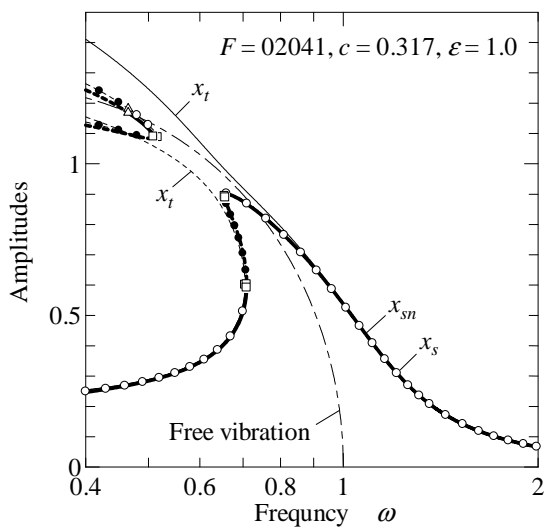
以下では、 $F=0.2$ 、 $c=0.35$ 、 $\varepsilon=1.0$ とした場合の計算結果を示す。

図 2.10(a) に $\omega=0.4 \sim 2.0$ における主共振領域における最大振幅の周波数応答を示す。図示のように、シューティング法による周波数応答曲線は、すそ部をもつ解分枝と図の左上から垂れ下がる半島上の解分枝に分離している。sn 型平均法による結果にもこれら 2 個の分離した分枝が現れ、シューティング法の結果とよい一致を示している。一方、通常の方法による周波数応答曲線には半島状に分離した分枝は存在せず、シューティング法の結果と定量的にも定性的にも大きく異なるものとなる。

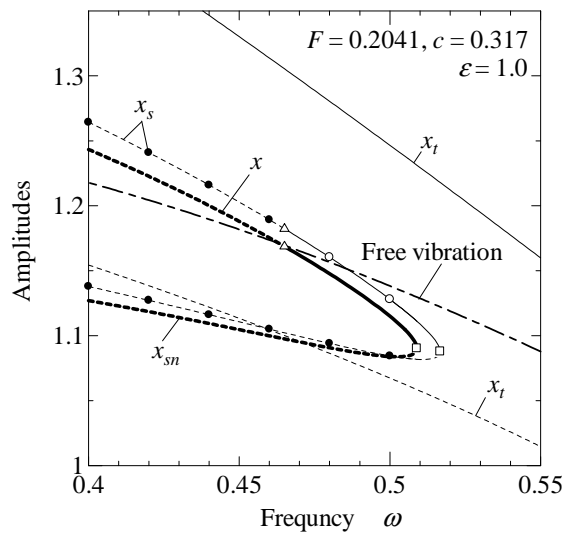
解の安定性に関しては、sn 型平均法および従来の平均法ともに、周波数応答曲線の垂直接線部が安定・不安定の境界（サドル・ノード分岐点）となっており、この結果はシューティング法の結果と一致している。しかしながら、シューティング法による結果では、半島状の形状をもつ周波数応答曲線の上側の分枝において $(\omega_p, x_p) = (0.4652, 1.182)$ に印で示す安定・不安定の境界（ピッチフォーク分岐点）が存在し、これ以下の振動数域ではすべて不安定となる。sn 型平均法による結果でも、 $(\omega_p, x_p) = (0.4658, 1.168)$ にピッチフォーク分岐点が現れ、定性的、定量的にも精度よい近似解が求められていることがわかる。平均化方程式に基づく安定判別法を用いた場合には、このピッチフォーク分岐点による不安定領域は判別できず、この解分枝はすべて安定と判別される。前節で示した漸硬型 Duffing 系の場合と同様に、平均化方程式を利用する判別法ではこのような 2 次的な不安定領域の判別は不可能である。

図 2.11, 2.12 には、振幅の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} を示した。図示の全域において、従来の平均法と比べて、精度が改善されていることがわかる。

なお、本報告では省略したが、漸軟型 Duffing を基盤とする系で、摂動項が式(2.48)で定義されるような単純な強制漸軟型 Duffing 系に対して sn 型平均法を適用した場合、2.6 節の計算例と同等の極めて精度よい近似解を求めることが可能であることを確認している。



(a) 振幅の周波数応答の全体的様相



(b) 島状領域の拡大図 ($\omega = 0.4 \sim 0.55$)

図 2.10 振子型振動系の振幅の周波数応答 ($F = 0.5/\sqrt{6}, c = 0.317, \varepsilon = 1.0$)

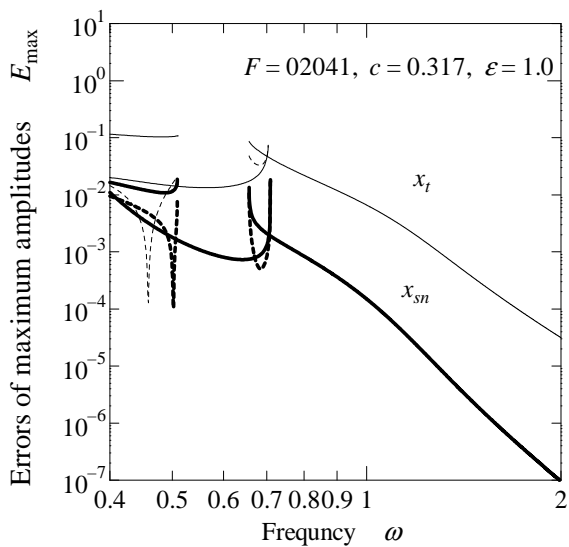


図 2.11 振子型振動系の振幅の相対誤差

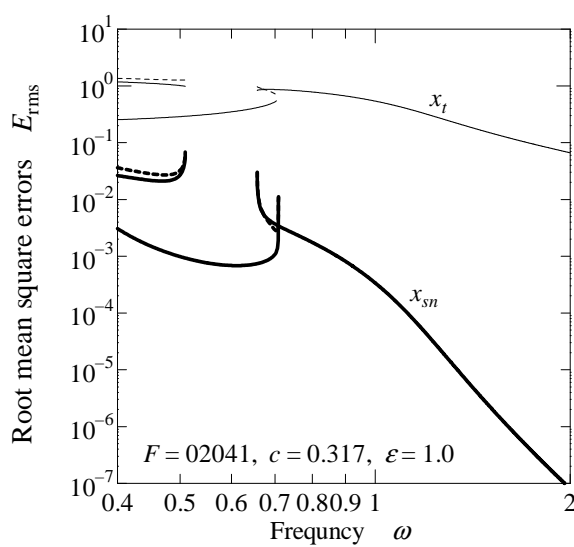


図 2.12 振子型振動系の rms 誤差

2.8 dn 型平均法による計算結果（ガタ系への適用）

2.8.1 ガタ系への適用 本章の最後の計算例として、dn 型平均法による計算結果を示す。ここでは、飛移り型ダフリング方程式に図 2.13 に示す不感帯（ガタ）のある断片線形ばねが付加された系を考察の対象とする。ここでは、 $x=1$ まわりの振動を行う片振りモードの定常周期解を解析する。この系に対する f は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} f(\omega t, x, \dot{x}) &= F \cos \omega t - c\dot{x}, & (d_2 < x < d_1) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= F \cos \omega t - c\dot{x} - \frac{k_1}{\varepsilon}(x - d_1), & (x > d_1) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= F \cos \omega t - c\dot{x} - \frac{k_2}{\varepsilon}(x - d_2), & (x < d_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.58)$$

ここに、 F, ω, c の定義は式(2.48)のものと同様であり、 k_1, k_2 は不感帯を有する断片線形ばねのばね定数を、 d_1, d_2 はその作用開始点の変位を示す。添え字 1, 2 は、それぞれ x が正および負の位置の線形ばねに関する物理量であることを表している。

図 2.14(a)には、断片線形ばねが作用しない場合 ($k_1 = k_2 = 0$)、図 2.14(b)には、 $k_1 = k_2 = 0.1, d_1 = 1.2, d_2 = 0.8$ なる断片線形ばねが作用する場合の振幅の周波数応用を示した。両図の計算において $F = 0.1, c = 0.15, \varepsilon = 1.0$ と設定した。飛移りばね系の片振り解は、定数項を含む偶数次成分をも有する非奇数次解であるため、振動波形も非対称となる。そこで、図 2.14 の縦軸は peak-to-peak (p-p) 振幅とした。また、この系に限って、従来の平均法の母解を次式のように仮定した。

$$\left. \begin{aligned} x_t &= B_t + A_t \cos(\omega t + \theta_t) \\ \dot{x}_t &= -A_t \omega \sin(\omega t + \theta_t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.59)$$

ここに、 B_t は定数である。図 2.14 から、dn 型平均法による近似解はシューティング法による結果と非常によく一致しており、精度良い近似解が得られていることがわかる。このように、かなり大きな非線形性を有する振動系に対しても、dn 型平均法による近似解はシューティング法の結果とよい一致を示しており、従来の平均法に対する計算精度の改善効果が顕著であることがわかる。具体的な結果の提示は省略するが、dn 型平均法の計算精度に関して cn 型、sn 型平均法とほぼ同様の傾向を示すことを確認している。

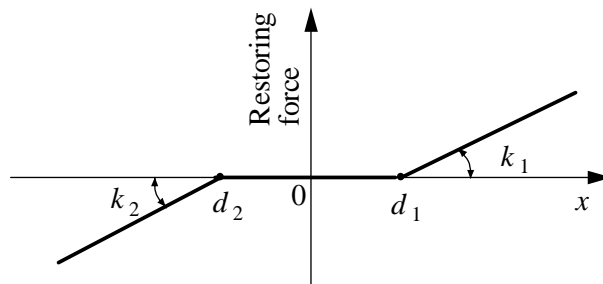
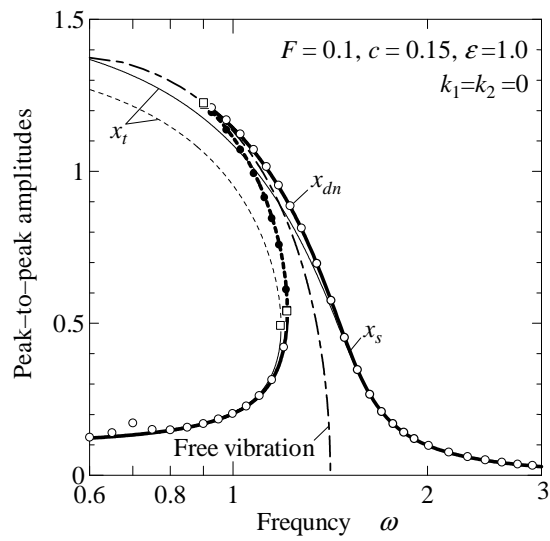
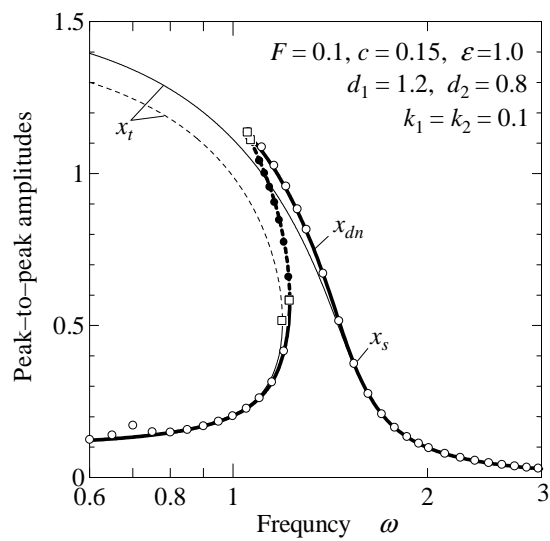


図2.13 不感帯を有する断片線形ばね.



(a) 断片線形ばねがない場合 ($k_1 = k_2 = 0.1$)



(b) 断片線形ばねを有する場合 ($k_1 = k_2 = 0.1$, $d_1 = 1.2$, $d_2 = 0.8$)

図 2.14 飛移り型 Duffing 振動系の振幅の周波数応答 ($F = 0.1, c = 0.15, \varepsilon = 1.0$)

第3章 2次ばね系を基盤とする系に対する楕円平均法

前章では、Duffing型振動系を基盤とする系に対する楕円平均法を示した。この方法は、3種のヤコビの楕円関数（cn関数，sn関数，dn関数）のうちの一つを平均法の母解として適宜利用することにより，漸硬型，漸軟型，飛移りばね型の不減衰ダフティング系を基盤とする振動系の定常周期解を高精度に求めることが可能である。

本章では，非対称ばね系の代表的モデルである2次ばね系を基盤とする系に対して，ヤコビの楕円関数の自乗関数を母解とする楕円平均法について論じる⁽¹⁸⁾⁻⁽²⁰⁾。この手法は，ばね関数が $x+x^2$ と記述される不減衰の2次ばね系に，減衰項，外力項， x^2 以外の非線形項などの微小な摂動項が付加された系を解析対象とする。周期励振される2次ばね系を基盤とする系の定常周期解は，定数項成分を含むすべての調波成分を有しており，高精度な近似解を求めるには，高調波成分の精度良い近似が必要となる。本章で論じる手法は，比較的簡単な計算手続きながら，定常周期解の高調波成分をも考慮した高精度な近似解を求めることが可能となる。

3.1 基礎式と2次ばね系の自由振動解

3.1.1 基礎式 本章では，次式のような2次ばね系に基づく周期系の無次元化運動方程式を取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + x + x^2 &= \varepsilon f(\omega t, x, \dot{x}) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= f(\omega t + 2\pi, x, \dot{x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに， t, x, ω は，それぞれ時間，変位，角振動数を表すパラメータであり，“ \cdot ”は時間 t に関する微分を表す。右辺の f は，減衰項，外力項および x^2 以外の非線形項からなる微小な摂動項であり， ε は摂動項 f の大きさを表す微小パラメータである。本報では，式(3.1)を基礎式とし，その 2π 周期解を求める。

3.1.2 2次ばね系の自由振動解 式(3.1)で $\varepsilon=0$ とおいた自由振動の方程式：

$$\ddot{x} + x + x^2 = 0 \dots\dots\dots(3.2)$$

の厳密解 $\hat{x}(t)$ は，次式のようにsn関数の自乗関数を用いて記述される⁽³¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{B} - \hat{A} \operatorname{sn}^2(\hat{v}, \hat{k}) \\ \hat{v} &= \hat{\alpha} \hat{u}, \quad \hat{u} = \hat{\omega} t + \hat{\theta}, \quad \hat{\alpha} = \frac{K(\hat{k})}{\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに， $K = K(\hat{k})$ は第1種完全楕円積分， \hat{k} ($0 \leq \hat{k} < 1$)は楕円積分の母数である。式(3.2)の厳密解の振幅 \hat{A} ，定数項成分 \hat{B} ，その角振動数 $\hat{\omega}$ および母数 \hat{k} の4定数間の関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{B}^2 + \hat{B} - 2\hat{\alpha}^2 \hat{\omega}^2 \hat{A} &= 0 \\ 4\hat{\alpha}^2 \hat{\omega}^2 (1 + \hat{k}^2) - 2\hat{B} - 1 &= 0 \\ \hat{A} - 6\hat{\alpha}^2 \hat{\omega}^2 \hat{k}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4)$$

また、位相角 $\hat{\theta}$ は任意の値を取り得る。

3.2 2次ばね系を基盤とする系に対する楕円平均法

3.2.1 摂動系に対する近似解の仮定 $\varepsilon = 0$ の場合の厳密解 [式(3.3)] を母解とする平均法により、式(3.1)において $\varepsilon \neq 0$ とした摂動系の定常周期解を求める。式(3.3)を参考に、式(3.1)の解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= B - A \operatorname{sn}^2(v, k) \\ \dot{x}(t) &= -2A\alpha\omega \operatorname{sn}(v, k) \operatorname{cn}(v, k) \operatorname{dn}(v, k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

ここに、

$$v = \alpha u, \quad u = \alpha(\omega t + \theta), \quad \alpha = \frac{K(k)}{\pi} \dots\dots\dots(3.6)$$

であり、未知変数は定数項成分 B 、振幅 A 、位相角 θ および楕円関数の母数 k の4個である。ただし、 $\varepsilon \neq 0$ の摂動系における定常周期解の周期変動成分は、式(3.5)の第1式の右辺第2項 $-A \operatorname{sn}^2(v, k)$ によって表されるものとし、 A, θ, k を時間 t の関数であると仮定する。したがって、 B は定数として取り扱う。 $x = x(t)$ は、 t に関して周期 $2\pi/\omega$ 、 u に関して周期 2π 、 v に関して周期 $2K$ の関数となる。

3.2.2 平均化方程式の導出 振幅 A 、位相 θ および母数 k が時間 t の関数であることから、式(2.17)の場合と同様に、時間 t に関する微分公式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} = \dot{A} \frac{\partial}{\partial A} + \dot{k} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{\pi} \left\{ \dot{k} \left(\frac{E}{(k')^2} - K \right) u + K(\omega + \dot{\theta}) \right\} \frac{\partial}{\partial v} \dots\dots\dots(3.7)$$

式(3.7)を利用して、式(3.5)の第1式を時間微分して \dot{x} を導出すると次式を得る。

$$\dot{x} = -\dot{A} \operatorname{sn}^2 - 2A\alpha(\omega + \dot{\theta}) \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} + \dot{k} \frac{2A\varphi_1}{k(k')^2} \dots\dots\dots(3.8)$$

ここに、

$$\varphi_1 = \operatorname{sn} \operatorname{cn} (Z \operatorname{dn} - k^2 \operatorname{sncn}) \dots\dots\dots(3.9)$$

である。式(3.8)と式(3.5)の第2式の比較により、次の関係式を得る。

$$-\dot{A} \operatorname{sn}^2 - \dot{\theta} 2A\alpha \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} + \dot{k} \frac{2A\varphi_1}{k(k')^2} = 0 \dots\dots\dots(3.10)$$

次に、式(3.5)の第2式を時間微分すると、

$$\ddot{x} = -2\dot{A}\alpha\omega \operatorname{sn} \operatorname{cndn} - 2A\alpha^2\omega(\omega + \dot{\theta})\varphi_2 - \dot{k} \frac{2A\alpha\omega\varphi_3}{k(k')^2} \dots\dots\dots(3.11)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= 1 - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 + 3k^2\operatorname{sn}^4 \\ \varphi_3 &= \left\{ \frac{E}{K} - (k')^2 \right\} \operatorname{sn} \operatorname{cndn} + k^2 \operatorname{sn} \operatorname{cndn} (1 - 3\operatorname{sn}^2) - Z\varphi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.12)$$

結局、式(3.5), (3.11)を式(3.1)へ代入して整理することにより、次式が求められる。

$$\begin{aligned} & -2\dot{A}\alpha\omega \operatorname{sn} \operatorname{cndn} - 2\dot{\theta}A\alpha^2\omega\varphi_2 - \dot{k} \frac{2A\alpha\omega\varphi_3}{k(k')^2} + \Gamma \\ & = \varepsilon f(u - \theta, B - A\operatorname{sn}^2, -2A\alpha\omega \operatorname{sn} \operatorname{cndn}) \dots\dots\dots(3.13) \end{aligned}$$

ここに、

$$\Gamma = B^2 + B - 2\alpha^2\omega^2 A + \{4\alpha^2\omega^2(1+k^2) - 2B - 1\}A\operatorname{sn}^2 + \{A - 6\alpha^2\omega^2k^2\}A\operatorname{sn}^4 \quad (3.14)$$

式(3.10)および式(3.13)が4個の未知変数 A, θ, k, B の間の関係式であり、これら2式から平均化方程式を導出する。なお、2章と同様に、“-”が付された変数は、平均化処理が施された量であることを示す。

最初に、式(3.13)の両辺が定数項成分を有することに着目し、この定数項成分に関する条件を付与する。すなわち、式(3.13)に対し u に関する1周期 ($0 \sim 2\pi$) にわたる平均化を行い、両辺の定数項成分を等値することにより、次のような平均化方程式を得る。

$$-2\dot{\bar{A}}\bar{\alpha}\bar{\omega}\bar{I}_1 - 2\dot{\bar{\theta}}\bar{A}\bar{\alpha}^2\bar{\omega}\bar{I}_2 - \dot{\bar{k}} \frac{2\bar{A}\bar{\alpha}\bar{\omega}}{\bar{k}(\bar{k}')^2} \bar{I}_3 + \bar{J}_1 = \varepsilon\bar{H}_1 \dots\dots\dots(3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_1 &= \bar{I}_1(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sn} \operatorname{cndn} du, & \bar{I}_2 &= \bar{I}_2(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_2 du \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_3(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \varphi_3 du, & \bar{J}_1 &= \bar{J}_1(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \Gamma du \\ \bar{H}_1 &= \bar{H}_1(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B) = \int_0^{2\pi} f du \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.16)$$

なお、本章の議論に限り $\bar{\alpha}$ は、 $\bar{\alpha} = \alpha(\bar{k}) = \bar{K} / \pi$ である。

次に、4個の未知変数 A, θ, k, B を決定するために必要な残り3本の平均化方程式を導出する。そのため、前章と同様に、式(3.10), (3.13)から $\dot{A}, \dot{\theta}, \dot{k}$ をそれぞれ個別に消去することによって3本の関係式を求めたのちに、これら3本の関係式を u に関して1周期にわたって平均化する。この処理により、3本の独立な平均化方程式が求められる。なお、平均化の妥当性 [$\dot{A}, \dot{\theta}, \dot{k}$ が微小であること] については、2.4.3 節の議論と同様に証明できるため、ここでは省略する。

