

Chapter 2

震源断層－不整形地盤系における波動場の積分方程式表現

2.1 波動方程式とグリーン関数

2.1.1 波動方程式

等方均質な弾性体において、波動方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \tau_{mn}}{\partial x_n} + \rho b_m = \rho \frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} \quad (2.1-1a)$$

ここに、 ρ は弾性体の密度を、 u_m と b_m は m 軸方向の変位と単位密度当たりの体積力を表す。また、 x_n は n 軸方向の座標を、 t は時間を表す。応力テンソル τ_{mn} は以下のように表される。

$$\tau_{mn} = \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{mn} + \mu \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \quad (2.1-1b)$$

ここで、振動数 ω の調和振動外力 $\exp(-i\omega t)$ (i は虚数単位)を受ける場合には、上式において変位や応力等は、次式のように表現できる。

$$\tau_{mn}(\mathbf{x}, t) = \tau_{mn}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad u_m(\mathbf{x}, t) = u_m(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}, \quad \text{etc.} \quad (2.1-2)$$

これらより、調和振動外力を受ける場合の波動方程式は、次式のようになる。

$$\frac{\partial \tau_{mn}}{\partial x_n} + \rho \omega^2 u_m + \rho b_m = 0 \quad (2.1-3)$$

記号の簡単化のため、変位と応力等が場所 \mathbf{x} と振動数 ω の関数であることを示す表示を省略している。

2.1.2 グリーン関数

次に、単位体積当たりに単位振幅の調和振動外力 $\rho b_m = \exp(-i\omega t) \delta_{mk}$ (δ_{mk} はクロネッカーのデルタを表す)が、 ξ 点の k 軸方向に作用する時に、任意の座標点 \mathbf{x} における m 軸

方向の変位を $G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)$ とすると、次式が成立する。

$$\frac{\partial H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_n} + \rho\omega^2 G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta_{mk} \quad (2.1-4a)$$

ここに、

$$H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = \lambda \frac{\partial G_{lk}}{\partial x_l} \delta_{mn} + \mu \left(\frac{\partial G_{mk}}{\partial x_n} + \frac{\partial G_{nk}}{\partial x_m} \right) \quad (2.1-4b)$$

変位グリーン関数 G_{mk} と応力グリーン関数 H_{mnk} は、座標 \mathbf{x} と座標 $\boldsymbol{\xi}$ に関して対称であり、次式の関係が成り立つ。

$$G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = G_{km}(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{x}, \omega) \quad (2.1-5a)$$

$$H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = H_{knm}(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{x}, \omega) \quad (2.1-5b)$$

また、応力グリーン関数は下添字 mn に関して対称で、次式が成立する。

$$H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = H_{nmk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) \quad (2.1-5c)$$

これらの関係式は、変位や応力のグリーン関数の物理的意味を表しており、以後に示す波動場の積分方程式表示の物理的解釈をするときに役立つ。

2.2 波動場の積分方程式表示

2.2.1 積分方程式表示－内部問題－

ここでは調和振動を対象として、図 2. 1-1 a に示すように等方均質弾性体 V の表面 Γ 上に荷重点 $\boldsymbol{\xi}$ がある場合の弾性体 V における波動場の積分方程式を導く。

式(2.1-3)と式(2.1-4a)に、それぞれ変位グリーン関数 $G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)$ と変位 $u_m(\mathbf{x}, \omega)$ を掛け、両式を引き算したものを弾性体 V 内部で積分すると、次式のようになる。

$$\int_V \left(\frac{\partial \tau_{mn}}{\partial x_n} G_{mk} - \frac{\partial H_{mnk}}{\partial x_n} u_m \right) dV(\mathbf{x}) + \int_V \rho\omega^2 (u_m G_{mk} - G_{mk} u_m) dV(\mathbf{x}) + \int_V \rho b_m G_{mk} dV(\mathbf{x}) = \int_V \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{mk} u_m dV(\mathbf{x}) \quad (2.2-1)$$

