Chapter 3

境界要素法

ここでは次式のような内部問題における波動場の積分方程式表示を用いて、境界要素法について整理する。

$$\int_{\Gamma}[G_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi},\omega)T_m(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n},\omega)-H_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{n},\omega)u_m(\boldsymbol{\xi},\omega)]d\Gamma(\boldsymbol{\xi})=\frac{1}{2}u_k(\boldsymbol{x},\omega) \qquad (3-1)$$

ここに観測点 $\boldsymbol{x}$ は、弾性体表面上にある。

図３－１に示すように弾性体表面 Γ を N 個の要素で離散化し、それぞれの要素を $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_N$

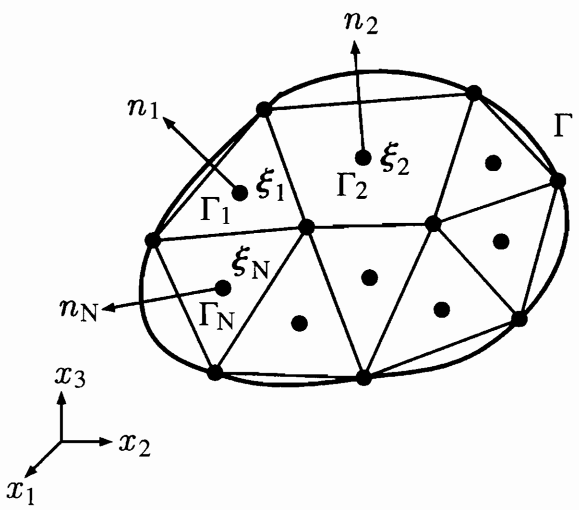

図３－１　波動場の内部問題における弾性体表面の離散化とその記号

とする。そしてこれらの各要素上において、変位と表面応力は一様に分布するものとする。このように表面を離散化すると、上式の積分方程式は次式のような $3N$ 個の未知数から成る含む連立１次方程式として表すことができる。

$$[\boldsymbol{G}]\{\boldsymbol{T}_\Gamma\}-[\boldsymbol{H}]\{\boldsymbol{u}_\Gamma\}=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{u}_\Gamma\} \qquad (3-2)$$

ここに、

$$\{\boldsymbol{u}_\Gamma\} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}_1), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}_2), \cdots, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}_N)\}^T = \left\{\begin{array}{c} u_1(\boldsymbol{\xi}_1) \\ u_2(\boldsymbol{\xi}_1) \\ u_3(\boldsymbol{\xi}_1) \\ u_1(\boldsymbol{\xi}_2) \\ u_2(\boldsymbol{\xi}_2) \\ u_3(\boldsymbol{\xi}_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ u_1(\boldsymbol{\xi}_N) \\ u_2(\boldsymbol{\xi}_N) \\ u_3(\boldsymbol{\xi}_N) \end{array}\right\} \tag{3-3a}$$

$$\{\boldsymbol{T}_\Gamma\} = \{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1), \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2), \cdots, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N)\}^T = \left\{\begin{array}{c} T_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1) \\ T_2(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1) \\ T_3(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1) \\ T_1(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2) \\ T_2(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2) \\ T_3(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ T_1(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N) \\ T_2(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N) \\ T_3(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N) \end{array}\right\} \tag{3-3b}$$

ここに表面応力$T_m(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{n}, \omega)$は、各要素の単位鉛直ベクトル$\boldsymbol{n}_j$の関数である。また、

$$[\boldsymbol{H}] = \left[\begin{array}{cccc} \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{n}_1)d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{n}_2)d\Gamma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{n}_N)d\Gamma \end{array}\right] \tag{3-4a}$$

ここに、

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) = \left[\begin{array}{ccc} H_{11}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{21}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{31}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) \\ H_{12}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{22}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{32}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) \\ H_{13}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{23}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) & H_{33}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{n}_i) \end{array}\right] \tag{3-4b}$$

式(3-2)のマトリックス$[\boldsymbol{G}]$は、

$$[\boldsymbol{G}] = \left[\begin{array}{cccc} \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_1)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_1)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_1)d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_2)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_2)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_2)d\Gamma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_1|\boldsymbol{\xi}_N)d\Gamma & \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_2|\boldsymbol{\xi}_N)d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_N|\boldsymbol{\xi}_N)d\Gamma \end{array}\right] \tag{3-5a}$$

ここに、

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) = \begin{bmatrix} G_{11}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{21}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{31}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) \\ G_{12}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{22}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{32}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) \\ G_{13}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{23}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) & G_{33}(\boldsymbol{\xi}_j|\boldsymbol{\xi}_i) \end{bmatrix} \qquad (3-5b)$$

ここに$\boldsymbol{\xi}_j$は、j番目の要素の中心の座標を表す。

無限弾性体における表面応力グリーン関数H_{mk}と変位グリーン関数G_{mk}の具体的関数は、動弾性体における解としてよく知られている。したがって式 (3-2) の連立１次方程式の係数マトリックス$[\boldsymbol{H}]$と$[\boldsymbol{G}]$は、求められる。ここでの未知数は表面上の変位$\{\boldsymbol{u}\}$と表面応力$\{\boldsymbol{T}\}$である。