まず、式(3.10), (3.13)から \dot{A} を消去したのちに、 u に関して1周期にわたる平均化を行うと、次のような平均化方程式が求められる。

$$\dot{\bar{\theta}}\bar{A}\bar{\omega}\bar{I}_4 + \dot{\bar{k}}\bar{A}\bar{\omega}\bar{I}_5 + \bar{J}_2 = \varepsilon\bar{H}_2 \dots\dots\dots(3.17)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{I}_4 &= I_4(\bar{k}) = 2\bar{\alpha}^2 \int_0^{2\pi} (2 \operatorname{sn} \operatorname{cn}^2 \operatorname{dn}^2 - \varphi_2 \operatorname{sn}) du \\
\bar{I}_5 &= I_5(\bar{k}) = -\frac{2\bar{\alpha}}{\bar{k}(\bar{k}')^2} \int_0^{2\pi} (2\varphi_1 \operatorname{cn} \operatorname{dn} + \varphi_3 \operatorname{sn}) du \\
\bar{J}_2 &= J_2(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \Gamma \operatorname{sn} du \\
\bar{H}_2 &= H_2(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B) = \int_0^{2\pi} f \operatorname{sn} du
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.18)$$

次に、式(3.10), (3.13)から $\dot{\theta}$ を消去し、 u に関して 1 周期にわたる平均化を行うと次式を得る。

$$\dot{\bar{A}}\omega\bar{I}_6 + \dot{\bar{k}}\bar{A}\omega\bar{I}_7 + \bar{J}_3 = \varepsilon\bar{H}_3 \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{I}_6 &= I_6(\bar{k}) = \bar{\alpha} \int_0^{2\pi} (\varphi_2 \operatorname{sn}^2 - 2 \operatorname{sn}^2 \operatorname{cn}^2 \operatorname{dn}^2) du \\
\bar{I}_7 &= I_7(\bar{k}) = -\frac{2\bar{\alpha}}{\bar{k}(\bar{k}')^2} \int_0^{2\pi} (\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_3 \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn}) du \\
\bar{J}_3 &= \int_0^{2\pi} \Gamma \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} du \\
\bar{H}_3 &= H_3(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B) = \int_0^{2\pi} f \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} du
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.20)$$

最後に、式(3.10), (3.13)から \dot{k} を消去し、 u に関して 1 周期にわたる平均化を行うと次式を得る。

$$\dot{\bar{A}}\omega\bar{I}_8 + \dot{\bar{\theta}}\bar{A}\omega\bar{I}_9 + \bar{J}_4 = \varepsilon\bar{H}_4 \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
\bar{I}_8 &= I_8(\bar{k}) = -\bar{\alpha} \int_0^{2\pi} (2\varphi_1 \operatorname{sn} \operatorname{cn} \operatorname{dn} + \varphi_3 \operatorname{sn}^2) du \\
\bar{I}_9 &= I_9(\bar{k}) = \bar{\alpha}\bar{k}(\bar{k}')^2 \bar{I}_7 \\
\bar{J}_4 &= J_4(\bar{k}) = \int_0^{2\pi} \Gamma \varphi_1 du \\
\bar{H}_4 &= H_4(\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B) = \int_0^{2\pi} f \varphi_1 du
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.22)$$

以上の式(3.15), (3.17), (3.19), (3.21)が、求められるべき 4 本の平均化方程式である。

$\bar{I}_1 \sim \bar{I}_9$ は、次のように計算できる。

$$\left. \begin{aligned}
\bar{I}_2 &= 2\pi \left[1 - \frac{1}{\bar{K}} (1 + \bar{k}^2) \bar{S}_2 + \frac{3\bar{k}^2}{2\bar{K}} \bar{S}_4 \right] \\
\bar{I}_4 &= 2\bar{\alpha} (\bar{S}_1 - \bar{k}^2 \bar{S}_5) \\
\bar{I}_6 &= -\bar{S}_2 + \bar{k}^2 \bar{S}_6 \\
\bar{I}_7 &= -\frac{2}{\bar{k}(\bar{k}')^2} \left[\left(\frac{\bar{E}}{\bar{K}} - (\bar{k}')^2 \right) \bar{S}_2 + \left\{ 1 - \frac{\bar{E}}{\bar{K}} - \left(1 + \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \right) \bar{k}^2 \right\} \bar{S}_4 + \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \bar{k}^2 \bar{S}_6 \right] \\
\bar{I}_9 &= \bar{\alpha}\bar{k}(\bar{k}')^2 \bar{I}_7 \\
\bar{I}_1 &= \bar{I}_3 = \bar{I}_5 = \bar{I}_8 = 0
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.23)$$

なお、後述するように、これらの式中の $\bar{I}_1 \sim \bar{I}_9$ は、定常周期解の決定には関与しないため、計算する必要はない。

3.2.3 定常周期解の決定 定常周期振動の条件は、 $\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{\theta}} = \dot{\bar{k}} = 0$ である。この条件を式(3.15), (3.17), (3.19), (3.21)に適用することにより、次のような定常周期解に対する未知変数の決定方程式が導出される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= \varepsilon \bar{H}_1 \\ \bar{J}_2 &= \varepsilon \bar{H}_2 \\ \bar{J}_3 &= \varepsilon \bar{H}_3 \\ \bar{J}_4 &= \varepsilon \bar{H}_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

式(3.24)は未知変数 $\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B$ に関する非線形代数方程式であり、これをニュートン法などの数値解法を用いて解けば $\bar{A}, \bar{\theta}, \bar{k}, B$ が決定され、式(3.1)の定常周期振動の近似解が求められる。

なお、式(3.24)中の $\bar{J}_1 \sim \bar{J}_4$ は、摂動項 f には依存せず、その関数形は不変であり、次のように解析的に求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= 2\pi \left\{ \frac{1}{3\bar{k}^2} \left[\frac{2}{\bar{k}^2} (1 + \bar{k}^2) \left(1 - \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \right) - 1 \right] \bar{A}^2 - \frac{1}{\bar{k}^2} (2B + 1) \left(1 - \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \right) \bar{A} + B + B^2 \right\} \\ \bar{J}_2 &= \frac{\pi}{\bar{K}} (\bar{\beta}_1 \bar{S}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{S}_3 + \bar{\beta}_3 \bar{S}_5) \\ \bar{J}_3 &= 0 \\ \bar{J}_4 &= \frac{\pi}{2\bar{K}} \left\{ \bar{\beta}_1 \left(\frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 1 - 2\bar{k}^2 \right) \bar{S}_2 + \left[3\bar{\beta}_1 \bar{k}^2 + \frac{\bar{\beta}_2}{2} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 1 - 4\bar{k}^2 \right) \right] \bar{S}_4 \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{5}{2} \bar{\beta}_2 \bar{k}^2 + \frac{\bar{\beta}_3}{3} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{K}} - 1 - 6\bar{k}^2 \right) \right] \bar{S}_6 + \frac{7}{3} \bar{\beta}_3 \bar{k}^2 \bar{S}_8 \right\} \end{aligned} \right\} (3.25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= B + B^2 - 2\bar{A}\bar{\alpha}^2\omega^2 \\ \bar{\beta}_2 &= [4\bar{\alpha}^2\omega^2(1 + \bar{k}^2) - 1 - 2B]\bar{A} \\ \bar{\beta}_3 &= [\bar{A} - 6\bar{\alpha}^2\omega^2\bar{k}^2]\bar{A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.26)$$

である。また、式(3.25)中の \bar{S}_n ($n=1 \sim 8$)の定義は、

$$\bar{S}_n = \bar{\alpha} \int_0^{2\pi} \text{sn}^n u \, du = \int_0^{2K} \text{sn}^n v \, dv \quad \dots\dots\dots(3.27)$$

であり、 \bar{S}_n の具体的な計算結果は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned}
\bar{S}_1 &= \frac{1}{\bar{k}} \ln \left(\frac{1+\bar{k}}{1-\bar{k}} \right) \\
\bar{S}_2 &= \frac{2}{\bar{k}^2} (\bar{K} - \bar{E}) \\
\bar{S}_3 &= \frac{1}{2\bar{k}^3} \left\{ (1+\bar{k}^2) \ln \left(\frac{1+\bar{k}}{1-\bar{k}} \right) - 2\bar{k} \right\} \\
\bar{S}_4 &= \frac{2}{3\bar{k}^4} \left\{ (2+\bar{k}^2)\bar{K} - 2(1+\bar{k}^2)\bar{E} \right\} \\
\bar{S}_n &= \frac{1}{(n-1)\bar{k}^2} \left\{ (n-2)(1+\bar{k}^2)\bar{S}_{n-2} - (n-3)\bar{S}_{n-4} \right\}, \quad (n=5\sim 8)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.28)$$

本手法は、摂動項 f を変更することにより、2次ばね系を基盤とする種々の振動系に対して適用することができる。その場合、 f に対応して式(3.16), (3.18), (3.20), (3.22) で定義される $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_4$ のみを計算すればよい。しかしながら、任意の f に対して $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_4$ を解析的に計算することは困難である。このような場合には、これらの積分計算には数値積分やFFTを利用すればよい。これにより、簡単に式(3.1)の定常振動の近似解を高精度で求めることができる。

3.2.4 安定判別 本手法によれば、安定・不安定解ともに求めることが可能であり、得られた近似解に対して安定判別を行う必要がある。安定判別法は2.5.1節で論じた方法とほぼ同様の手順にて行うことができるため、ここではその議論は省略する。

3.3 数値計算結果

3.3.1 計算条件 本手法の有効性を検証するため、3種類の代表的な非線形振動系に対して、本手法を適用した場合の数値計算結果を示す。本手法によって得られた近似解の計算精度確認のため、シューティング法による数値解 x_s および $B_t + A_t \cos(\omega t + \theta_t)$ (B_t : 定数) を母解とする通常の方法による近似解 x_t との比較を行った。

本手法の適用にあたり、 $\bar{H}_1 \sim \bar{H}_4$ の積分計算は、1周期の512分割点における $H_1 \sim H_4$ の離散データをFFT処理し、得られた0次フーリエ係数(定数項成分)の計算値を用いた。また、定常周期解の決定方程式[式(3.24)]の求解法としてニュートン法を用いた。その際に必要となるヤコビ行列の要素中の偏導関数の計算は、すべて数値差分で代用した。

以下に示す図において、太線は本手法による近似解 x_{sn2} 、細線は通常の方法による近似解 x_t の計算結果を表し、実線は安定解、破線は不安定解を表す。また、印および印は、それぞれサドル・ノード分岐およびピッチフォーク分岐に基づく安定・不安定境界を示す。一点鎖線は自由振動解である。一方、シューティング法による高

精度数値解 x_s は、安定解を 印で、不安定解を 印で示している。

3.3.2 強制 2 次ばね系 最も基本的な振動系である強制 2 次ばね系を取り扱い、本手法の有効性を検証する。粘性減衰を有し調和外力が作用する強制 2 次ばね系の摂動項 f は、式(2.48)と同一式である $f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c\dot{x}$ とおくことができる。以下では、 $F = c = 1.0$ および $\varepsilon = 0.1$ とした場合の計算結果を示す。

まず、周波数応答の全般的様相を概観するため、主共振域の p-p 振幅、最大・最小振幅、位相の周波数応答曲線を図 3.1~3.3 に示す。これらの図から、三角関数を母解とする通常の方法による結果はシューティング法の結果と大きく異なり、とくに主共振部では、誤差が著しく増大していることがわかる。

一方、本手法による近似解は、シューティング法の結果とよい一致を示している。ただし、本手法による近似解も、主共振の先端部（低振動数域）では振動数の低下とともに若干ながら次第に誤差が増大する傾向が見られるが、通常の方法に比較すれば十分に精度が改善されている。また、シューティング法による結果では、 $\omega = 0.5$ 近傍において 2 次の高調波共振の発生が確認できるが、本手法および通常の方法とともに、この高調波共振解は求めることはできない。三角関数を用いた通常の方法では、基本調波成分のみを考慮した近似解が求められる。一方、本手法では、基本調波成分だけではなく、高調波成分をも求められるため、非線形の強い系に対しても精度よい近似解を求めることができる。そこで、シューティング法による数値解を基準とした rms 誤差 E_{rms} により、近似解の定量的な精度の検証を行った。 E_{rms} の定義は、式(2.53)の同様に次式とする。

$$E_{\text{rms}} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - x_s)^2 du \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{(a_0 - a_{s,0})^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \{(a_n - a_{s,n})^2 + (b_n - b_{s,n})^2\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(3.29)$$

ここに、 a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) は本手法による近似解の n 次の余弦、正弦フーリエ係数であり、 q 展開公式から次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A_0 + \sum_{n=1} A_n \cos n(\omega t + \bar{\theta}) \\ &= A_0 + \sum_{n=1} [a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t] \\ a_n &= A_n \cos n\bar{\theta}, \quad b_n = -A_n \sin n\bar{\theta} \\ A_0 &= B - \frac{\bar{A}}{\bar{k}^2} \left(1 - \frac{\bar{E}}{\bar{K}} \right) \\ A_n &= \frac{2n\pi^2 \bar{A}}{(\bar{k}\bar{K})^2} \frac{\bar{q}^n}{1 - \bar{q}^{2n}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.30)$$

また, $a_{s,n}, b_{s,n}$ ($n=0,1,2,\dots$)はFFTにより求めたシューティング法による数値解の n 次の余弦および正弦フーリエ係数である. また, 従来の平均法で得られた近似解に対しても同様の誤差評価を行った. 図3.4には, 最大振幅の相対誤差 E_{\max} , 図3.5に E_{rms} の計算結果を示す. 図示の全振動数域において, 従来の三角関数を母解とする平均法に比較して精度が改善されていることが確認できる. とくに高振動数域で精度の改善が著しいことがわかる.

式(3.30)により計算した0次~6次までの調波振幅の周波数応答を図3.6に示す. この図からわかるように, 本手法による近似解は定数項成分を含めて高次の調波振幅に対してもシューティング法の結果とよい一致を示している.

図3.7に, $\omega=0.6$ の主共振域における不安定解の振動波形と位相平面図を示す. これらの図から, 本手法の結果(太い破線)は, 最大, 最小振幅ばかりでなく, 波形の微妙な歪みまでもシューティング法の結果(印)とよく一致していることがわかる. 一方, 三角関数を母解とする平均法による結果(細い破線)は, シューティング法の結果と著しく異なるものとなる.

摂動項の大きさが近似解の精度に及ぼす影響を見るために, ε の大きさを変化させたときの E_{rms} の計算結果を図3.8に示す. 図示の計算は, $\omega=0.9$ における主共振領域の安定解に対し, $F=c=1.0$ と固定し ε の大きさを $0.1 \rightarrow 10^{-5}$ と変化させたときの E_{rms} の計算結果である. ε が小さくなるにつれて, 三角関数を母解とする平均法による近似解ではほとんど精度の向上はみられないのに対し, 本手法による近似解の精度は著しく向上する. このことから, 2次ばね系に付与される摂動項が小さな系に対しては, 本手法によれば極めて高精度の近似解を計算できることがわかる.

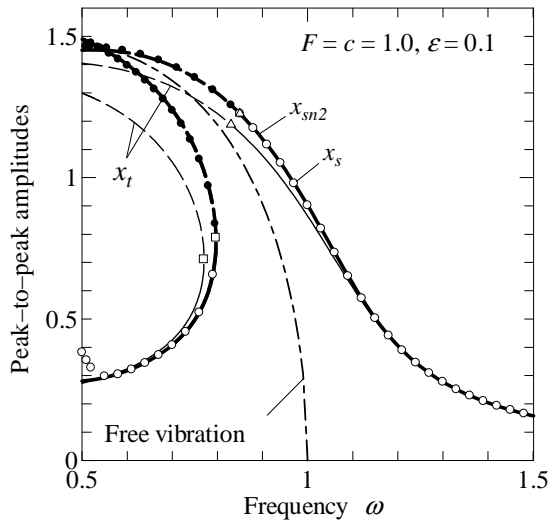


図 3.1 強制 2 次ばね系 p-p 振幅の周波数応答

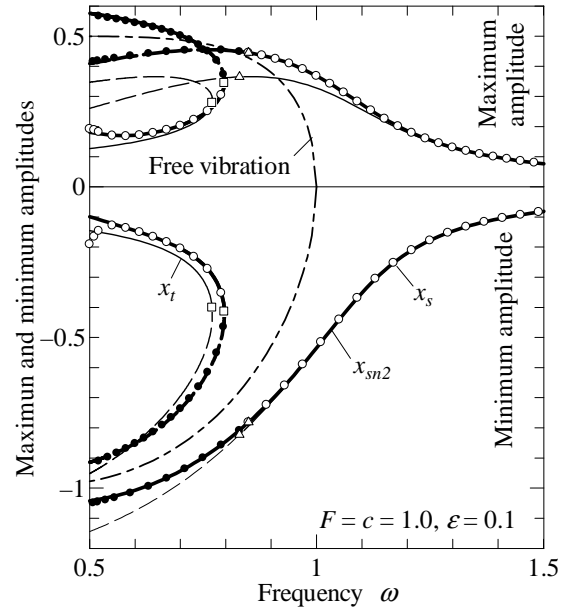


図 3.2 強制 2 次ばね系の最大・最小振幅の周波数応答

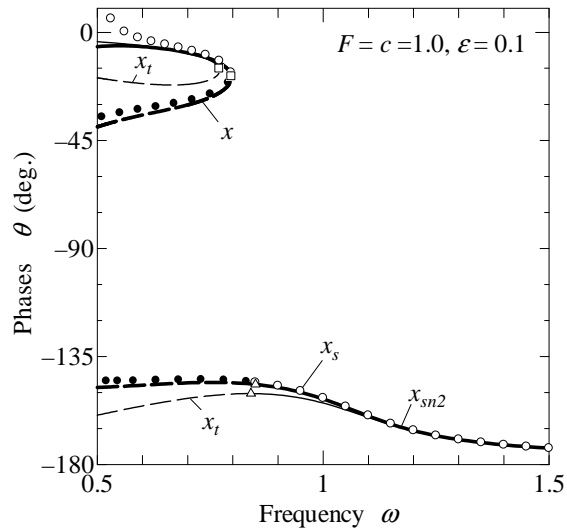


図 3.3 強制 2 次ばね系位相の周波数応答

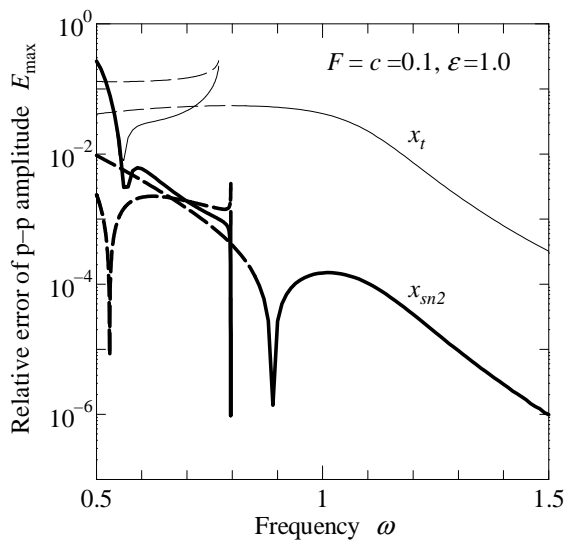


図 3.4 強制 2 次ばね系 p-p 振幅の相対誤差

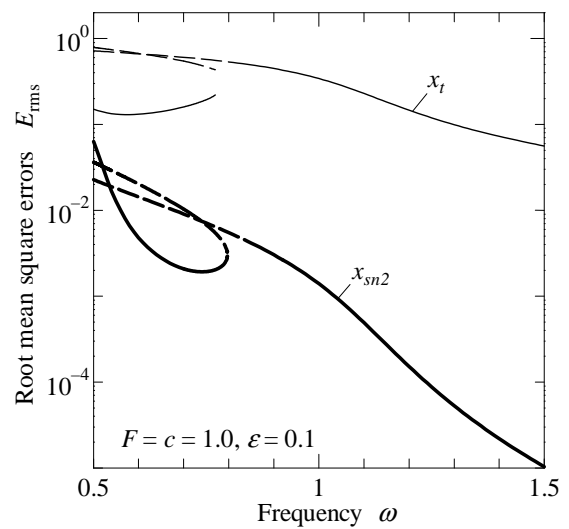


図 3.5 強制 2 次ばね系 rms 誤差

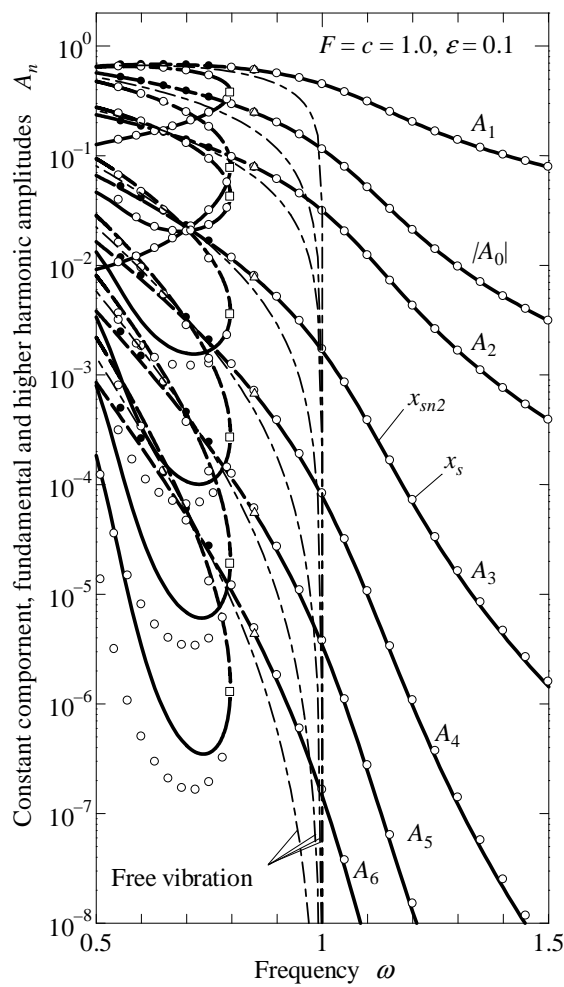
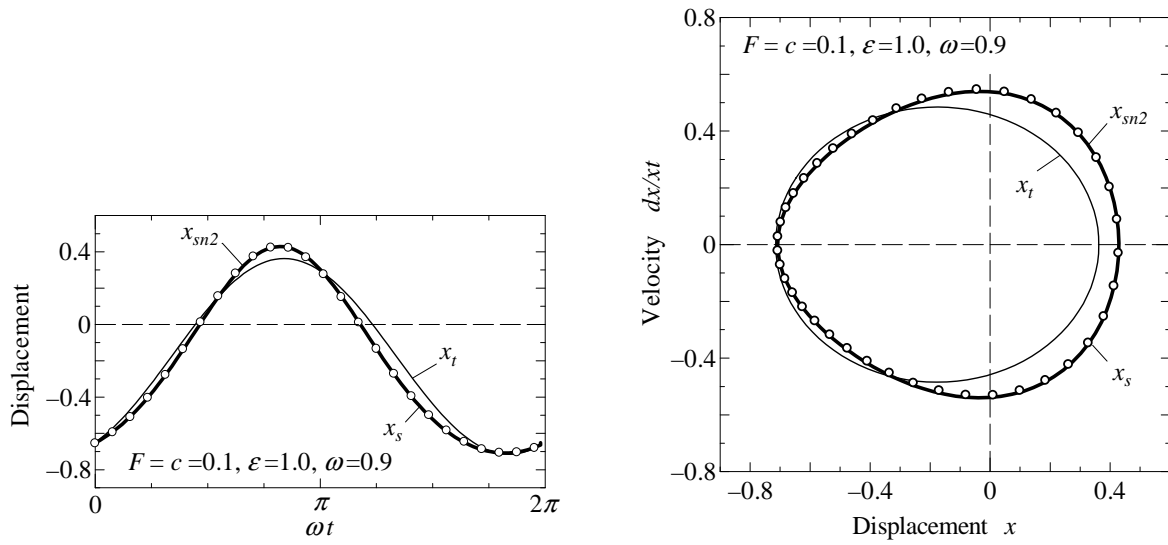