ここで上式の左辺第1項の体積積分は、部分積分（ガウスの発散定理）を使うと次式のように表される。

$$\int_V \left(\frac{\partial \tau_{mn}}{\partial x_n} G_{mk} - \frac{\partial H_{mnk}}{\partial x_n} u_m \right) dV(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} (\tau_{mn} n_n G_{mk} - H_{mnk} n_n u_m) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_V \left(H_{mnk} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \tau_{mn} \frac{\partial G_{mk}}{\partial x_n} \right) dV(\mathbf{x}) \quad (2.2-2a)$$

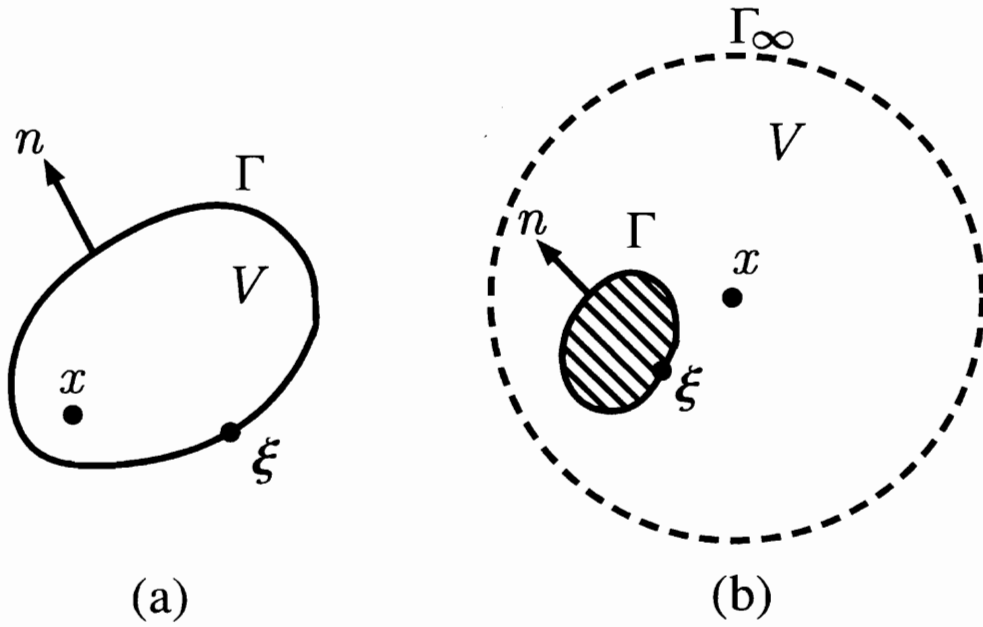


図 2. 2 - 1 波動場の内部問題 (a) と外部問題 (b) の記号

上式を導くに当たっては、次式の部分積分（ガウスの発散定理）を使った。

$$\int_V \left[\frac{\partial u}{\partial x_n} v + u \frac{\partial v}{\partial x_n} \right] dV(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u v n_n d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (2.2 - 2b)$$

ここに、 n_n は表面 Γ において外向きを正にとった単位鉛直ベクトルの n 軸方向成分を表す（図 2. 1 - 1 a）。

ここで次式が成立することを考慮すると、

$$u_m G_{mk} - G_{mk} u_m = 0 \quad (2.2 - 3a)$$

$$H_{mnk} \frac{\partial u_m}{\partial x_n} - \tau_{mn} \frac{\partial G_{mk}}{\partial x_n} = 0 \quad (2.2 - 3b)$$

式(2.2-2)は、次式のように表される。

$$\int_{\Gamma} (\tau_{mn} n_n G_{mk} - H_{mnk} n_n u_m) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_V \rho b_m G_{mk} dV(\mathbf{x}) = u_k(\boldsymbol{\xi}, \omega) \quad (2.2 - 4)$$

または変数を入れて表現すると、次式のように表現できる。

$$\int_{\Gamma} [G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m(\mathbf{x}, \omega)] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_V \rho b_m(\mathbf{x}) G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) dV(\mathbf{x}) = u_k(\boldsymbol{\xi}, \omega) \quad (2.2 - 5a)$$

ここに、 T_m と H_{mk} は表面応力ベクトルの m 軸方向成分と表面応力グリーン関数を表し、次式のように与えられる。

$$T_m(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \omega) = \tau_{mn}(\mathbf{x}, \omega) n_n(\mathbf{x}) \quad (2.2 - 5b)$$

$$H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)n_n(\mathbf{x}) \quad (2.2-5c)$$

式(2.2-5)は、積分変数の \mathbf{x} を $\boldsymbol{\xi}$ に交換し、式(2.1-5)の関係を用いると次式のようにも書き表すことができる。

$$\int_{\Gamma} [G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)]d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi})G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)dV(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.2-5d)$$

ここに、 T_m と H_{mk} は表面応力ベクトルの m 軸方向成分と表面応力グリーン関数を表し、次式のように与えられる。

$$T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = \tau_{mn}(\boldsymbol{\xi}, \omega)n_n(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.2-5e)$$

$$H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)n_n(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.2-5f)$$

式(2.2-5d)の物理的解釈をすれば、弾性体 V 内の変位 $u_k(\mathbf{x}, \omega)$ は、その表面上の表面応力 $T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)$ と表面変位 $u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)$ に関する積分方程式として表すことができるということになる。

上式は図2. 2-1 aのように、荷重点 $\boldsymbol{\xi}$ が表面上にあり、観測点 \mathbf{x} は弾性体内部に存在するとして導いた式であるため、観測点が弾性体の外部にある場合には、式(2.2-1)の右辺の積分は零となり、結果的に式(2.2-5a)の右辺は零となる。また観測点が表面上にある場合には、式(2.2-5d)の左辺の積分に特異点が生じるため特異積分として評価しなければならない。特異点近傍の積分値は、滑らかな境界に対して以下のような値となる。

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon} G_{mk}d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon} G_{mk}dV(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad (2.2-6a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon} H_{mk}d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} \quad (2.2-6b)$$

したがって、式(2.2-5d)は次式のような一般化された表現に書き換えられる。

$$\int_{\Gamma} [G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)]d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi})G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)dV(\boldsymbol{\xi}) = c(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.2-7a)$$

ここに、

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \text{ in } V \\ 0 & \mathbf{x} \text{ not in } V \\ 1/2 & \mathbf{x} \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (2.2-7b)$$

上式が内部問題における波動場の積分方程式表示である。ただし上式の左辺第1項の境界積分は、特異点を除いた境界($\Gamma - \epsilon$)での積分で、いわゆるCauchyの主値積分の意味で評価される。

2.2.2 積分方程式表示－外部問題－

ここでは、図2. 2-1bに示すように等方均質弾性体 V の表面 Γ 上に荷重点 ξ がある場合の弾性体 V における波動場の積分方程式を導く。この場合、弾性体 V は表面 Γ と無限遠方の境界面 Γ_∞ によって囲まれる領域となる。したがってこの領域を内部問題と考えると、前節と同じ操作をして積分方程式表示を導くことができる。

ここで内部問題と異なる点は、弾性体 V の表面が表面 Γ と Γ_∞ から構成されるという点と、表面 Γ の法線ベクトル $n_n(\xi)$ が弾性体内部に向かう方向を正としている点の2点である。グリーン関数は荷重点と観測点が無限に離れると零となる性質があるため、次式のように無限遠方の表面積分の値は零とみなすことができる。

$$\int_{\Gamma_\infty} [G_{mk}(\mathbf{x}|\xi, \omega)T_m(\xi, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}(\mathbf{x}|\xi, \mathbf{n}, \omega)u_m(\xi, \omega)]d\Gamma(\xi) = 0 \quad (2.2-8)$$