図 3.6 強制 2 次ばね系の調波振幅の周波数応答



(a) 振動波形

(b) 位相平面図

図 3.7 強制 2 次ばね系の振動波形と位相平面図 ($\omega=0.9$)

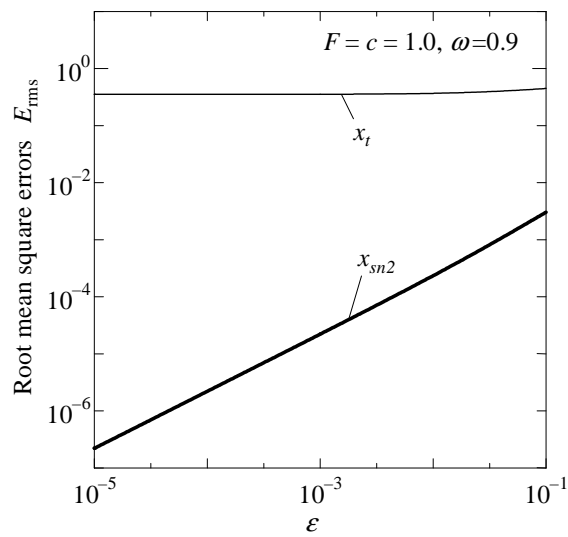


図 3.8 強制 2 次ばね系における rms 誤差に及ぼす摂動項の大きさ ε の影響

3.3.3 3次の非線形項を有する強制2次ばね系 次の例として、摂動項 f に周期的強制外力、減衰項及び変位の3次非線形項を有する振動系に対する計算結果を示す。この場合の摂動項 f は次式のように表される。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c\dot{x} - k_3 x^3 \quad \dots\dots\dots(3.31)$$

ここに、 k_3 は3次非線形項 x^3 の大きさを表すパラメータである。この系は、ばね関数が変位の1~3次項までのすべてを有する振動系である。ところで、前章において提案した cn 型および sn 型平均法は、定常解がフーリエ級数の奇数次項のみで構成されるいわゆる奇数次解のみを解析対象としている。そのため、 f が式(3.31)で定義される系に対して cn 型平均法を適用した場合、変位の偶数次非線形ばね項の影響は近似解にまったく反映されないため、式(3.31)で定義される系の近似解を精度良く求めることはできない⁽¹⁶⁾。一方、本手法によれば、このような系に対しても、その定常解を精度良く求めることが可能となる。

図3.9に、 $F=c=1.0$ 、 $k_3=\pm 1.0$ 、 $\varepsilon=0.1$ とした場合の p-p 振幅の周波数応答を示す。本手法による結果は、シューティング法の結果とよく一致していることがわかる。図が煩雑になるため、図3.9では通常の方法による結果の表示を省略したが、本手法による近似解は、通常の方法による近似解と比較してかなり高精度であることを確認している。この系のように奇・偶数次の非線形ばね項を有する系に対しても、本手法によれば精度よい近似解を求めることが可能となる。

3.3.4 磁気浮上系 最後の計算例として、磁気反発力によって浮上する物体の運動を取り扱う。基礎部の強制変位励振を受ける磁気浮上物体に対する無次元化運動方程式として次式が提案されている⁽³²⁾。

$$\ddot{\eta} + \varepsilon c \dot{\eta} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+\eta)^2} \right\} = \varepsilon P \cos \omega t, \quad \text{ただし, } P = a\omega\sqrt{\omega^2 + c^2} \quad \dots\dots\dots(3.32)$$

ここに、 η, a, ω, c は、それぞれ変位、強制変位振幅、角振動数、減衰を代表するパラメータである。式(3.32)の非線形復元力項は、次式のように級数展開できる。

$$\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+\eta)^2} \right\} = \eta - \frac{3}{2} \eta^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-n+1)}{n!} \eta^n \quad \dots\dots\dots(3.34)$$

ここに、 $\gamma=-2$ である。上式から、非線形復元力項の $\eta - 3\eta^2/2$ 以外の項を摂動項に移項すれば、本手法の適用が可能となる。 $x = -3\eta/2$ なる変換を行い、式(3.34)を式(3.1)の形に変形すれば、摂動項 f は次式となる。

$$\begin{aligned} f(\omega t, x, \dot{x}) &= -\frac{3}{2} P \cos \omega t - c\dot{x} - \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{3}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-n+1)}{n!} \left(-\frac{2}{3} x \right)^n \right\} \\ &= -\frac{3}{2} P \cos \omega t - c\dot{x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{4x^3(x-2)}{(3-2x)^2} \quad \dots\dots\dots(3.35) \end{aligned}$$

図3.10に、パラメータの値を $a=1.0$ 、 $c=2.6$ 、 $\varepsilon=0.1$ とした場合の p-p 振幅の周波

数応答曲線に示す. このような強い非線形性を有する系に対しても, 本手法による近似解は, シューティング法の結果とよく一致していることがわかる.

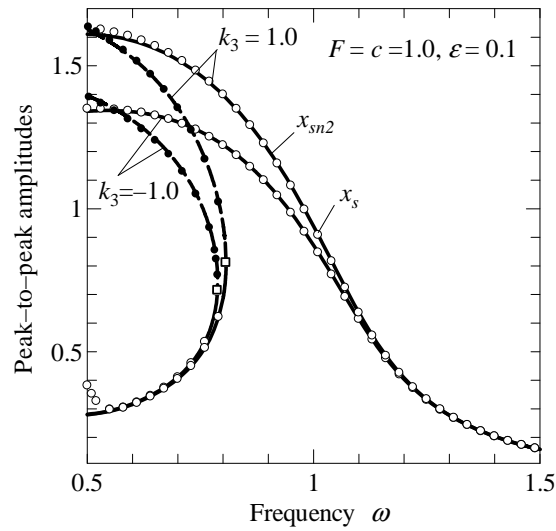


図 3.9 3 次の非線形ばね項を有する強制 2 次ばね系の p-p 振幅の周波数応答

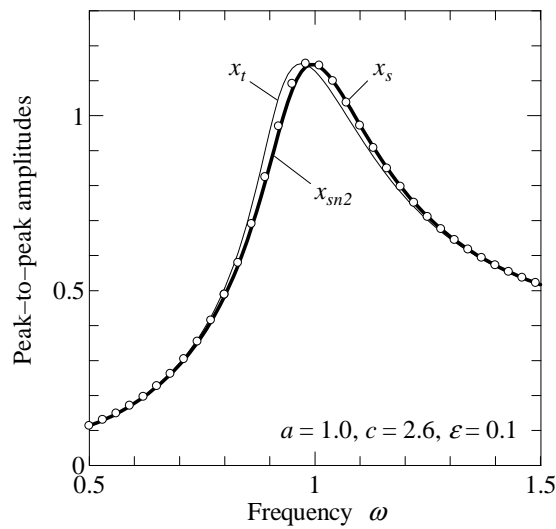


図 3.10 磁気浮上系の p-p 振幅の周波数応答

第 4 章 cn 関数と sn 関数を結合した関数を母解とする 楕円型平均法

2 章と 3 章において論じた単一項のみのヤコビの楕円関数を母解として用いた楕円平均法は, Duffing 系を基盤とする振動系と 2 次ばね系を基盤とする振動系の基本調波振動の精度よい近似解を求めることができ, 従来の三角関数を母解とした平均法に対する精度面の優位性を確認することができた. しかしながら, 以下のような問題点も明らかとなった.

- (1) 解析対象となる系の非線形ばね特性が複雑な場合, 近似解の精度が悪化をきたす場合や求解が不可能となる場合がある. たとえば, 非線形ばねが漸硬性, 漸軟性の両方の性質を有するような複雑な振動系に単項型楕円平均法を適用した場合, 得られる近似解の精度は不十分なものとなる. また, 近似解を得ることすらできない場合が存在する. (後述の 3.4.3 節参照)
- (2) 基盤となる系により, 2 章で論じた各楕円平均法の使い分けをしなければならない. すなわち, 解析可能となる系に制約が存在し, 解法の適用範囲という面では必ずしも優れているとは言えない.
- (3) 2 章と 3 章で論じた楕円平均法では, 非線形振動系に発生する高調波共振や分数調波振動の近似解を求めることはできない.

以上のような問題を解決して, 近似解の精度や適用範囲などを改善し, さらなる楕円平均法の高性能化をはかるため, 本章では, 異種の楕円関数を結合させた関数を母解として用いた平均法について検討する. 1 次成分のみの三角関数を線形結合させた関数 (たとえば, $A \cos \omega t + B \sin \omega t$) は, 振幅と位相が変化するのみで本質的には単一の三角関数と変化はない. それに対して異種の楕円関数を結合させた場合 ($A \operatorname{cn} u + B \operatorname{sn} u$) は, その楕円関数が 1 次成分どうしの結合であっても, 既存の単一項の楕円関数とは異なった別の特性を有した関数となる. 楕円関数のこのような性質に着目し, 本章では cn 関数と sn 関数の結合関数を母解として用いる平均法⁽²¹⁾⁻⁽²³⁾について論じる. 以下では, この手法を **cn+sn 型平均法**と呼ぶこととする.

4.1 基礎式

cn+sn 型平均法では, 次のような Duffing 系を基盤とする無次元化非線形常微分方程式を基礎式とする.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \beta_1 x + \beta_3 x^3 &= \varepsilon f(\omega t, x, \dot{x}) \\ f(\omega t, x, \dot{x}) &= f(\omega t + 2\pi, x, \dot{x}) \\ (\beta_1 = \beta_3 = 1) \cup (\beta_1 = 1, \beta_3 = -1) \cup (\beta_1 = -1, \beta_3 = 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

ここで、 x, ω はそれぞれ変位、振動数を表す無次元変数、 t は時間を代表するパラメータ、 $\ddot{}$ は時間 t に関する微分を表す。ばね関数中のパラメータ $\beta_1, \beta_3 (= \pm 1)$ の組み合わせにより、式(4.1)の左辺は漸軟型、漸硬型および飛移り型の Duffing 方程式となる。sn+cn 型平均法は、漸硬型 Duffing 系($\beta_1 = \beta_3 = 1$)、漸軟型 Duffing 系($\beta_1 = 1, \beta_3 = -1$) および飛移り型 Duffing 系($\beta_1 = -1, \beta_3 = 1$)の両振りモードを基盤とする振動系を解析の対象とする。式(4.1)の右辺の ε は、Duffing 系不減衰自由振動方程式に対する摂動項 f の大きさを表す微小パラメータである。この摂動項 f は、減衰項、外力項および x^3 と異なる非線形性からなる関数である。 $\varepsilon = 0$ の場合には、式(4.1)は、Duffing 系不減衰自由振動方程式となる。漸硬型 Duffing 系及び飛移り型 Duffing 系の両振りモードの自由振動解は cn 関数、漸軟型 Duffing 系の自由振動解は sn 関数を用いて記述することができる。

本章では、cn 関数と sn 関数を結合した関数を母解とした平均法により、前述の 3 振動系を基盤とする系の定常周期解の高精度近似解を求める。

4.2 cn+sn 型楕円平均法

4.2.1 解の仮定 cn+sn 型平均法では、次式のような cn 関数と sn 関数を結合した関数を平均法の母解として利用する。

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A(t)\text{cn}[v_1, k(t)] + B(t)\text{sn}[v_2, k(t)] \\ \dot{x}(t) &= -A(t)\alpha\omega\text{sn}[v_1, k(t)]\text{dn}[v_1, k(t)] + B(t)\alpha\omega\text{cn}[v_2, k(t)]\text{dn}[v_2, k(t)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \alpha u_1, & u_1 &= \omega t + \theta_1(t) \\ v_2 &= \alpha u_2, & u_2 &= \omega t + \theta_2(t), & \alpha &= \frac{2K}{\pi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.3)$$

未知変数は、 $A = A(t), B = B(t), \theta_1 = \theta_1(t), \theta_2 = \theta_2(t), k = k(t)$ の 5 個であり、これらの変数は、それぞれ時間 t に関する徐変化関数であると定義する。 $x(t)$ は、 t に関して周期 $2\pi/\omega$ 、 $u_i (i=1,2)$ に関して周期 2π 、 $v_i (i=1,2)$ に関して周期 $4K$ の関数である。

式(4.1)において、漸硬型 Duffing 系または飛移り型 Duffing 系（両振りモード）を基盤とする系を解析対象とする場合、摂動系($\varepsilon \neq 0$)の定常周期解は $\varepsilon = 0$ の場合の自由振動解である cn 関数とほぼ類似の特性を有するものと考えられる。すなわち、式(4.1)の母解の第 1 項 $A\text{cn}_1$ が最もよくその特性を近似できる最良の関数であると考えられる。2 章で論じた cn 型平均法は、この cn 関数のみを母解として利用した解法である。一方、cn+sn 型平均法においては、式(4.2)に示すように cn 関数と sn 関数を結合した関数を母解として用いる。漸硬型 Duffing 系または飛移り型 Duffing 系（両振りモード）を基盤とする系を解析する場合には、式(4.2)の第 2 項 $B\text{sn}_2$ は、定常解の特性を近似する上でベースとなる $A\text{cn}_1$ に対する補正項として作用する。この第 2 項の付与により単一項の cn 関数のみを利用する cn 型平均法による近似解より、さらに改善さ

れた精度よい近似解を求めることが可能となる．一方，漸軟型 Duffing 系を基盤とする系に対して，cn+sn 型平均法を適用した場合には，漸軟型 Duffing 系の自由振動解である sn 関数をベースとする式(4.2)の第 2 項 $B \text{sn}_2$ が定常解の特性を近似する主要な関数となり，第 1 項 $A \text{cn}_1$ がその補正項となる．

本章の以下の記述において，表記の簡略化のためヤコビの楕円関数を次のように略記する．

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}(v_1, k) &\equiv \text{sn}_1, & \text{cn}(v_1, k) &\equiv \text{cn}_1, & \text{dn}(v_1, k) &\equiv \text{dn}_1 \\ \text{sn}(v_2, k) &\equiv \text{sn}_2, & \text{cn}(v_2, k) &\equiv \text{cn}_2, & \text{dn}(v_2, k) &\equiv \text{dn}_2 \end{aligned} \right\}$$

4.2.2 時間微分公式 後の計算のため，時間 t に関する微分公式を導出しておく．まず， $A, B, \theta_1, \theta_2, k$ が時間の関数であることに注意すると， d/dt は，

$$\frac{d}{dt} = \frac{dA}{dt} \frac{\partial}{\partial A} + \frac{dB}{dt} \frac{\partial}{\partial B} + \frac{dv_1}{dt} \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{dv_2}{dt} \frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{dk}{dt} \frac{\partial}{\partial k} \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

となる．ここで， v_1, v_2 の時間 t に関する微分を求めると次式を得る．

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} u_1 + \frac{du_1}{dt} \alpha = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - K \right) u_1 + K(\omega + \dot{\theta}_1) \right] \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{d\alpha}{dt} u_2 + \frac{du_2}{dt} \alpha = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - K \right) u_2 + K(\omega + \dot{\theta}_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

ゆえに，上式と式(2.17)から時間微分公式として次式を得る．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \dot{A} \frac{\partial}{\partial A} + \dot{B} \frac{\partial}{\partial B} + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - K \right) u_1 + K(\omega + \dot{\theta}_1) \right] \frac{\partial}{\partial v_1} \\ &+ \frac{2}{\pi} \left[\frac{\dot{k}}{k} \left(\frac{E}{k'^2} - K \right) u_2 + K(\omega + \dot{\theta}_2) \right] \frac{\partial}{\partial v_2} + \dot{k} \frac{\partial}{\partial k} \quad \dots\dots\dots(4.6) \end{aligned}$$

4.2.3 平均化方程式の導出 式(4.6)を利用して，式(4.2)の第 1 式を t に関して微分し， \dot{x} を導出すると次式を得る．

$$\dot{x} = \dot{A} \text{cn}_1 + \dot{B} \text{sn}_2 - A \alpha (\omega + \dot{\theta}_1) \text{sn}_1 \text{dn}_1 + B \alpha (\omega + \dot{\theta}_2) \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \frac{\dot{k}}{kk'^2} (A \varphi_{c1} - B \varphi_{s1}) \quad (4.7)$$

ここに，

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c1} &= \text{sn}_1 (Z_1 \text{dn}_1 - k^2 \text{sn}_1 \text{cn}_1) \\ \varphi_{s1} &= \text{cn}_2 (Z_2 \text{dn}_2 - k^2 \text{sn}_2 \text{cn}_2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.8)$$

$Z_1 = Z_1(v_1, k)$ ， $Z_2 = Z_2(v_2, k)$ はヤコビの zeta 関数である．式(4.2)の第 2 式と式(4.7)の比較により，次の関係式を得る．

$$\dot{A} \text{cn}_1 + \dot{B} \text{sn}_2 - \dot{\theta}_1 A \alpha \text{sn}_1 \text{dn}_1 + \dot{\theta}_2 B \alpha \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \dot{k} \frac{1}{kk'^2} (A \varphi_{c1} - B \varphi_{s1}) = 0 \quad \dots\dots\dots(4.9)$$

次に，式(4.2)の第 2 式を t に関して微分して， \ddot{x} を求めると，

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -\dot{A}\alpha\omega\text{sn}_1\text{dn}_1 + A\alpha^2\omega(\omega + \dot{\theta}_1)\varphi_{c_2} + \dot{B}\alpha\omega\text{cn}_2\text{dn}_2 \\ & + B\alpha^2\omega(\omega + \dot{\theta}_2)\varphi_{s_2} + \dot{k}\frac{\alpha\omega}{kk'^2}(-A\varphi_{c_3} + B\varphi_{s_3}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.10)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{c_2} &= \text{cn}_1(2k^2\text{sn}_1^2 - 1) \\ \varphi_{s_2} &= \text{sn}_2[2k^2\text{sn}_2^2 - (1 + k^2)] \\ \varphi_{c_3} &= \left(\frac{E}{K} - 1\right)\text{sn}_1\text{dn}_1 + 2k^2\text{sn}_1\text{cn}_1^2\text{dn}_1 + Z_1\text{cn}_1(2k^2\text{sn}_1^2 - 1) \\ \varphi_{s_3} &= \left(\frac{E}{K} - 1\right)\text{cn}_2\text{dn}_2 + k^2(2\text{cn}_2^2 - 1)\text{cn}_2\text{dn}_2 + Z_2\text{sn}_2(1 + k^2 - 2k^2\text{sn}_2^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.11)$$