この式は放射条件式と呼ばれる。また表面 Γ の法線ベクトル $n_n(\xi)$ が弾性体内部に向かう方向を正としているため、表面 Γ 上の積分では正負が逆転する。したがって図2. 1-1bに示すような外部問題における積分方程式表示は、次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [H_{mk}(\mathbf{x}|\xi, \mathbf{n}, \omega)u_m(\xi, \omega) - G_{mk}(\mathbf{x}|\xi, \omega)T_m(\xi, \mathbf{n}, \omega)]d\Gamma(\xi) + \\ & \int_V \rho b_m(\xi)G_{mk}(\mathbf{x}|\xi, \omega)dV(\xi) = c(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}, \omega) \end{aligned} \quad (2.2-9a)$$

ここに、

$$c(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \text{ in } V \\ 0 & \mathbf{x} \text{ not in } V \\ 1/2 & \mathbf{x} \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (2.2-9b)$$

この式は外部問題における波動場の積分方程式表示である。

2.2.3 積分方程式表示－入射波問題－

波動場の内部問題と外部問題を応用して、図2. 2-2に示すように弾性体 V_0 の内部に物性値の異なる弾性体 V_1 が存在し、弾性体 V_1 に入射波 $u_m^{(in)}(\mathbf{x}, \omega)$ が作用する時の弾性体 V_0 における波動場の積分方程式表示を導く。

この場合、入射波は弾性体 V_1 の表面 Γ から一部は内部に透過し、一部は反射され散乱波 $u_m^{(s)}(\mathbf{x}, \omega)$ として弾性体 V_0 中を伝播する。したがって弾性体 V_0 における波動場変位 $u_m(\mathbf{x}, \omega)$ は、次式のように表現される。

$$u_m(\mathbf{x}, \omega) = u_m^{(in)}(\mathbf{x}, \omega) + u_m^{(s)}(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.2-10)$$

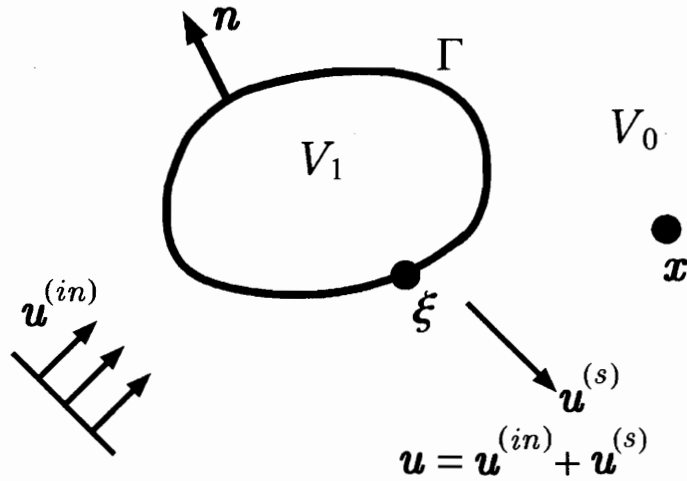


図 2. 2 - 2 入射波問題の記号

入射波の波源は弾性体 V_1 には存在しないので、弾性体 V_1 内には入射波に関する特異点は存在しない。したがって入射波に対しては内部問題の積分方程式表示を適用すると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m^{(in)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m^{(in)}(\boldsymbol{\xi}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \mathbf{x} \text{ in } V_0 \quad (2.2-11)$$

ここに、 G_{mk}^0 と H_{mk}^0 は弾性体 V_0 におけるグリーン関数を意味する。

一方、散乱波の波源は弾性体 V_1 内またはその表面上に存在するので、弾性体 V_0 には散乱波に関する特異点は存在しない。したがって散乱波に対しては外部問題の積分方程式表示を適用すると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [H_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m^{(s)}(\boldsymbol{\xi}, \omega) - G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m^{(s)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = u_k^{(s)}(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \text{ in } V_0 \quad (2.2-12)$$

式(2.2-12)から式(2.2-11)を引き、式(2.2-10)を使うと、次式のような弾性体 V_0 内の全変位 $u_k(\mathbf{x}, \omega)$ に関する積分方程式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [H_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega) - G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + u_k^{(in)}(\mathbf{x}, \omega) = u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad \mathbf{x} \text{ in } V_0 \quad (2.2-13)$$

ここで観測点 \mathbf{x} が表面 Γ 上にある場合には、特異積分の値を評価するものとする、上式は以下のように表現できる。

$$\int_{\Gamma} [H_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega) - G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + u_k^{(in)}(\mathbf{x}, \omega) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi}) G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) dV(\boldsymbol{\xi}) = c(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.2-14a)$$

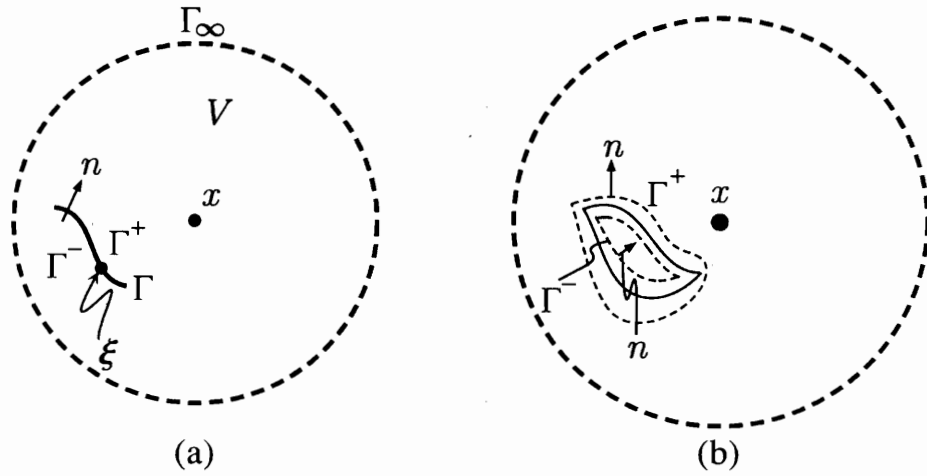


図 2.2-3 食い違い境界 (a) とその拡大図 (b) の記号

ここに、

$$c(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \text{ in } V_0 \\ 0 & \boldsymbol{x} \text{ not in } V_0 \\ 1/2 & \boldsymbol{x} \text{ on } \Gamma \end{cases} \quad (2.2-14b)$$

上式では、単位体積当たりの体積力を考慮した表示を示している。

2.2.4 積分方程式表示—食い違い境界のある内部問題—

図 2.2-3a に示すように弾性体 V の内部に存在する境界 Γ の両側で変位または表面応力が不連続である場合の弾性体 V における波動場の積分方程式を求める。

図 2.2-3b に示すように内部境界 Γ を膨らませてその境界の内部に仮定の境界 Γ^- と Γ^+ を設定して、先に述べた内部問題と外部問題の積分方程式表示を適用する。外部問題の積分方程式表示から次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [H_{mnk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{n}, \omega) u_m^{\Gamma^+}(\boldsymbol{\xi}, \omega) - G_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m^{\Gamma^+}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{n}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m^{\Gamma^+}(\boldsymbol{\xi}) G_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) dV(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\boldsymbol{x}, \omega), \quad \boldsymbol{x} \text{ in } V \quad (2.2-15a)$$

ここに、 $u_m^{\Gamma^+}$ と $T_m^{\Gamma^+}$ は表面 Γ^+ 上の変位と表面応力を表す。また内部問題の積分方程式表示から、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [G_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m^{\Gamma^-}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{n}, \omega) - H_{mnk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{n}, \omega) u_m^{\Gamma^-}(\boldsymbol{\xi}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m^{\Gamma^-}(\boldsymbol{\xi}) G_{mk}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) dV(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \boldsymbol{x} \text{ in } V \quad (2.2-15b)$$

ここに、 $u_m^{\Gamma^-}$ と $T_m^{\Gamma^-}$ は表面 Γ^- 上の変位と表面応力を表す。

ここで両式を足し合わせると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} [H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)\{\Delta u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)\} - G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)\{\Delta T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)\}]d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi})G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)dV(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \text{ in } V \quad (2.2-16)$$