式(4.2)の第1式と式(4.10)を基礎式(4.1)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\dot{A}\alpha\omega\text{sn}_1\text{dn}_1 + \dot{B}\alpha\omega\text{cn}_2\text{dn}_2 + \dot{\theta}_1 A\alpha^2\omega\varphi_{c_2} + \dot{\theta}_2 B\alpha^2\omega\varphi_{s_2} + \dot{k}\frac{\alpha\omega}{kk'^2}(-A\varphi_{c_3} + B\varphi_{s_3}) \\ & = \varepsilon f - \Gamma \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.12)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \Gamma = & A\text{cn}_1[\alpha^2\omega^2(2k^2 - 1) + \beta_1] + B\text{cn}_1^3[\beta_3 A^2 - 2\alpha^2\omega^2 k^2] \\ & + B\text{sn}_2[-\alpha^2\omega^2(1 + k^2) + \beta_1] + B\text{sn}_2^3[\beta_3 B^2 + 2\alpha^2\omega^2 k^2] \\ & + 3\beta_3 AB\text{cn}_1\text{sn}_2[A\text{cn}_1 + B\text{sn}_2] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4.13)$$

ところで、 $(\beta_1 = \beta_3 = 1)$ のとき、 $\varepsilon \rightarrow 0$ では、明らかに近似解は漸硬型 Duffing 方程式の自由振動解の特性に近づくため、 $A \rightarrow \hat{A}$ 、 $\hat{B} \rightarrow 0$ 、 $k \rightarrow \hat{k}$ となる。このとき、式(2.12)の関係から ε が微小の時、式(18)の cn 、 cn^3 の係数は微小となり、式(4.13)の右辺のすべての項が微小量となる。ゆえに、式(4.12)の右辺 $\varepsilon f - \Gamma$ は明らかに得微量となるので、式(4.12)の左辺の \dot{A} 、 \dot{B} 、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 、 \dot{k} も微量とみなすことが可能である。また、式(4.1)において $(\beta_1 = 1, \beta_3 = -1)$ または $(\beta_1 = -1, \beta_3 = 1)$ の場合についてもまったく同様の結論を得ることができる。したがって、 \dot{A} 、 \dot{B} 、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 、 \dot{k} に対して平均化処理を施すことが可能である。

2.4.3 節と同様の手順により、まず、(4.9)および式(4.12)を用いて \dot{A} 、 \dot{B} 、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 、 \dot{k} をそれぞれ消去した5個の式を導出し、それぞれの式を平均化することにより、5本の平均化方程式を求める。

最初に、式(4.9)、(4.12)から \dot{A} を消去した後に、 u_1 に関して1周期の平均化を行うと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
\bar{B}I_1 + \bar{\theta}_1 I_2 + \bar{\theta}_2 I_3 + \bar{k}I_4 + J_5 &= \varepsilon H_1, \\
I_1 &= \bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} [\text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{sn}_2 - \text{cn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2] du, \\
I_2 &= \bar{A}\bar{\alpha}^2\omega \int_0^{2\pi} [\varphi_{c2} \text{cn}_1 - \text{sn}_1^2 \text{dn}_1^2] du, \\
I_3 &= \bar{B}\bar{\alpha}^2\omega \int_0^{2\pi} [\text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{s2} \text{cn}_1] du, \\
I_4 &= \frac{\bar{\alpha}\omega}{\bar{k}\bar{k}'^2} \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c1} \text{sn}_1 \text{dn}_1 - \varphi_{c3} \text{cn}_1) du + \bar{B} \int_0^{2\pi} (-\varphi_{s1} \text{sn}_1 \text{dn}_1 + \varphi_{s3} \text{cn}_1) du \right], \\
J_5 &= \int_0^{2\pi} \Gamma \text{cn}_1 du, \\
H_1 &= \int_0^{2\pi} f \text{cn}_1 du
\end{aligned}
\right\} \dots(4.14)$$

次に、式(4.9), (4.12)から \dot{B} を消去した後に、 u_1 に関して1周期の平均化を行うと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
\bar{A}I_5 + \bar{\theta}_1 I_6 + \bar{\theta}_2 I_7 + \bar{k}I_8 + J_9 &= \varepsilon H_2, \\
I_5 &= \bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} [\text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{sn}_2 + \text{cn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2] du, \\
I_6 &= \bar{A}\bar{\alpha}^2\omega \int_0^{2\pi} [-\varphi_{c2} \text{sn}_2 - \text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2] du, \\
I_7 &= \bar{B}\bar{\alpha}^2\omega \int_0^{2\pi} [-\text{sn}_2 \varphi_{s2} + \text{cn}_2^2 \text{dn}_2^2] du, \\
I_8 &= \frac{\bar{\alpha}\omega}{\bar{k}\bar{k}'^2} \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c3} \text{sn}_2 + \varphi_{c1} \text{cn}_2 \text{dn}_2) du - \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s3} \text{sn}_2 + \varphi_{s1} \text{cn}_2 \text{dn}_2) du \right], \\
J_9 &= -\int_0^{2\pi} \Gamma \text{sn}_2 du, \\
H_2 &= -\int_0^{2\pi} f \text{sn}_2 du
\end{aligned}
\right\} \dots(4.15)$$

次に、式(4.9), (4.12)から $\dot{\theta}_1$ を消去した後に、 u_1 に関して1周期の平均化を行うと次式を得る。

$$\left.
\begin{aligned}
\bar{A}I_9 + \bar{B}I_{10} + \bar{\theta}_2 I_{11} + \bar{k}I_{12} + J_3 &= \varepsilon H_3, \\
I_9 &= \bar{A}\bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} [-\text{sn}_1^2 \text{dn}_1^2 + \varphi_{c2} \text{cn}_1] du, \\
I_{10} &= \bar{A}\bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} [\text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{c2} \text{sn}_2] du, \\
I_{11} &= \bar{\theta} \bar{B} \bar{A} \bar{\alpha}^2 \omega \int_0^{2\pi} [\varphi_{s2} \text{sn}_1 \text{dn}_1 + \varphi_{c2} \text{cn}_2 \text{dn}_2] du, \\
I_{12} &= \frac{\bar{\alpha}\omega}{\bar{k}\bar{k}'^2} \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (-\varphi_{c3} \text{sn}_1 \text{dn}_1 + \varphi_{c1} \varphi_{c2}) du + \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s3} \text{cn}_2 \text{dn}_2 - \varphi_{c2} \varphi_{s1}) du \right], \\
J_3 &= \int_0^{2\pi} \Gamma A \text{sn}_1 \text{dn}_1 du, \\
H_3 &= \int_0^{2\pi} f A \text{sn}_1 \text{dn}_1 du
\end{aligned}
\right\} \dots(4.16)$$

さらに、式(4.9), (4.12)から $\dot{\theta}_2$ を消去した後に、 u_1 に関して1周期の平均化を行うと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A}I_{13} + \bar{B}I_{14} + \bar{\theta}_1 I_{15} + \bar{k}I_{16} + J_4 &= \varepsilon H_4, \\
 I_{13} &= \bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} (\text{sn}_1 \text{dn}_1 \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{s2} \text{cn}_1) du, \\
 I_{14} &= \bar{\alpha}\omega \int_0^{2\pi} (-\text{cn}_2^2 \text{dn}_2^2 + \varphi_{s2} \text{sn}_2) du, \\
 I_{15} &= \bar{A}\bar{\alpha}^2\omega \int_0^{2\pi} [-\varphi_{c2} \text{cn}_2 \text{dn}_2 - \varphi_{s2} \text{sn}_1 \text{dn}_1] du, \\
 I_{16} &= \frac{\bar{k}\bar{\alpha}\omega}{\bar{k}k^2} \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c3} \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{c1} \varphi_{s2}) du - \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s2} \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{s1} \varphi_{s2}) du \right], \\
 J_4 &= -\int_0^{2\pi} \Gamma \text{cn}_2 \text{dn}_2 du, \\
 H_4 &= \int_0^{2\pi} f \text{cn}_2 \text{dn}_2 du
 \end{aligned} \right\} \dots(4.17)$$

最後に、式(4.9), (4.12)から \dot{k} を消去した後に、 u_1 に関して1周期の平均化を行うと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A}I_{17} + \bar{B}I_{18} + \bar{\theta}_1 I_{19} + \bar{\theta}_2 I_{20} + J_5 &= \varepsilon H_5, \\
 I_{17} &= \bar{\alpha}\omega \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c3} \text{cn}_1 - \varphi_{c1} \text{sn}_1 \text{dn}_1) du + \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s1} \text{sn}_1 \text{dn}_1 - \varphi_{s3} \text{cn}_1) du \right], \\
 I_{18} &= \bar{\alpha}\omega \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c3} \text{sn}_2 + \varphi_{c1} \text{cn}_2 \text{dn}_2) du - \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s3} \text{sn}_2 + \varphi_{s1} \text{cn}_2 \text{dn}_2) du \right], \\
 I_{19} &= \bar{A}\bar{\alpha}^2\omega \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c1} \varphi_{c2} - \varphi_{c3} \text{sn}_1 \text{dn}_1) du + \bar{B} \int_0^{2\pi} (-\varphi_{s1} \text{cn}_2 \text{dn}_2 - \varphi_{s3} \text{sn}_2) du \right], \\
 I_{20} &= \bar{B}\bar{\alpha}^2\omega \left[\bar{A} \int_0^{2\pi} (\varphi_{c3} \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{c1} \varphi_{s2}) du - \bar{B} \int_0^{2\pi} (\varphi_{s3} \text{cn}_2 \text{dn}_2 + \varphi_{s1} \varphi_{s2}) du \right], \\
 J_5 &= \int_0^{2\pi} \Gamma (A\varphi_{c1} - B\varphi_{s1}) du, \\
 H_5 &= \int_0^{2\pi} f (A\varphi_{c1} - B\varphi_{s1}) du
 \end{aligned} \right\} \dots(4.18)$$

以上の手順により導出された5本の平均化方程式をまとめると次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{B}\bar{I}_1 + \bar{\theta}_1 \bar{I}_2 + \bar{\theta}_2 \bar{I}_3 + \bar{k}\bar{I}_4 + \bar{J}_1 &= \varepsilon \bar{H}_1 \\
 \bar{A}\bar{I}_5 + \bar{\theta}_1 \bar{I}_6 + \bar{\theta}_2 \bar{I}_7 + \bar{k}\bar{I}_8 + \bar{J}_2 &= \varepsilon \bar{H}_2 \\
 \bar{A}\bar{I}_9 + \bar{B}\bar{I}_{10} + \bar{\theta}_2 \bar{I}_{11} + \bar{k}\bar{I}_{12} + \bar{J}_3 &= \varepsilon \bar{H}_3 \\
 \bar{A}\bar{I}_{13} + \bar{B}\bar{I}_{14} + \bar{\theta}_1 \bar{I}_{15} + \bar{k}\bar{I}_{16} + \bar{J}_4 &= \varepsilon \bar{H}_4 \\
 \bar{A}\bar{I}_{17} + \bar{B}\bar{I}_{18} + \bar{\theta}_1 \bar{I}_{19} + \bar{\theta}_2 \bar{I}_{20} + \bar{J}_5 &= \varepsilon \bar{H}_5
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.19)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= \int_0^{2\pi} \bar{F} \text{cn}_1 du_1 \\ \bar{J}_2 &= \int_0^{2\pi} \bar{F} \text{sn}_2 du_1 \\ \bar{J}_3 &= \int_0^{2\pi} \bar{F} \text{sn}_1 \text{dn}_1 du_1 \\ \bar{J}_4 &= \int_0^{2\pi} \bar{F} \text{cn}_2 \text{dn}_2 du_1 \\ \bar{J}_5 &= \int_0^{2\pi} \bar{F} (\bar{A} \varphi_{c1} - \bar{B} \varphi_{s1}) du_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.20)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_1 &= \int_0^{2\pi} f \text{cn}_1 du_1 \\ \bar{H}_2 &= \int_0^{2\pi} f \text{sn}_2 du_1 \\ \bar{H}_3 &= \int_0^{2\pi} f \text{sn}_1 \text{dn}_1 du_1 \\ \bar{H}_4 &= \int_0^{2\pi} f \text{cn}_2 \text{dn}_2 du_1 \\ \bar{H}_5 &= \int_0^{2\pi} f (\bar{A} \varphi_{c1} - \bar{B} \varphi_{s1}) du_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.21)$$

ここで、頭号“-”はそれぞれ平均化された量であり、 $\bar{F} = \Gamma(\bar{A}, \bar{B}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{k})$ である。式(4.14)～(4.18)中の \bar{I}_i ($i=1\sim 20$)は、すべて $\bar{A}, \bar{B}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{k}$ の関数である。ただし、この \bar{I}_i ($i=1\sim 20$)は近似解の決定には関与しない関数である。

4.2.4 定常解の計算 式(4.19)において、定常状態では $\bar{A} = \bar{B} = \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{k} = 0$ であることから、次のような $\bar{A}, \bar{B}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{k}$ の決定のための条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= \varepsilon \bar{H}_1 \\ \bar{J}_2 &= \varepsilon \bar{H}_2 \\ \bar{J}_3 &= \varepsilon \bar{H}_3 \\ \bar{J}_4 &= \varepsilon \bar{H}_4 \\ \bar{J}_5 &= \varepsilon \bar{H}_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.22)$$

式(4.22)は $\bar{A}, \bar{B}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{k}$ に関する5元の連立方程式であるから、これをニュートン・ラフソン法などの数値解法により解くことにより、 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{k}$ を決定することができる。その結果、式(4.1)で表される振動系の定常周期近似解を得ることができる。

なお、式(4.22)における積分計算では、次に示すヤコビの楕円関数の加法公式⁽³³⁾を利用する必要がある。

$$\left. \begin{aligned}
\operatorname{sn}(u_1 + u_2) &= \frac{\operatorname{sn}^2 u_1 - \operatorname{sn}^2 u_2}{\operatorname{sn} u_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 - \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_1 \operatorname{dn} u_1} \\
\operatorname{cn}(u_1 + u_2) &= \frac{\operatorname{cn} u_1 \operatorname{cn} u_2 - \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_1 \operatorname{dn} u_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2} \\
\operatorname{dn}(u_1 + u_2) &= \frac{\operatorname{dn} u_1 \operatorname{dn} u_2 - k^2 \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_1 \operatorname{dn} u_2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_1 \operatorname{sn}^2 u_2} \\
Z(u_1 + u_2) &= Z(u_1) - Z(u_2) - k^2 \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2)
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.23)$$

4.2.5 安定判別 前節の手順によって得られた近似解の安定性については、2.5.1 節で論じたように平均化方程式を利用し、定常解を与える x に微小擾乱を加えて、その擾乱の時間挙動によって定常解の安定判別を行うことも可能である。しかしながら、本手法においては、その計算量は極めて膨大となるため実用的ではない。そこで、本手法により得られた定常解に対する安定判別法としては、2.5.1 節で論じた Floquet の理論による安定判別法である基礎式の変分方程式を利用する。その安定判別法は 2.5.1 節と同様の方法で適用できるため、ここではその詳細は省略する。

4.3 数値計算結果

cn+sn 型平均法の有効性の検証のため、数値計算結果を示す。本章では、cn+sn 型平均法による結果と 2 章で示した cn 型平均法、sn 型平均法、従来の三角関数を母解とした平均法及び高精度数値解法であるシューティング法の結果の比較を通して、cn+sn 型平均法の有効性を検証する。本章で示す図において、cn+sn 型平均法による近似解 $x_{\text{cn+sn}}$ を太線で、cn 型平均法による近似解 x_{cn} 、sn 型平均法による近似解 x_{sn} 、および従来の三角関数を母解とする平均法による近似解 x_t を細線で示した。実線は安定解、破線は不安定解を示す。また、シューティング法による数値解 x_s は (安定)、(不安定)で示し、□、△、▽印は、それぞれサドルノード分岐、ピッチフォーク分岐、ホップ分岐に基づく安定解と不安定解の境界点である。また一点鎖線は不減衰自由振動解である。

4.4.1 漸硬型 Duffing 系

A. 基本調波振動 cn+sn 型平均法の有効性を詳細に検証するため、2.6 節で取り上げた粘性減衰を有する強制漸硬型 Duffing 振動系を取り扱う。この場合、この系に対して本手法を適用するには、式(4.1)において $\beta_1 = \beta_3 = 1$ とし、cn 型平均法の式(2.48)と同様に摂動項を $f = F \cos \omega t - c\dot{x}$ とおけばよい。

まず、強制 Duffing 系の周波数応答の全般的様相を概観するため、漸硬型 Duffing 系の振幅の周波数応答曲線を図 4.1(a)に示した。計算に用いたパラメータは、2.6.1 節と同一の $F = 1.0, c = 0.02, \varepsilon = 1.0$ と設定した。cn+sn 型平均法による主共振領域及び主共振およびそのすそ部の近似解は、シューティング法の結果とよく一致しており、精度よい近似解が求められていることがわかる。図 4.1(b)は、2 次高調波共振が派生する $\omega = 0.68 \sim 0.76$ の振動数域の振幅の周波数応答曲線の拡大図である。この振動数域では、主共振左側にピッチフォーク分岐による 2 つの安定・不安定の境界点が存在し、それらに挟まれた振動数域に局所的に不安定解となる領域が存在する。この境界点から非奇数次解である 2 個の 2 次の高調波振動解が分岐発生することが知られている⁽³⁰⁾。cn+sn 型平均法ではこの不安定領域の結果もほぼシューティング法の結果と一致していることが確認できる。なお、母解の特性上、cn+sn 型平均法および cn 型平均法ともに奇数次解のみを解析対象としているため、非奇数次解である 2 次高調波共振解は求めることはできない。図 4.2 には位相の周波数応答を示した。なお、3 次高調波振動の計算結果については、後述する。

cn+sn 型平均法による近似解の定量的な精度を詳細に評価するために、振幅の相対誤差 E_{max} および rms 誤差 E_{rms} の計算結果を図 4.4、4.5 に示した。 E_{max} 、 E_{rms} の定義は式(2.52)、(2.53)と同一である。図示の全振動数域において、cn+sn 型平均法による近似解は、cn 型平均法、従来の平均法に比較して、精度が改善されていることがわかる。図 4.4 の主共振右側すそ部の解に対する E_{rms} の計算結果で比較すると、cn+sn 型平均

法による近似解は、従来の平均法による結果、cn 型平均法による結果と比較して、 $\omega=3.0$ においてそれぞれ約7オーダー、4オーダーの大幅な精度改善効果が確認でき、極めて高精度な近似解を求めることが可能となる。

cn+sn 型平均法では、前章までに論じた他の楕円平均法と同様に、高調波振幅を解析的に求めることが可能である。q 展開公式により高調波振幅は次式のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
 x &= A \operatorname{cn} + B \operatorname{sn} = A \operatorname{cn}[\alpha(\omega t + \theta_1)] + B \operatorname{sn}[\alpha(\omega t + \theta_1)] \\
 &= \frac{2\pi A}{kK} \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{q^{n/2}}{1+q^n} \cos n(\omega t + \theta_1) + \frac{2\pi B}{kK} \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{q^{n/2}}{1-q^n} \sin n(\omega t + \theta_2) \\
 &= \frac{2\pi A}{kK} \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{q^{n/2}}{1+q^n} (\cos n\omega t \cos n\theta_1 - \sin n\omega t \sin n\theta_1) \\
 &\quad + \frac{2\pi B}{kK} \sum_{n=1}^{\text{odd}} \frac{q^{n/2}}{1-q^n} [\sin n\omega t \cos n\theta_2 + \cos n\omega t \sin n\theta_2] \quad \dots\dots\dots(4.24)
 \end{aligned}$$

上式から n 次調波振幅 A_n は次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \sum_{n=1}^{\text{odd}} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\
 a_n &= \frac{2\pi q^{n/2}}{kK} \left[\frac{A}{1+q^n} \cos n\theta_1 + \frac{B}{1-q^n} \sin n\theta_2 \right], \\
 b_n &= \frac{2\pi q^{n/2}}{kK} \left[-\frac{A}{1+q^n} \sin n\theta_1 + \frac{B}{1-q^n} \cos n\theta_2 \right], \\
 A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.25)$$

図 4.5 は、 $A_1 \sim A_9$ の奇数次調波振幅の周波数応答を示す。cn 型平均法による結果 [図 2.6] と同様に、3 次高調波共振が発生する $\omega < 0.5$ を除く振動域で、図示のすべての高調波振幅の計算結果はシューティング法による結果と極めて良く一致していることがわかる。

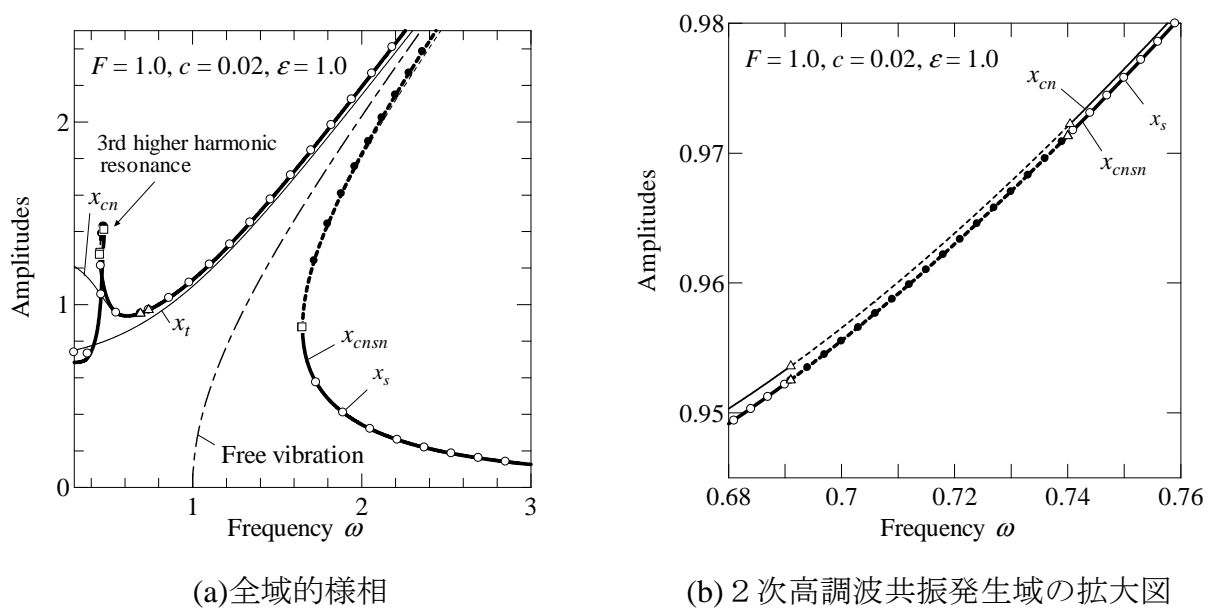


図 4.1 振幅の周波数応答 (強制漸硬型 Duffing 系)

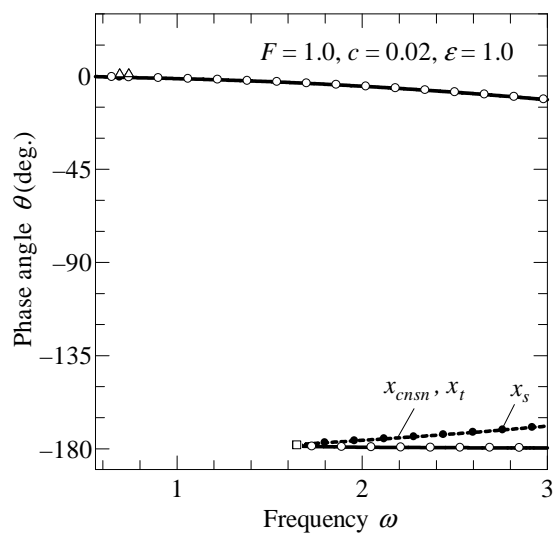


図 4.2 位相の周波数応答 (強制漸硬型 Duffing 系)

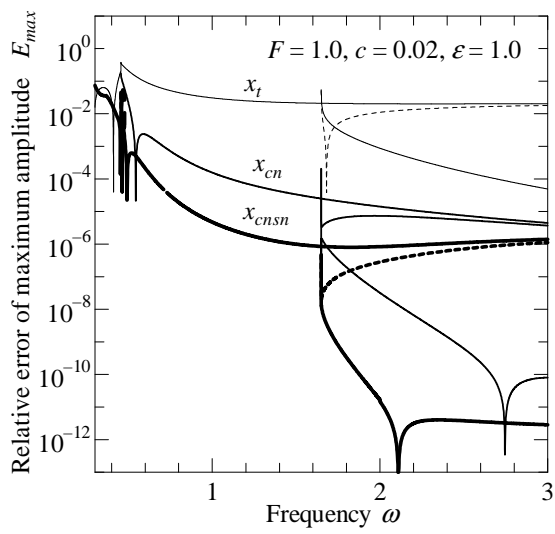


図 4.3 振幅の相対誤差
(強制漸硬型 Duffing 系)

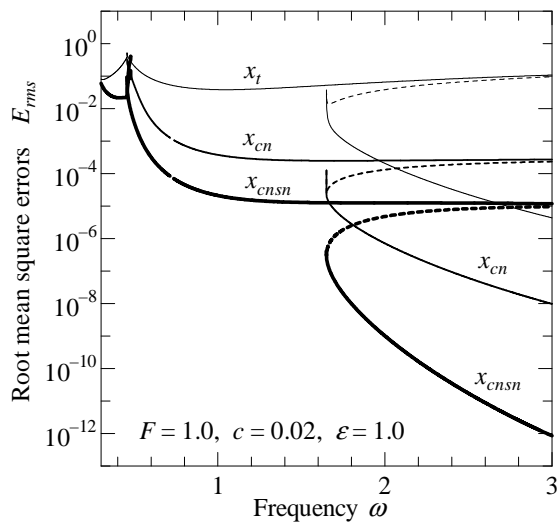


図 4.4 rms 誤差
(強制漸硬型 Duffing 系)

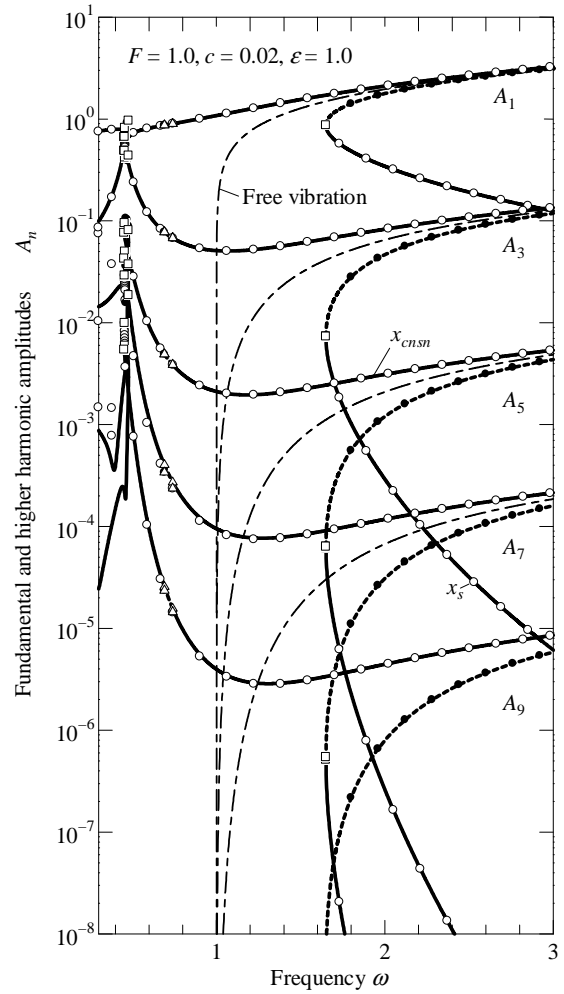


図 4.5 調波振幅の周波数応答
(強制漸硬型 Duffing 系)

B. 3次高調波共振 図 4.6 は、3次高調波振動が発生する $\omega=0.4\sim 0.8$ の振幅周波数応答曲線の拡大図である。シューティング法による計算結果では、3次高調波振動の振幅周波数応答曲線は、主共振の左側すそ部と滑らかに接続するループ状の形状をもち、いわゆる垂直折線部が安定・不安定解の境界点（サドル・ノード分岐点）となる。cn+sn 型平均法によれば、この3次高調波振動の近似解も求めることができ、その結果もシューティング法による結果とほぼ一致する。一方、cn 型平均法、従来の三角関数を母解とした平均法では、この3次高調波振動の近似解を求めることはできない。この図から、cn+sn 型平均法では、主共振左側すそ部の解は、シューティング法による結果とよい一致を示している。一方、cn 型平均法による近似解は、若干の誤差を有していることが確認できる。

図 4.7 は調波振幅の周波数応答であり、図 4.8 は 1, 3, 5 次の奇数次高調波振幅成分ごとの拡大図を示した。3次高調波共振の発生域では、基本調波振幅 A_1 が小さくなり、一方 3次高調波振幅成分 A_3 が急激に増大して、3次高調波共振の頂部では、 $A_1 < A_3$ となる。この結果は、定量的な精度には若干の問題があるものの、定性的にはシューティング法の結果とよく一致する。cn 型平均法では、cn 関数の特性上、低次調波振幅成分 A_i は、それより高次調波振幅成分 A_j より必ず小さくなる。すなわち ($i > j \rightarrow A_i > A_j$) となる関係が保持される。このため、上記のような、高次調波振幅成分の大きさが低次調波振幅成分より大となるような近似解の作成は不可能である。このため cn 型平均法では、高調波共振解を求めることは不可能であった。一方、cn+sn 型平均法では、式(4.2)に示すように母解となる cn 関数と sn 関数の位相をそれぞれ θ_1, θ_2 と独立に設定しているため、3次高調波共振解のような非線形系固有の複雑な現象に対する近似解を求めることが可能となる。

図 4.9 には、主共振左側の低振動域の $\omega=0.4, 0.455, 0.5$ の 3 例の振動波形の計算結果を示した。 $\omega=0.455$ は、高調波共振解の振動波形である。とくに、 $\omega=0.455$ の振動波形では、3次高調波成分が強勢となるため、振動波形が $2\pi/3$ 周期の振動が発生していることがわかる。これらの振動波形の計算結果においても、cn+sn 型平均法による結果とシューティング法による結果は非常によく一致する。なお、現状では、cn+sn 型平均法では 5 次以上の高調波共振の近似解を求めることはできていない。

以上の計算結果から、三角関数を母解とする平均法および cn 型平均法による近似解と比較して、cn+sn 型平均法による近似解は、基本調波振動（主共振域とその左右すそ部）および 3次高調波共振に対して、高精度な近似解を求め得ることが確認できた。なお、高調波共振と同様に非線形固有の現象である分数調波振動についても、cn+sn 型平均法により解析が可能となる。この振動現象に対する cn+sn 型平均法の有効性については後の 3.4.7 節と 3.4.8 節で詳細に論じる。

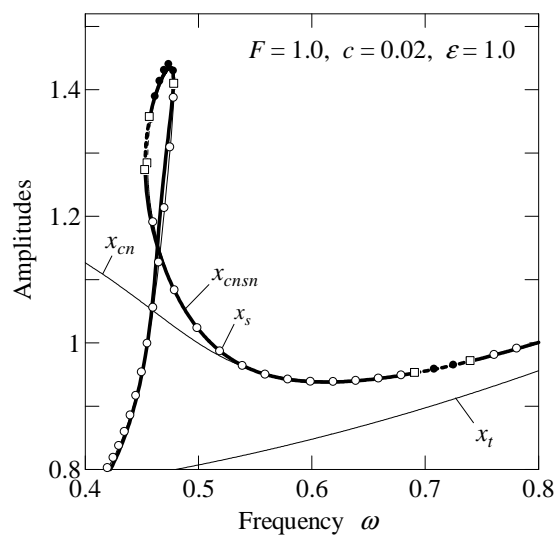


図 4.6 3 次高調波共振発域の振幅の周波数応答の拡大図
(強制漸硬型 Duffing 系)

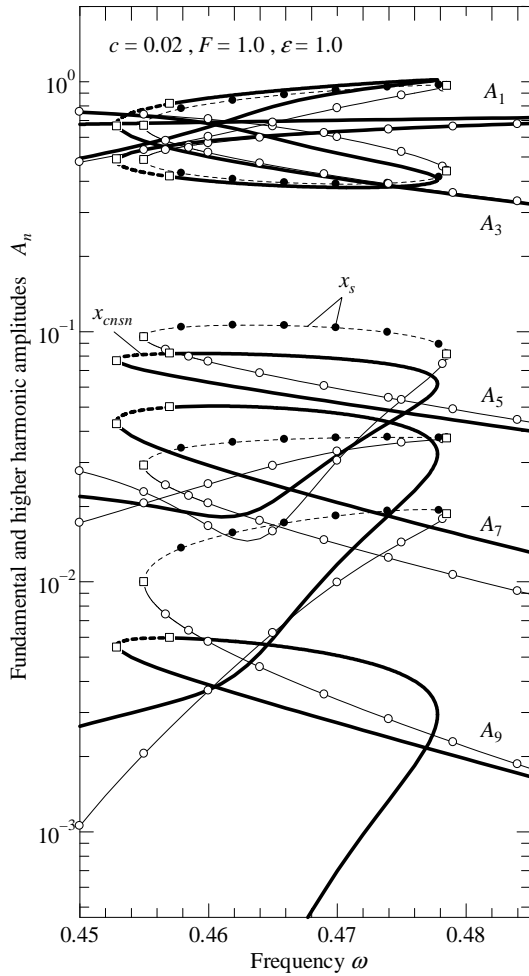
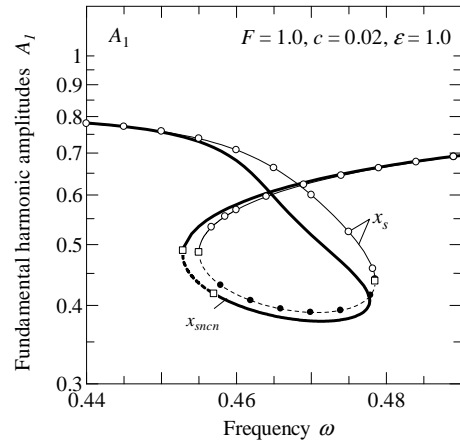
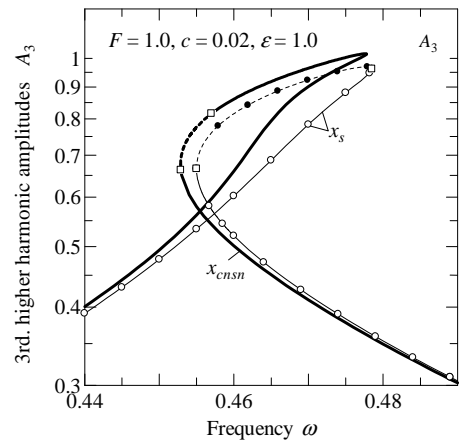


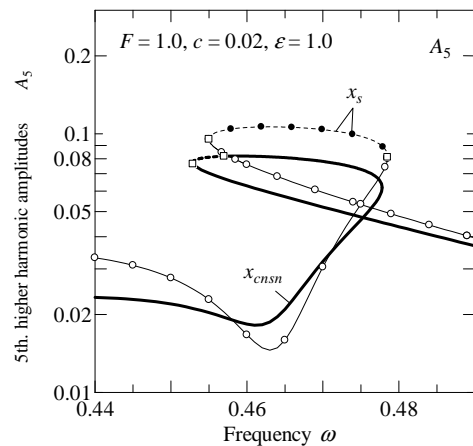
図 4.7 調波振幅の周波数応答
 (3次高調波共振の発生域・強制漸硬型
 Duffing 型振動系)



(a) 1次調波振幅

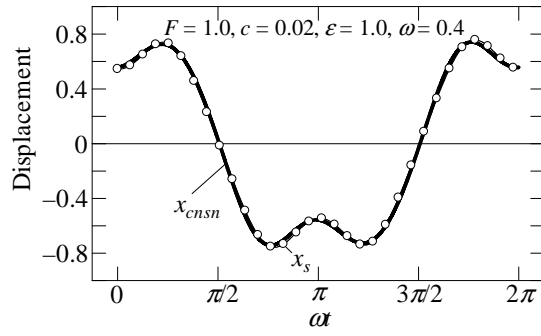


(a) 3次調波振幅

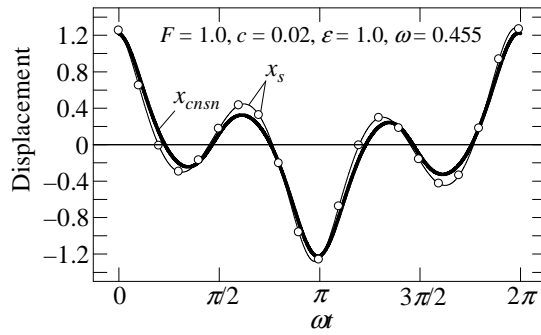


(a) 5次調波振幅

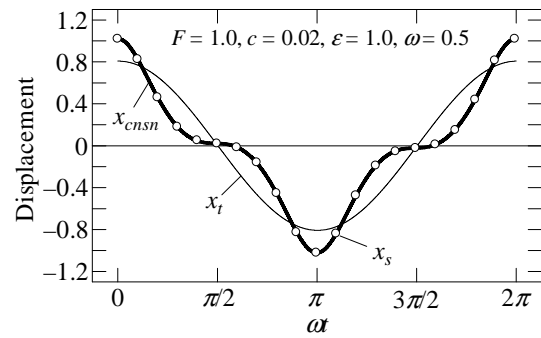
図 4.8 1～3次調波振幅の周波数
 応答 (3次高調波共振の発生域・強
 制漸硬型 Duffing 型振動系)



(a) $\omega = 0.4$



(b) $\omega = 0.455$



(c) $\omega = 0.5$

図 4.9 3 次高調波共振発域の振動波形
(強制漸硬型 Duffing 振動系)

4.4.2 漸軟型 Duffing 系 cn 型平均法は漸硬型 Duffing 系を基盤とする系のみを、 sn 型平均法は漸軟型 Duffing 系を基盤とする系のみを解析対象としており、式(2.32)、(2.33)に示したように、定常解決定のための理論式を区別しなければならない。一方、 $sn+cn$ 型平均法は、式(4.1)において β_1, β_3 の値を変更するのみで、漸硬型、漸軟型 Duffing 系を基盤とする系をまったく区別無しに、その定常周期解を求めることができる。本節では、 $cn+sn$ 型平均法による漸軟型 Duffing 系に対する計算結果を示す。摂動項 f は式(2.48)と同一の $f = F \sin \omega t - cx$ とし、また、式(4.1)において $\beta_1 = 1, \beta_3 = -1$ と設定した。以下では、 $F = 0.2, c = 0.3, \varepsilon = 1.0$ とした場合の計算結果を示す。

図 4.10 は、強制漸軟型 Duffing 振動系の振幅の周波数応答曲線である。図中には、2章で論じた sn 型平均法の結果 (x_{sn}) も併記している。主共振域では、従来の平均法による結果では、著しく誤差が増大している。一方、 $sn+cn$ 型平均法、 sn 型平均法による結果は、シューティング法による結果と非常によく一致していることがわかる。 $F = 0.2, c = 0.3$ とした強制漸軟型 Duffing 系では、主共振域のスケルトンカーブの上側の解分枝において、 $\omega = 0.635$ 近傍にピッチフォーク分岐による安定・不安定の境界点が存在する。 $sn+cn$ 型平均法、 sn 型平均法ともに、この分岐から低振動数側では不安定解となり、シューティング法による結果と一致する。ピッチフォーク分岐点の詳細な計算を実行した結果、 sn 型平均法による結果と比べて $cn+sn$ 型平均法による結果の方が、シューティング法の結果と極めてよく一致することを確認している。

図 4.10 では、定量的な精度を確認できないため、強制漸軟型 Duffing 振動系における振幅の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} の計算を行った。図 4.11, 4.12 は、シューティング法による数値解を基準とした E_{\max} と E_{rms} の計算結果である。前節で示した漸硬型 Duffing 系の場合とまったく同様に、 $cn+sn$ 型平均法の結果は、従来の平均法、 sn 型平均法による結果と比較して、図示の振動数域全域で精度が改善されていることが確認できる。

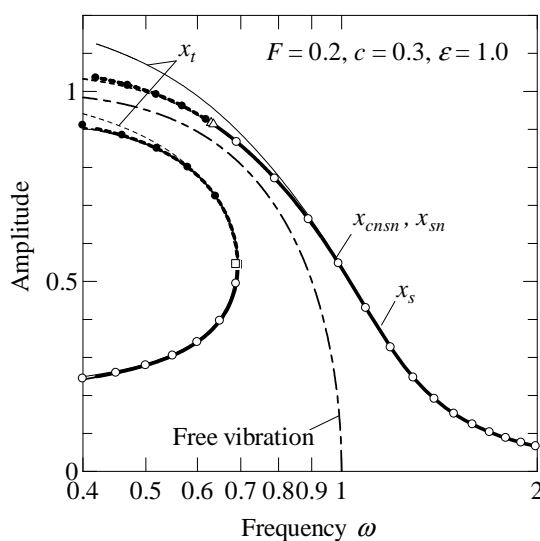


図 4.10 振幅の周波数応答 (強制漸軟型 Duffing 系)

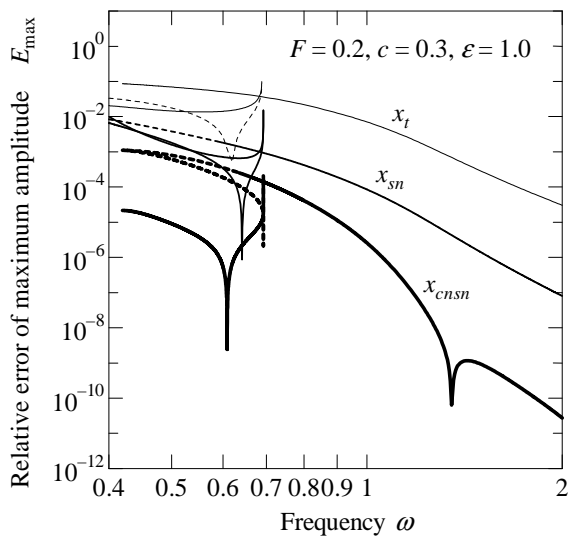


図 4.11 振幅の相対誤差
(強制漸硬型 Duffing 系)

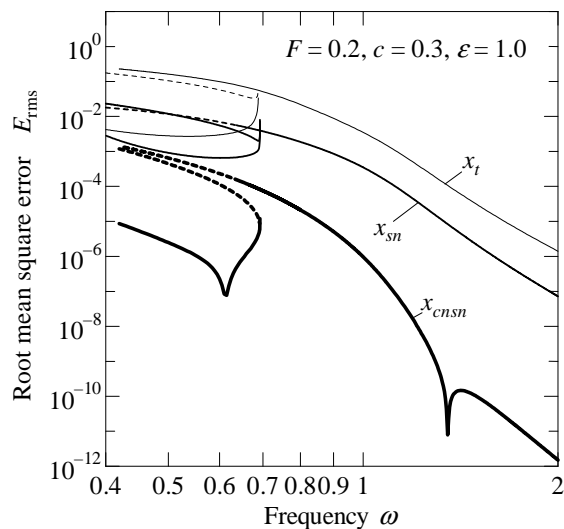


図 4.12 rms 誤差
(強制漸硬型 Duffing 系)