ここに、

$$\Delta u_m(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = u_m^{\Gamma^+}(\boldsymbol{\xi}, \omega) - u_m^{\Gamma^-}(\boldsymbol{\xi}, \omega) \quad (2.2-17a)$$

$$\Delta T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = T_m^{\Gamma^+}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) - T_m^{\Gamma^-}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) \quad (2.2-17b)$$

上式では図2. 1-3bに示すように、膨らませた内部境界を縮小して図2. 1-3aに示すような食い違い境界 Γ とするため、内部の体積は零となり、単位密度当たりの体積力は $b_m(\boldsymbol{\xi})$ として評価している。次の2つの場合には、上式は以下のように表現される。

(1) 食い違い境界 Γ において、変位が連続で表面応力が不連続である場合、

$$\int_{\Gamma} G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)\{\Delta T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)\}d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi})G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)dV(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \text{ in } V \quad (2.2-18)$$

(2) 食い違い境界 Γ において、変位が不連続で表面応力が連続である場合、

$$\int_{\Gamma} H_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)\{\Delta u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)\}d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + \int_V \rho b_m(\boldsymbol{\xi})G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)dV(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \text{ in } V \quad (2.2-19)$$

式(2.2-19)は弾性体内部に変位の食い違いが生じた時に、弾性体内部の任意点 \mathbf{x} における変位 $u_k(\mathbf{x}, \omega)$ を与える式で、以下に示すように運動学的断層モデルの基礎式である。

式(2.1-4b)で与えられる応力グリーン関数は、次式のように表すことができる。

$$H_{mnk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) = C_{mnij} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_j} \quad (2.2-20a)$$

ここに、

$$C_{mnij} = \lambda \delta_{mn} \delta_{ij} + \mu (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{mj} \delta_{ni}) \quad (2.2-20b)$$

上式を導くに当たり次式を用いた。

$$\frac{\partial G_{lk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_l} = \delta_{ij} \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_j} \quad (2.2-21a)$$

$$\frac{\partial G_{mk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_n} + \frac{\partial G_{nk}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_m} = (\delta_{mi} \delta_{nj} + \delta_{mj} \delta_{ni}) \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_j} \quad (2.2-21b)$$

式(2.2-20a)を式(2.2-19)に代入すると、次式が得られる。

$$\int_{\Gamma} C_{nmij} n_n(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega)}{\partial x_j} \{\Delta u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)\} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \text{ in } V \quad (2.2-22)$$

上式では簡単化のため、体積力は零としている。運動学的断層モデルでは、上式を次式のように書き換えて、弾性体内部に生じる変位の食い違いに地震断層という物理的意味を与えている。

$$\int_{\Gamma} m_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) \frac{\partial G_{ki}(\boldsymbol{\xi}|\mathbf{x}, \omega)}{\partial \xi_j} d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \text{ in } V \quad (2.2-23)$$

ここに m_{ij} は地震モーメントテンソルと呼ばれ、次式で与えられる。

$$m_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) = C_{nmij} n_n(\boldsymbol{\xi}) \{\Delta u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)\} = \lambda n_n \Delta u_n(\boldsymbol{\xi}, \omega) \delta_{ij} + \mu (n_i \Delta u_j(\boldsymbol{\xi}, \omega) + n_j \Delta u_i(\boldsymbol{\xi}, \omega)) \quad (2.2-24)$$

上式を導くに当たって、変位グリーン関数に関する対称性を用いて、観測点 \mathbf{x} と荷重点 $\boldsymbol{\xi}$ を入れ換えて物理的意味を明確にしている。例えば、地震断層が $x-y$ 平面内にある場合、 z 軸が食い違い境界の鉛直ベクトルの方向となるので、 $n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$ とおける。したがって地震モーメント m_{ij} をマトリックス表示すると、次式のようになる。

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \lambda \Delta u_3 & 0 & \mu \Delta u_1 \\ 0 & \lambda \Delta u_3 & \mu \Delta u_2 \\ \mu \Delta u_1 & \mu \Delta u_2 & (\lambda + 2\mu) \Delta u_3 \end{pmatrix} \quad (2.2-25)$$