4.4.3 5次ばね系 cn+sn 型平均法による計算結果として、変位に関する5次の非線形ばね項を有する振動系の計算結果を示す。この系の摂動項 f の定義は次式である。

$$f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t - c\dot{x} - k_5 x^5 \quad \dots\dots\dots(4.26)$$

ここに、 k_5 は5次の非線形ばね項の大きさを表すパラメータである。以下に示す計算結果は $\beta_1 = \beta_3 = 1$ とした漸硬型 Duffing 系を基盤とした系に対する計算結果である。パラメータは、 $F=1.0, c=0.2, \epsilon=1.0$ とした。

図 4.13 は、 $k_3 = 0.3$ とした場合の振幅の周波数応答である。5次の非線形ばね項の付与により、主共振域の共振峰の水平方向に寝たような形状となっており、より単純な漸硬型 Duffing 系よりも非線形性が強くなっていることがわかる。図 4.14 はこの系に対する rms 誤差 E_{rms} の計算結果である。

次に、 $k_3 = -0.3$ とした場合の振幅の周波数応答を図 4.15 に示す。この場合、応答曲線の形状から、振幅が小さい場合は漸硬特性を示し、主共振の応答曲線は左方向に傾く。一方、振幅が大きい場合は漸軟特性を示し、主共振の応答曲線は右方向に傾く。このように、この系では、漸硬、漸軟の両特性を有した振動系である。このような系に対しても、cn+sn 型平均法による結果はシューティング法による結果とよい一致を示す。cn 型平均法では、漸硬特性を示す領域の近似解は求めることができるが、漸軟特性を示す大振幅振動域の近似解は求めることはできない。図 4.16 には、この系に対する rms 誤差 E_{rms} の計算結果を示した。

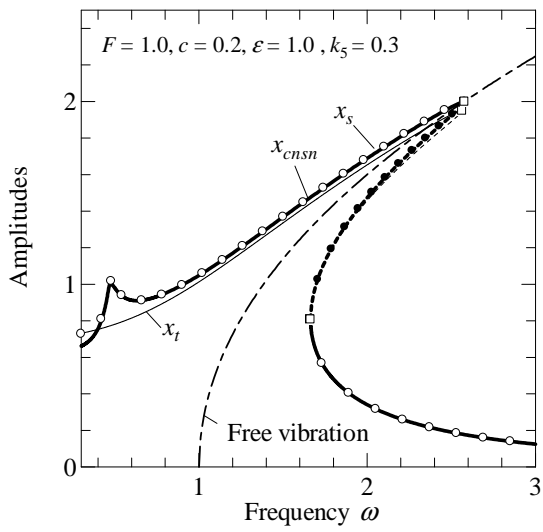


図 4.13 振幅の周波数応答
[5次ばね系 ($k_3 = 0.3$)]

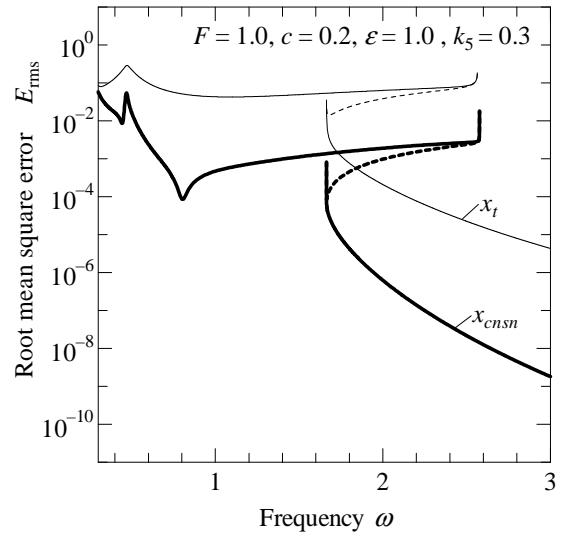


図 4.14 rms 誤差
[5次ばね系 ($k_3 = 0.3$)]

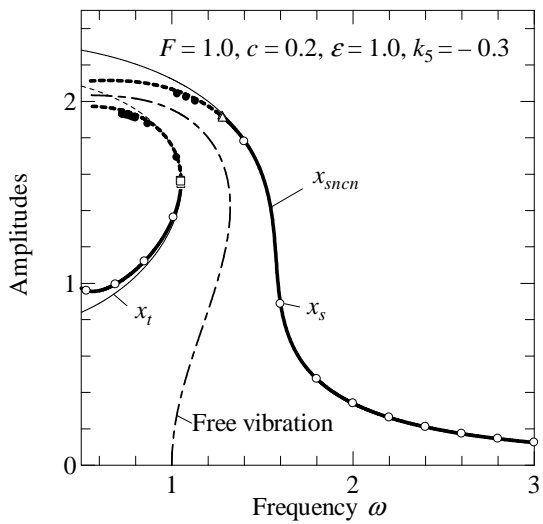


図 4.15 振幅の周波数応答
[5次ばね系 ($k_3 = -0.3$)]

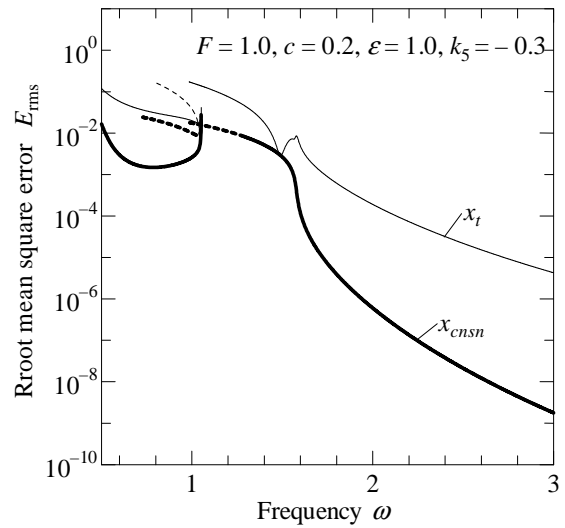


図 4.16 rms 誤差
[5次ばね系 ($k_3 = -0.3$)]

4.4.4 強制 Duffing-van der Pol 系 次の計算例として、2.6.7 節で取り上げた漸硬型 Duffing 振動系を基盤とする強制 Duffing-van der Pol 系を取り扱う。摂動項 f は式(2.55) と同一であり、 $f(\omega t, x, \dot{x}) = F \cos \omega t + c(1-x^2)\dot{x}$ である。ここでは、2.6.7 節で取り扱った同一のパラメータ値である $F=1.0$, $c=0.95$, $\varepsilon=1.0$ の場合の計算結果を示し、従来の平均法、cn 型平均法との比較を通して、cn+sn 型平均法の有効性を示す。

図 4.17 は、振幅の周波数応答曲線である。従来の平均法による結果では、シューティング法による結果と定性的にまったく異なるものとなっている。このような複雑な振動系に対しては、従来の平均法による近似解は、極めて信頼性の低いものであることがわかる。cn+sn 型平均法と cn 型平均法による結果では、低振動数域を除くすべての振動数領域の振幅周波数応答曲線は、シューティング法による結果との確認することはできない。ただし、 $\omega < 0.6$ の低振動数域では、cn 型平均法の結果は、シューティング法による結果と定性的に異なるものとなっていることが確認できる。一方、cn+sn 型平均法では、この低振動数域においてもシューティング法による結果とよく一致していることが確認できる。また、cn+sn 型平均法、cn 型平均法ともに、 $\omega=1.467$ 近傍にホップ分岐点が現れるが、この結果はシューティング法によるものと一致する。

図 4.18 は、位相の周波数応答曲線である。cn 型平均法による結果は明らかにシューティング法による結果に対し定量的に大きな誤差を有している。一方、cn+sn 型平均法による結果では、シューティング法による結果と極めてよく一致している。この図から、cn 型平均法は位相に関して多くの誤差が派生することが推察できる。

図 4.19 は、1～9 次の高調波振幅の周波数応答である。本図に限って、cn 型平均法によって計算された調波振幅を A_i^{cn} , ($i=1,3\cdots 9$) (細線)、cn+sn 型平均法によって計算された調波振幅を A_i^{cn+sn} , ($i=1,3\cdots 9$) (太線) と表記した。cn 型平均法では、3 次以上の高調波で既に誤差が発生していることが確認でき、とくに 5 次以上の高調波振幅は著しくシューティング法の結果と異なるものとなる。cn+sn 型平均法による結果は、高次の調波成分においてもシューティング法による結果とよく一致していることが確認できる。

図 4.20 は、シューティング法による結果を基準とした rms 誤差 E_{rms} の計算結果である。cn+sn 型平均法による結果は図示の振動数全域において、cn 型平均法による結果より高精度であることがわかる。とくに主共振右側の高振動数域で、精度改善効果が著しい。

図 4.21 には $\omega=2.1$ と $\omega=1.65$ のときの安定解と不安定解振動波形を示した。この図からわかるように、従来の平均法と cn 型平均法による結果では、振幅に関しては良い近似が行われているものの、位相がシューティング法の結果と大幅に異なったものとなっている。一方、cn+sn 型平均法の結果では、シューティング法の結果とほぼ一致するものとなる。

以上の結果から、このような複雑な振動系に対しても、cn+sn 型平均法は高精度な近似解を求めることが可能である。

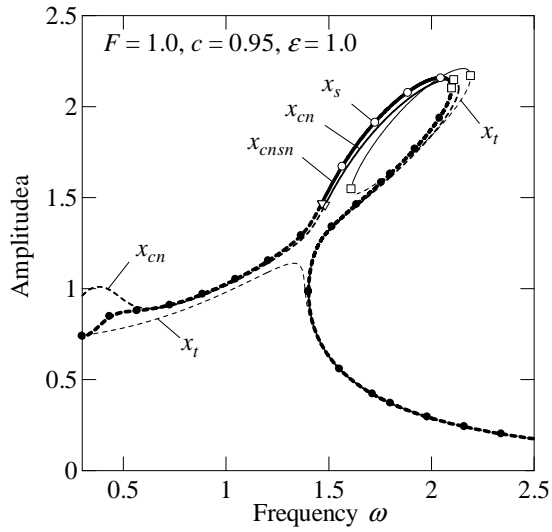


図 4.17 振幅の周波数応答
(Duffing-van der Pol 系)

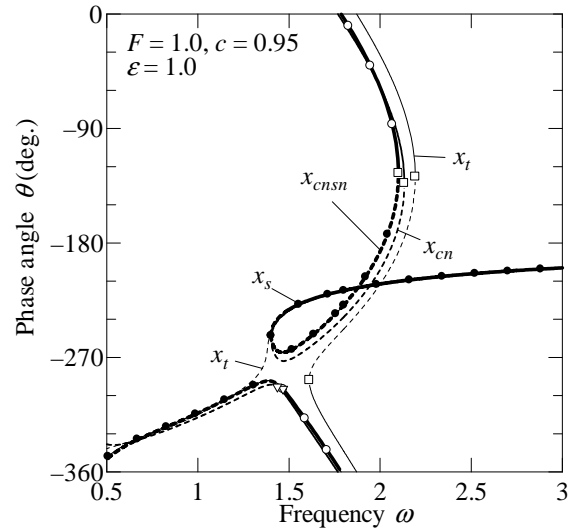


図 4.18 位相の周波数応答
(Duffing-van der Pol 系)

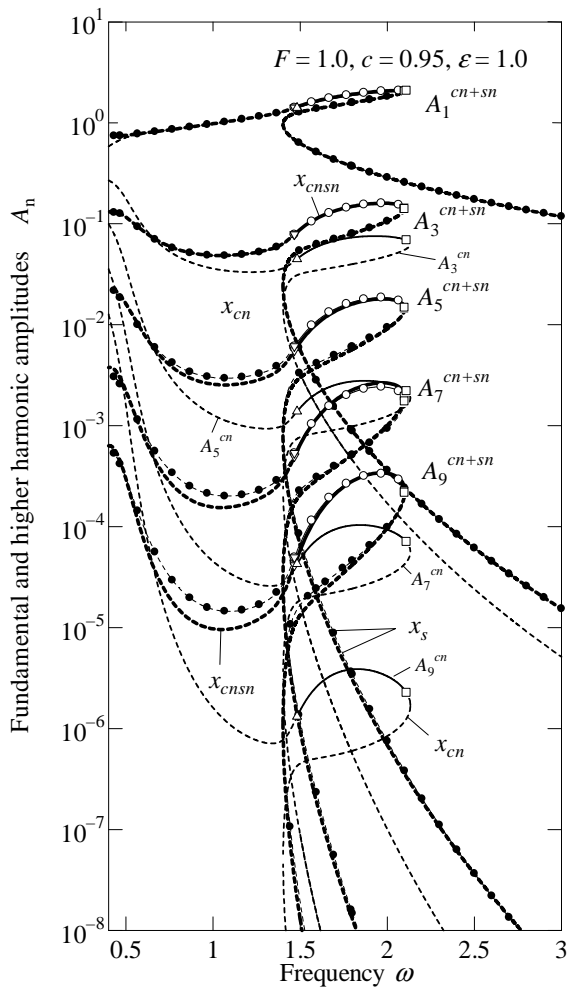


図 4.19 調波振幅の周波数応答
(Duffing-van der Pol 系)

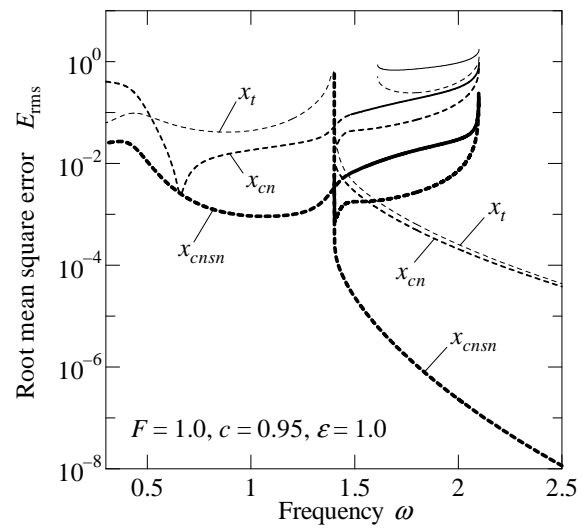
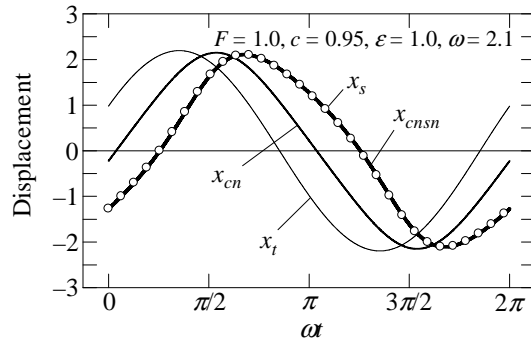
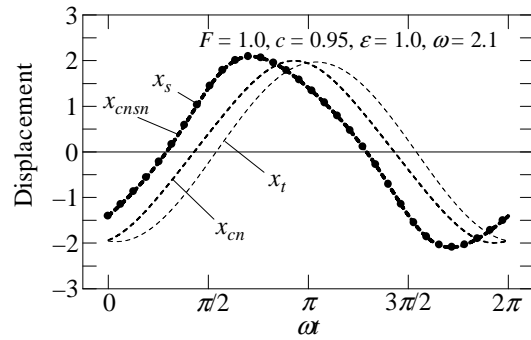


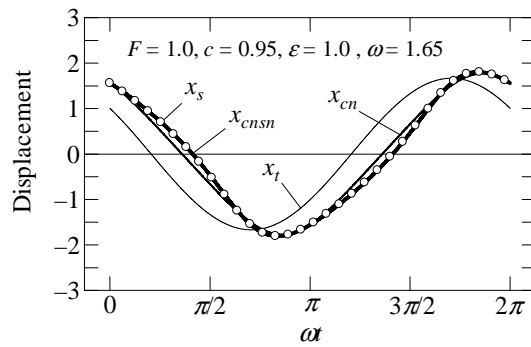
図 4.20 rms 誤差
(Duffing-van der Pol 系)



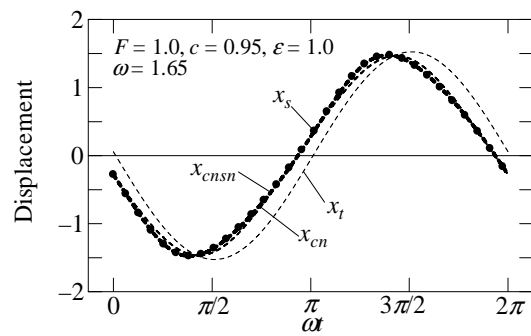
(a) $\omega = 2.1$ (安定解)



(b) $\omega = 2.1$ (不安定解)



(c) $\omega = 1.65$ (安定解)



(d) $\omega = 1.65$ (不安定解)

図 4.21 振動波形 (Dffing-van der Pol 系)

4.4.5 強制 Duffing-Mathieu 系 基本調波振動に対する最後の計算例として、 $\beta_1 = \beta_3 = 1$ とした漸硬型 Duffing 方程式において、その線形ばね係数を周期関数とした非線形 Mathieu 方程式の計算結果を示す。ここでは、強制外力と係数励振の振動数比が 1:2 の場合を取り扱う。この場合、式(4.1)の f は次式となる。

$$f = F \cos \omega t - c\dot{x} - (\gamma \cos 2\omega t)x \quad \dots\dots\dots(4.27)$$

計算におけるパラメータは $F=1.0$, $c=0.3$, $\gamma=2.0$ とした。図 4.22(a)には cn 型平均法による計算結果を示す。また、図 4.22(b)は、 $\omega=0.5 \sim 1.5$ の振動数域の拡大図である。図 4.22(a)に示すように、単純な cn 型平均法では、主共振左側すそ部において $\omega \cong 1.7$ 以下の振動数域の定常解は求めることができない。また、シューティング法の結果によると、この振動系には安定解と不安定解からなる島状の分枝が現れる。図 4.22(b)からわかるように、シューティング法の結果と比較すると、cn 型平均法では、島状の分枝の下部の解については、解の存在領域も含めて計算精度がかなり悪化していることがわかる。図 4.23(a)には、同一の系に対する cn+sn 型平均法による計算結果を示した。また、図 4.23(b)は、 $\omega=0.5 \sim 1.5$ の振動数域の拡大図である。これらの図から、cn+sn 型平均法によれば、cn 型平均法では求められなかった主共振左側すそ部の領域の解も精度良く求めることができ、また、島状の分枝の解も精度良く求められていることがわかる。図 4.24(a), (b)には、すそ部をもつ解分枝と島状に分布する解分枝に対する E_{rms} の計算結果を示した。これらの図から、cn 型平均法による近似解に比較して、cn+sn 型平均法による近似解は高精度な近似解が求められていることがわかる。

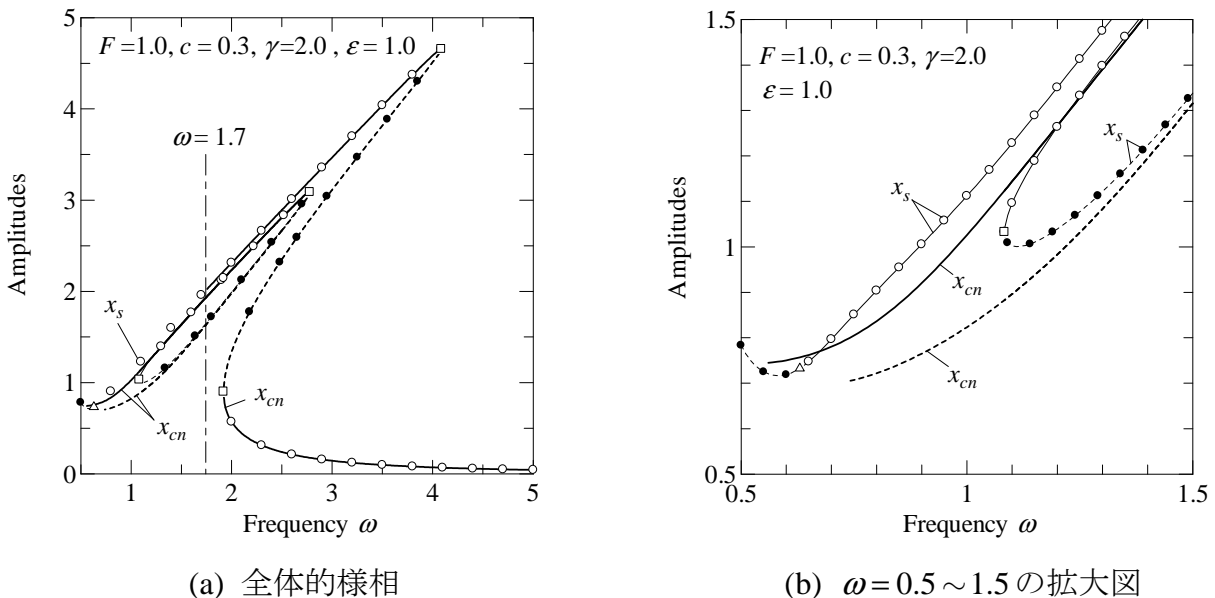
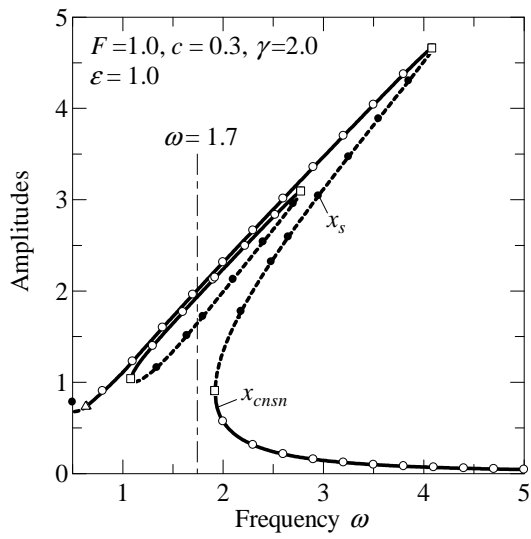
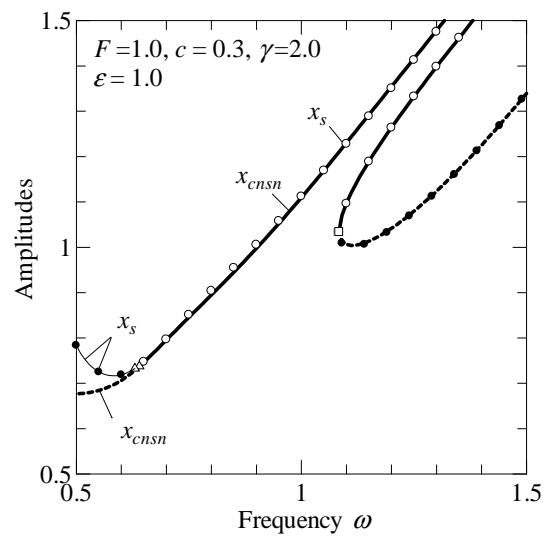


図 4.22 cn 型平均法による Duffing-Mathieu 系の振幅の周波数応答

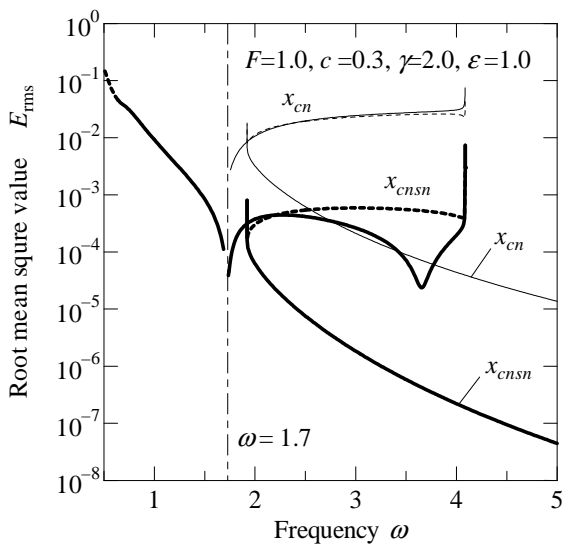


(a) 全体的様相

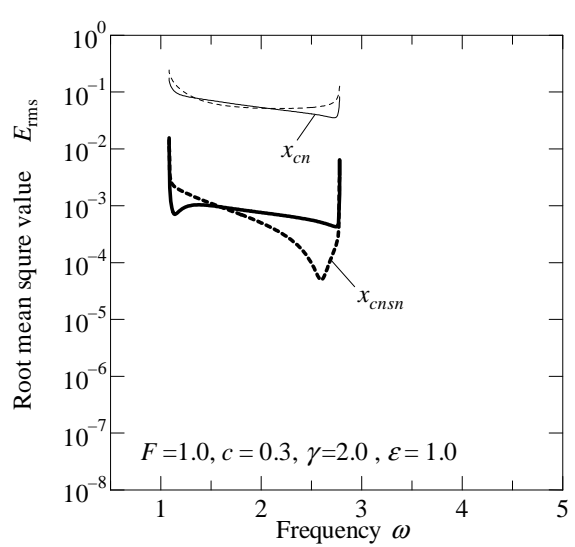


(b) $\omega = 0.5 \sim 1.5$ の拡大図

図 4.23 cn+sn 型平均法による Duffing-Mathieu 系の振幅の周波数応答



(a) すそ部をもつ主共振域



(b) 島状領域

図 4.24 cn+sn 型平均法による Duffing-Mathieu 系に対する rms 誤差

4.4.6 分数調波振動

A. 強制漸硬型 Duffing 系の 1/3 分数調波振動 cn+sn 型平均法では、分数調波振動解をも求めることが可能である。本節では、cn+sn 型平均法による漸硬型 Duffing 方程式の 1/3 次分数調波振動の計算結果を示す。cn+sn 型平均法により 1/3 次分数調波振動の近似解を計算するには、式(4.1)の摂動項 f を

$$f = F \cos \Omega t - c\dot{x}, \quad \Omega = m\omega \quad \dots\dots\dots(4.28)$$

と定義し、 $m=3$ として ωt に関する 2π 周期解を求めればよい。図 4.25 は、計算パラメータの値を 3.4.1 節と同じ $F=1.0, c=0.02$ としたときの、cn+sn 型平均法とシューティング法による 1/3 次分数調波振動の計算結果である。1/3 次分数調波振動の振幅周波数応答曲線は、安定解と不安定解とから構成される島状の形状となる。図 4.26(a), (b) には、振幅の周波数応答曲線の両端部 ($\Omega=3.08 \sim 3.2$ と $\Omega=6.6 \sim 6.95$) の拡大図を示した。これらの図から、cn+sn 型平均法による近似解はシューティング法による結果と極めてよく一致することがわかる。図 4.27, 4.28 は、cn+sn 型平均法による 1/3 次分数調波振動の近似解の振幅の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} の計算結果である。 E_{\max}, E_{rms} とともに、cn+sn 型平均法による近似解は、シューティング法による高精度数値解に対して、 10^{-4} 程度の精度を有していることがわかる。図 4.29 は、cn+sn 型平均法による 1/3 次分数調波振動の調波振幅の計算結果であり、1次から9次までの奇数次調波振幅 ($A_1 \sim A_9$) を示した。漸硬型 Duffing 方程式の 1/3 次分数調波振動解は、奇数次のフーリエ係数のみで構成される奇数次解である。cn+sn 平均法の母解 [式 (4.2)] も奇数次調波のみで構成される。この図から、調波振幅についても、cn+sn 型平均法による結果は、シューティング法による結果とよく一致している。

図 4.30 は、 $\Omega=3.12, 6.84$ おける 1/3 次分数調波振動の安定解の振動波形である。最大・最小振幅の大きさのみならず、波形のひずみまでも、シューティング法の結果とよく一致していることがわかる。

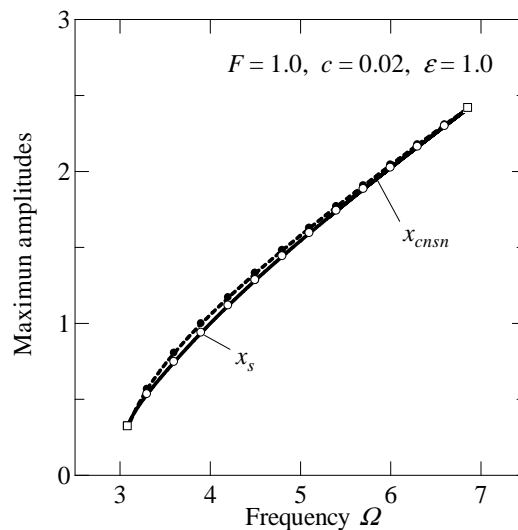
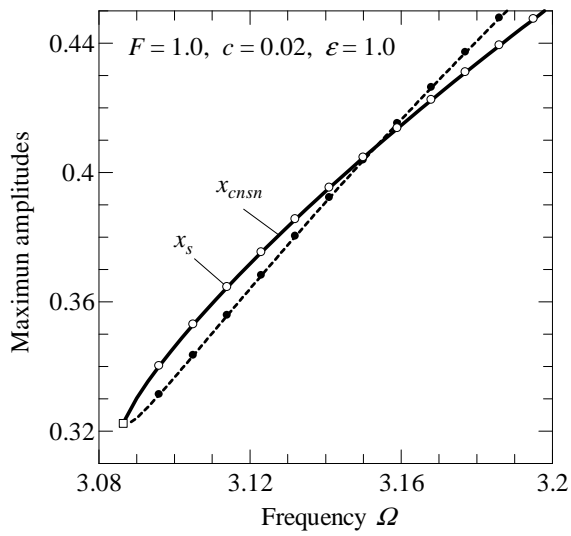
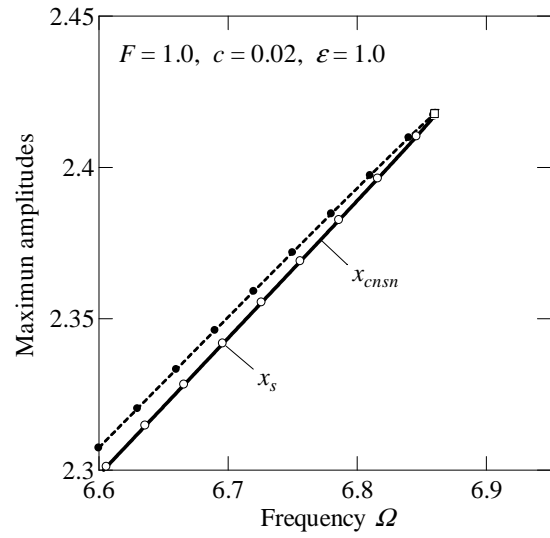


図 4.25 cn+sn 型平均法による漸硬型 Duffing 振動系 1/3 次分数調波振動の振幅の周波数応答の計算結果



(a) $\Omega = 3.08 \sim 3.2$



(b) $\Omega = 6.6 \sim 6.95$

図 4.26 $cn+sn$ 型平均法による漸硬型 Duffing 振動系 1/3 次分数調波振動の振幅の周波数応答の拡大図

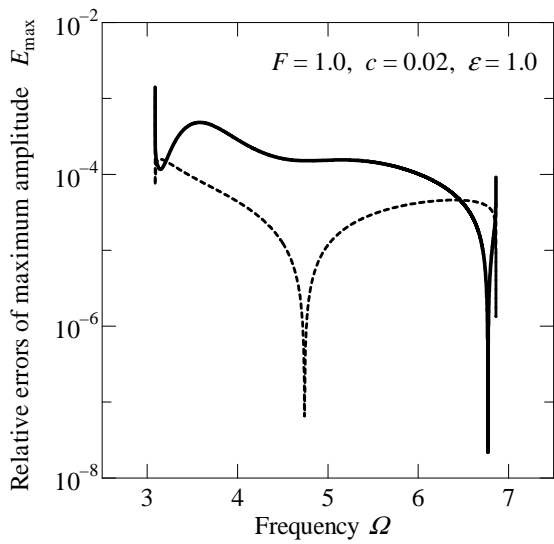


図 4.27 $cn+sn$ 型平均法の振幅の相対誤差 (漸硬型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

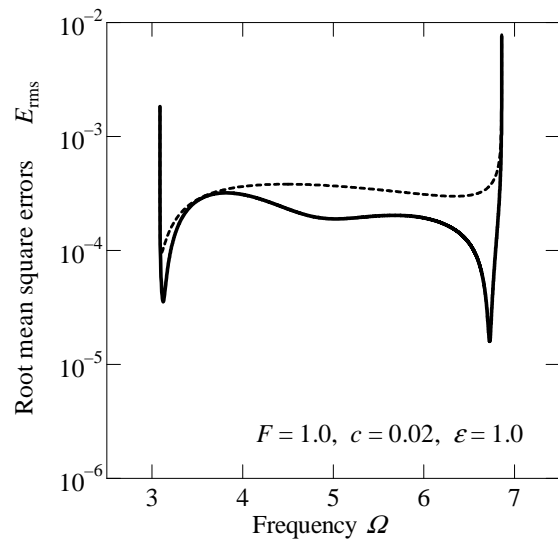


図 4.28 $cn+sn$ 型平均法の rms 誤差 (漸硬型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

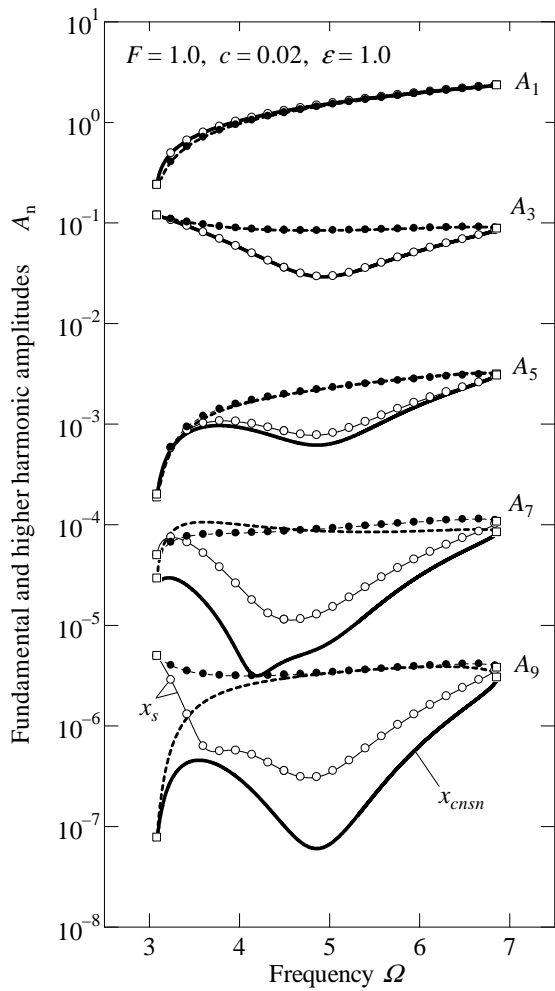
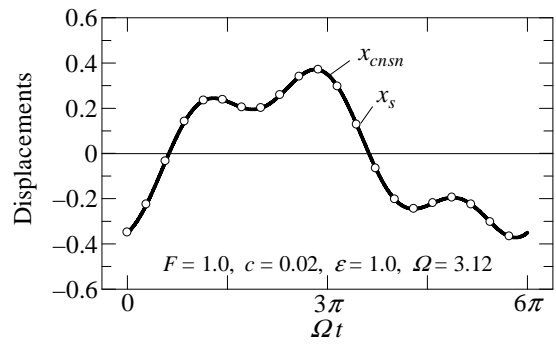
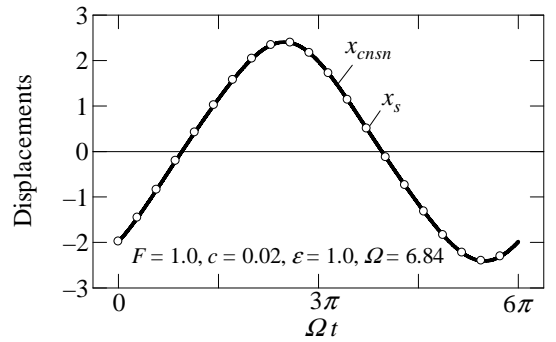


図 4.29 $cn+sn$ 型平均法による調波振幅の周波数応答の計算結果
(漸硬型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)



(a) $\Omega = 3.12$



(b) $\Omega = 6.84$

図 4.30 $cn+sn$ 型平均法による 1/3 次分数調波振動の振動波形の計算結果
(漸硬型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

B. 強制漸硬型 Duffing 系の 1/5 分数調波振動 次に $cn+sn$ 型平均法による漸硬型 Duffing 方程式の 1/5 次分数調波振動の計算結果を示す. 式(4.26)において, $m=5$ とするのみで, 1/5 次分数調波振動解を計算することが可能である.

図 4.31 には, $\beta_1 = \beta_3 = 1.0, F = 1.0, c = 0.0015$ としたときの, $cn+sn$ 型平均法による 1/5 次分数調波振動解の計算結果を示した. また, 図 4.32(a), (b)は島状に存在する振幅応答曲線の両端部 $\Omega = 7.6 \sim 7.8$ と $\Omega = 8.2 \sim 8.5$ の拡大図を示した. 図 4.33, 4.34 は, $cn+sn$ 型平均法による 1/5 次分数調波振動の近似解の振幅の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} の計算結果である. 1/5 次分数調波振動の結果では, 定性的な特性は一致しているものの, 解の存在領域が若干シューティング法の結果と若干異なるものとなる. E_{\max}, E_{rms} とともに, $cn+sn$ 型平均法による近似解は, シューティング法による高精度数値解に対して, 10^{-4} 程度の精度を有していることがわかり, 1/3 次分数調波振動の場合とほぼ同等の定量的精度を有していることがわかる. 図 4.35 には調波振幅の周波数応答を, 図 4.36 には, $\Omega = 7.75$ のときの安定解, 不安定解の振動波形を示した. 以上の計算結果から, 漸硬型 Duffing 方程式の 1/5 次分数調波振動に対しても, $cn+sn$ 型平均法は精度良い近似解を求め得ることが明らかとなった.

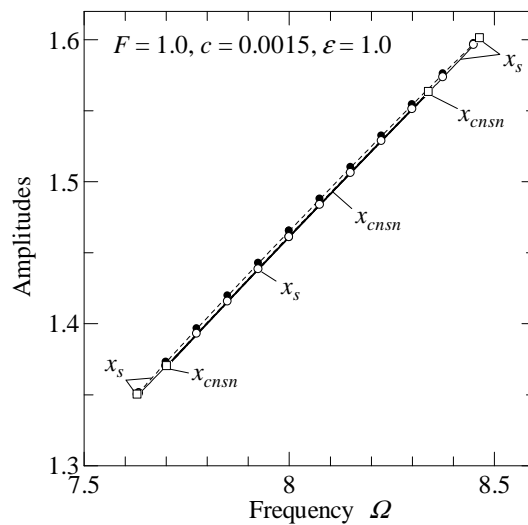
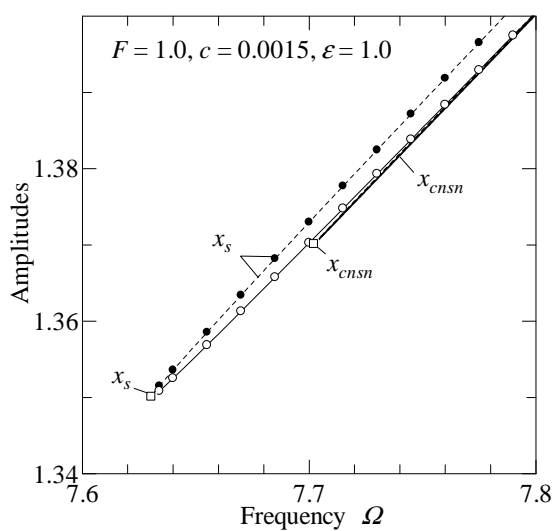
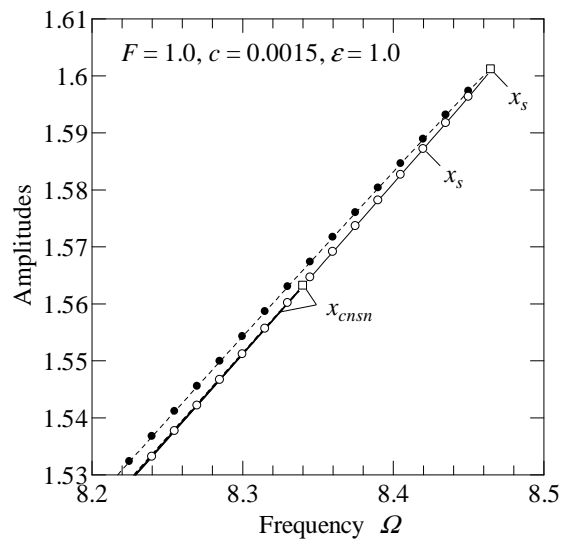


図 4.31 $cn+sn$ 型平均法による漸硬型 Duffing 振動系 1/5 次分数調波振動の振幅の周波数応答の計算結果



(a) $\Omega = 7.6 \sim 7.8$



(b) $\Omega = 8.2 \sim 8.5$

図 4.32 $cn+sn$ 型平均法による漸硬型 Duffing 振動系 1/5 次分数調波振動の振幅の周波数応答の拡大図

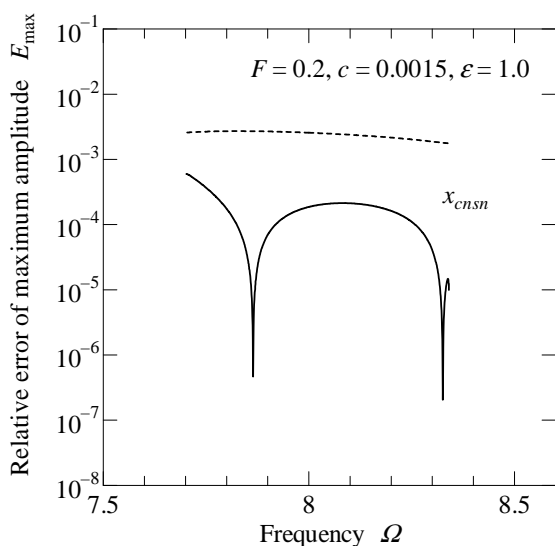


図 4.33 $cn+sn$ 型平均法の振幅の相対誤差 (漸硬型 Duffing 系 1/5 次分数調波振動)

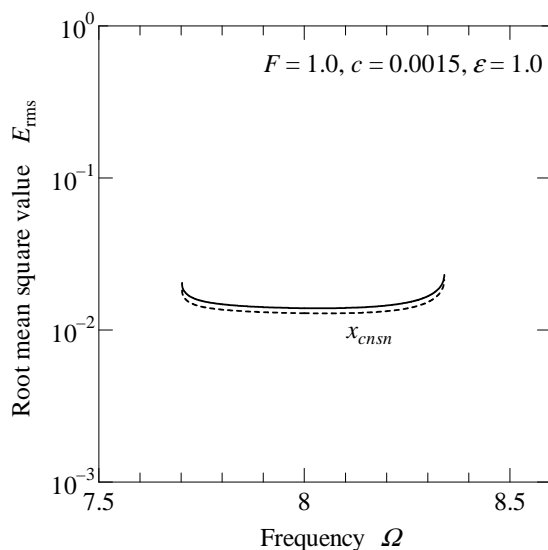


図 4.34 $cn+sn$ 型平均法の rms 誤差 (漸硬型 Duffing 系 1/5 次分数調波振動)

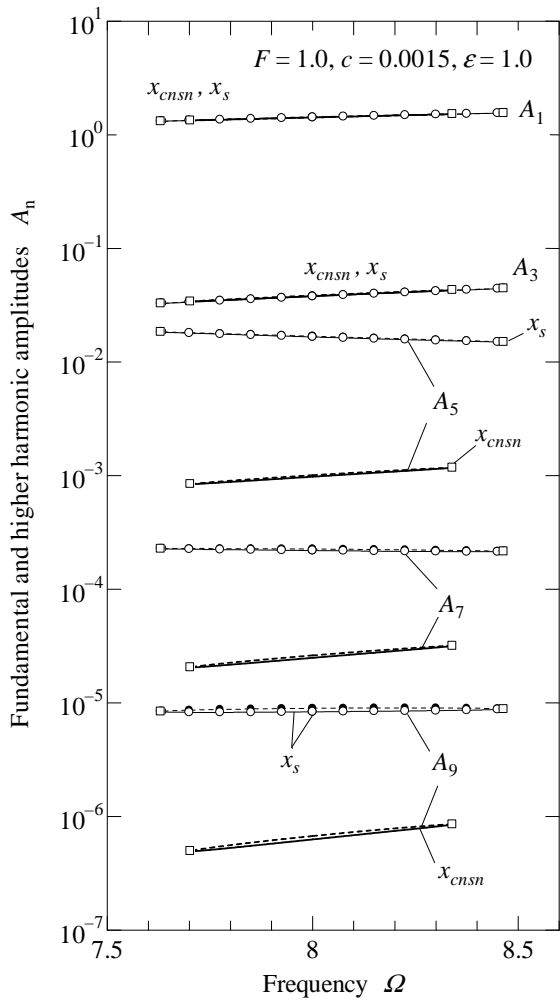
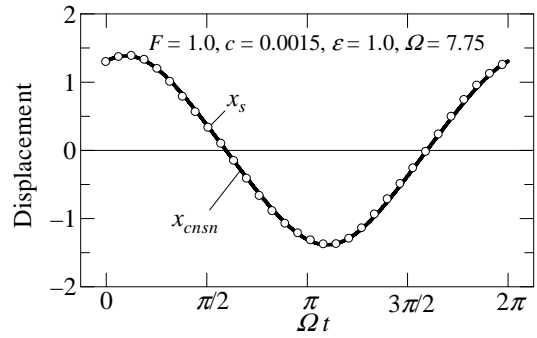
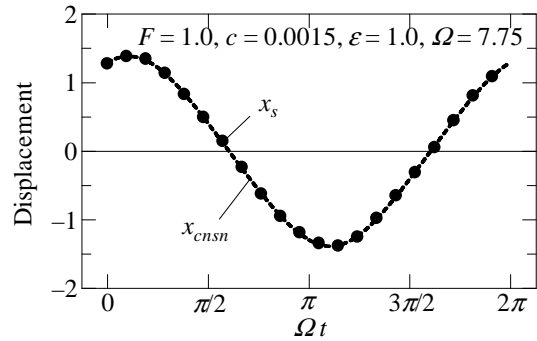


図 4.35 $cn+sn$ 型平均法による調波振幅の周波数応答の計算結果
(漸硬型 Duffing 系 1/5 次分数調波振動)



(a) $\Omega = 7.75$ (安定解)



(b) $\Omega = 7.75$ (不安定解)

図 4.36 $cn+sn$ 型平均法による 1/5 次分数調波振動の振動波形の計算結果
(漸硬型 Duffing 系 1/5 次分数調波振動)

C. 強制漸軟型 Duffing 系の 1/3 分数調波振動 最後に、式(4.1)において $\beta_1=1, \beta_3=-1$ とした漸軟型 Duffing 方程式の 1/3 次分数調波振動に対する cn+sn 型平均法の計算結果を示す. この場合、摂動項 f は式(4.25)と同一として、 $m=3$ と設定すればよい. 図 4.37 は、計算パラメータを $F=0.2, c=0.02$ とした場合の 1/3 次分数調波振動の最大振幅の周波数応答曲線である. また、図 4.38, 4.39 は、cn+sn 型平均法による 1/3 次分数調波振動の近似解の振幅の相対誤差 E_{\max} と rms 誤差 E_{rms} である. また、図 4.40 は調波振幅の周波数応答であり、図 4.41 には、 $\Omega=2.1$ のときの安定解、不安定解の振動波形を示した. 漸硬型 Duffing 系と同様に、cn+sn 型平均法による近似解は、シューティング法による結果と非常によく一致することがわかる.

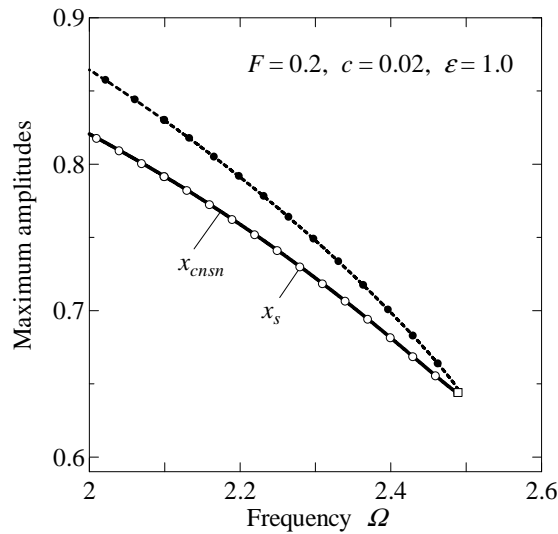


図 4.37 cn+sn 型平均法による漸軟型 Duffing 振動系 1/3 次分数調波振動の振幅の周波数応答の計算結果

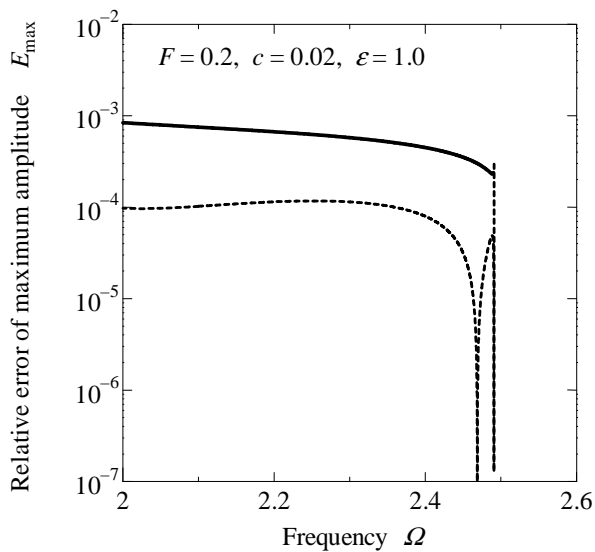


図 4.38 cn+sn 型平均法の振幅の相対誤差 (漸軟型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

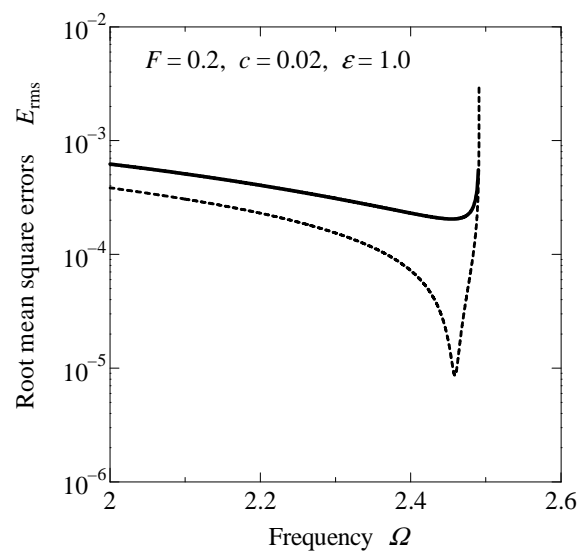


図 4.39 cn+sn 型平均法の rms 誤差 (漸軟型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

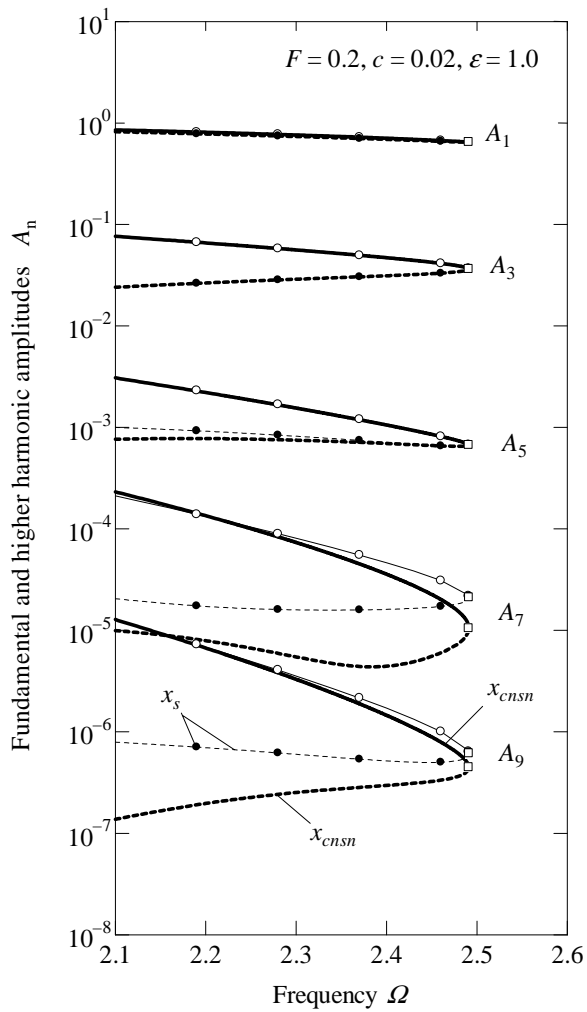
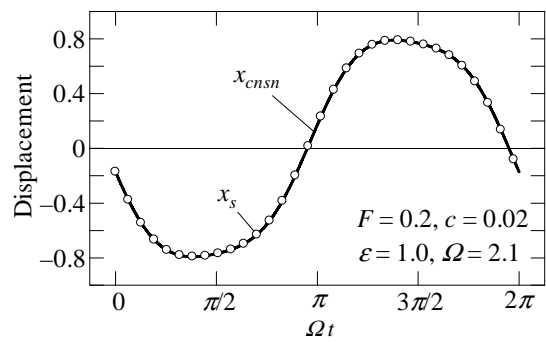
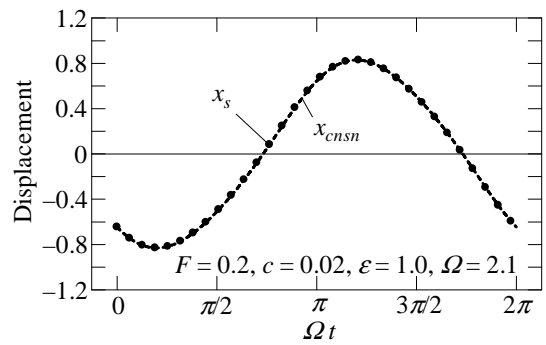


図 4.40 $cn+sn$ 型平均法による調波振幅の周波数応答の計算結果 (漸軟型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)



(a) $\Omega = 2.1$ (安定解)



(b) $\Omega = 2.1$ (不安定解)

図 4.41 $cn+sn$ 型平均法による 1/3 次分数調波振動の振動波形の計算結果 (漸軟型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動)

第5章 結 論

本研究では、非線形振動系に対する代表的近似解法である平均法の高性能化を目的として、平均法の母解にヤコビの楕円関数を利用した楕円型平均法を完成させた。本研究で開発した楕円平均法は、ばね関数が変位の1次+3次項で構成される Duffing 系または1次+2次項で構成される2次ばね系に対して、減衰項や外力項等からなる微小な摂動項が付加された広範な振動系を解析対象としたもので、比較的簡単な計算手続きにより、強い非線形性を有する振動系の定常周期解を求めることが可能である。

第2章では、Duffing 系を基盤とする系を解析対象とした楕円平均法について述べた。Duffing 系は、変位の1次と3次ばね項の係数の符号の組み合わせにより、それぞれが固有の振動特性をもつ漸硬型、漸軟型、飛移り型振動系（両振りモード、片振りモード）に分類される。これらの系を基盤とする振動系の定常周期解を求める方法として、単一项のヤコビの楕円関数を母解として利用した単項型楕円平均法（cn 型平均法，sn 型平均法，dn 型平均法）について論じた。

第3章では、ばね関数が、変位に関して1次と2次項で構成される2次ばね系を基盤とする系を解析対象とした楕円平均法について述べた。この方法は、不減衰2次ばね系に自由振動解である sn 関数の自乗関数を平均法の母解として利用したものである。解が奇数・偶数次のフーリエ級数で構成されるいわゆる非奇数次解を求めることが可能であり、非対称の非線形ばね項をもつ振動系の定常周期解の計算に有効に利用できる。

第4章では、第2章で提案した単項型楕円平均法のさらなる高性能化を目的として、異種の2つの楕円関数を結合した関数を母解とした結合型楕円平均法（cn+sn 型平均法）について述べた。この方法は、cn 関数と sn 関数を結合した関数を母解として利用するものである。単項型楕円平均法と比較して、この方法は、広範な非線形振動系の近似解を求めることが可能であり、高精度な近似解を求めることが可能となった。さらには、単項型楕円平均法では求めることが不可能であった高調波振動や分数調波振動の定常周期解をも計算することが可能である。

楕円平均法によって得られた近似解の安定判別法として、平均化方程式に基づく判別法と基礎式の変分方程式に基づく判別法を示した。楕円平均法で得られた近似解に対しては、演算量の増加はあるものの、信頼性の高い安定判別が可能であることから、基礎式の変分方程式に基づく方法を用いることが最適であることを確認した。

本研究で開発したすべての楕円平均法について、具体的な適用例として、いくつかの代表的な強非線形振動系に対する定常周期解の計算結果を示し、シューティング法による高精度の数値解および従来の1項のみの三角関数を母解とする平均法による近似解との比較を通して、本研究で開発した各種の楕円平均法の有効性を実証した。

本研究で開発した楕円型平均法は、一見非常に計算が煩雑なようであるが、実際には対象系に応じて、摂動項 f に依存する関数 \bar{H}_i を計算するだけでよく、かなり汎用

性の高いプログラムを作成することも容易である。それにより得られる近似解は従来の平均法による近似解に対して計算精度が著しく改善されているので、強非線形系に対する解析的研究に大いに寄与することが期待できる。

最後に、本研究に対し、ご支援頂いた（財）日本学術振興会並びに関係各位に深くお礼を申し上げます。また、本研究にご協力いただいた宮崎大学大学院機械システム工学専攻の実松 祐介君（現メイテック株）と津村 英幸君、宮崎大学工学部機械システム工学科の寺田 一彦君に感謝申し上げます。

文 献

- (1) N. M. Klylov and N. N. Bogoliubov, Introduction to Nonlinear Mechanics. Princeton University Press, Princeton, 1047.
- (2) 近藤・田村・末岡, 非線形系の定常振動の高次近似解法と安定判別法について, 日本機械学会論文集 (C編), 第51巻第466号, pp.1180, 1985.
- (3) A.H.Nayfeh and D.T.Mook, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, pp.163, 1979.
- (4) 近藤・矢ヶ崎, 非線形振動とカオスに関する二, 三の最近の話題, 日本機械学会論文集 (C編), 第61巻第583号, pp.746, 1995.
- (5) 前澤, 非線形常微分方程式, ダイヤモンド社, pp.268, 1975.
- (6) F. F. Cap, Averaging method for the solution of non-linear differential equations with periodic non-harmonic solutions, Int. J. Non-Linear mechanics, Vol. 9, pp. 441-450, 1974.
- (7) P. G. D. Barkham and A. C. Soudack, An Extension to the Method of Kryloff and Bogoliuboff, Int. J. Control. Vol. 10, No. 4, pp.377-392, 1969.
- (8) S. B. Yuste and J. D. Bejarano, Extension and improvement to the Krylov-Bogoliubov Methods using elliptic functions, Int. J. Control, Vol. 49, No. 4, pp. 1127-1141, 1989.
- (9) S. B. Yuste and J. D. Bejarano, Improvement of a Krylov-Bogoliubov method that uses Jacobi elliptic functions, J. Sound and Vibration, Vol. 139, No.1, pp. 151-163. 1990.
- (10) R. V. Roy, Averaging method for strongly non-Linear oscillators with periodic excitations, Int. J. Non-linear Mech. Vol. 29, No. 5, pp. 737-753. 1994.
- (11) Z. Xu and Y. K. Cheung, Averaging Method Using Generalized Harmonic Functions for Strongly Non-Linear Oscillator, J. Sound and Vibration, Vol. 174, No.4, pp.563, 1994.
- (12) 福田・中井, ルジャンドル関数を用いた平均法に関する研究, 日本機械学会 D&D Conference 2000講演論文集&CD-ROM論文集, No.00-6, pp.51, 2000.
- (13) 岡部・近藤, ヤコビの楕円関数を用いた平均法によるDuffing方程式の近似解, 九州大学工学集報, 第69巻第6号, pp.798, 1996.
- (14) T. OKABE and T. Kondou, On An Improvement of the Averaging Method Using Jacobian Elliptic Function, Proc. Asia-Pacific Vibration Conference '97, pp.934, 1997.
- (15) T. OKABE, T. Kondou and S. Hamao, Forced Vibration Analysis of a Class of Nonlinear Oscillator by Applying the Averaging Method of Elliptic Type, Proc. Asia-Pacific Vibration Conference '99, pp.934, 1999.
- (16) 近藤・岡部・関谷, 強非線形系に対する平均法の高性能化に関する研究 (第1報, ヤコビのcn関数を母解とする場合), 日本機械学会論文集(C編), 第68巻第669号, pp.1371, 2002.
- (17) 岡部・近藤・浜尾, 強非線形ダフティング方程式を基盤とする系に対する平均法の高性能化に関する研究 (ヤコビのsn関数およびdn関数を母解とする場合), 日本機械学会論文集(C編), 第69巻第678号, pp.312, 2003.
- (18) 岡部・近藤・津村, 楕円型平均法に関する研究 (2次ばね系を基盤とする系への適用), 日本機械学会D&D Conference 2003講演論文集&CD-ROM論文集, No.03-7, pp.167, 2003.
- (19) T. OKABE, T. KONDOU and H. TSUMURA, High Performance Averaging Method for Systems Based on a Strongly Quadratic Nonlinear Oscillator, Proc. of Asia-Pacific Vibration Conference '03, Vol.2, pp.538, 2003.

- (20) 岡部・近藤・津村, 強非線形 2 次ばね系を基盤とする系に対する平均法の高性能化に関する研究, 日本機械学会論文集(C編), 第71巻第701号, pp.5-12, 2005.
- (21) 岡部・近藤・関谷, 楕円型平均法に関する研究 (cn関数とsn関数を結合した母解の場合), 日本機械学会 D&D Conference 2001講演論文集&CD-ROM論文集, No.01-5, pp.248, 2001.
- (22) 岡部・近藤・実松, 楕円型平均法に関する研究 (精度の改善法), 日本機械学会 D&D Conference 2002 講演論文集&CD-ROM論文集, No.02-9, pp.29, 2002.
- (23) 岡部・近藤・津村, 楕円型平均法に関する研究 (分数調波振動の解析), 日本機械学会 D&D Conference 2004 講演論文集&CD-ROM論文集, No.04-5, pp.286, 2004.
- (24) 械工学便覧, 日本機械学会, pp2-15, 1977.
- (25) P. F. Byrd and M. D. Friedma, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer-Verlag, pp.33, 1971.
- (26) 文献(25)の282ページ
- (27) 田村・松田, 自律性Duffing方程式の厳密解とその計算法 (解の表示と特性パラメータの試行計算), 日本機械学会論文集 (C編), 第52巻第478号, pp.1750, 1986.
- (28) 田村・松田, 自律性Duffing方程式の厳密解とその計算法 (第2法, 解精度向上に関する検討二, 三), 日本機械学会論文集 (C編), 第53巻第486号, pp.261, 1987.
- (29) 文献(25)の298ページ
- (30) 田村・近藤・末岡, Duffing方程式の高次近似解 (ハードスプリング系の奇数次高調波共振), 日本機械学会論文集 (C編), 第51巻第467号, pp.1738, 1985.
- (31) 田村・李, 二次曲線ばね非線形系における自由振動の厳密解 (その1, 解の表示とフーリエ係数の試行解), 日本機械学会論文集 (C編), 第55巻第509号, pp.13, 1989.
- (32) H. Tamura and T. Masunaga, On the Chaotic Motion of a Magnetically Levitated Body, proc. of ISEM '91, pp.327, 1991.
- (33) 戸田, 楕円関数入門, 日本評論社, pp.89, 1976