式(2.2-23)において、左辺の積分は震源断層における変位の食い違い $\Delta u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega)$ が与えられると計算できる。この積分値は、震源断層によって生じた地震波による無限弾性体の任意点 \mathbf{x} における変位 $u_k(\mathbf{x}, \omega)$ を与えることになる。

2.3 震源断層－不整形地盤系の積分方程式表示

ここでは前節の積分方程式表示の結果を使って、図2.3-1に示すような震源断層－不整形地盤系の積分方程式表示を示す。地震動問題では、体積力の影響は無視できると思われるのでこれを無視するものとする。簡単のため、観測点 \mathbf{x} は境界上にある場合についての定式を示すものとする。

震源断層を含む弾性体 V_0 において、入射波問題の積分方程式から次の積分方程式が成立する。

$$\int_{\Gamma_0 + \Gamma_{01}} [H_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega) u_m(\boldsymbol{\xi}, \omega) - G_{mk}^0(\mathbf{x}|\boldsymbol{\xi}, \omega) T_m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}, \omega)] d\Gamma(\boldsymbol{\xi}) + u_k^{(in)}(\mathbf{x}, \omega) = c(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.3-1a)$$

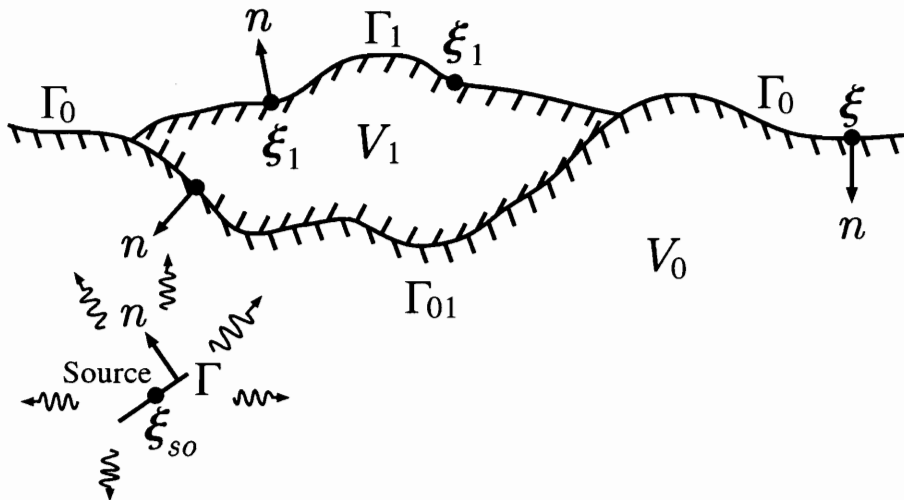


図 2. 3 - 1 震源断層—不整形地盤系の記号

ここに滑らかな境界の場合、 $c(\mathbf{x}) = 1/2$ である。また ξ は境界 $(\Gamma_0 + \Gamma_{01})$ 上の位置を表す。上式において、 $u_k^{(in)}(\mathbf{x}, \omega)$ は運動学的断層モデルから求められる地震波の変位成分で、式 (2.2-23) から以下のように与えられる。

$$u_k^{(in)}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Gamma} m_{ij}(\xi_{so}, \mathbf{n}, \omega) \frac{\partial G_{ki}(\xi_{so} | \mathbf{x}, \omega)}{\partial \xi_{soj}} d\Gamma(\xi_{so}) \quad (2.3-1b)$$

ここに ξ_{so} は震源断層上の位置を表す。

堆積層に相当する弾性体 V_1 においては、内部問題の積分方程式を適用し次の積分方程式が成立する。

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_{01}} [G_{mk}^1(\mathbf{x} | \xi_1, \omega) T_m(\xi_1, \mathbf{n}, \omega) - H_{mk}^1(\mathbf{x} | \xi_1, \omega) u_m(\xi_1, \omega)] d\Gamma(\xi_1) = c(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.3-2)$$

ここに滑らかな境界の場合、 $c(\mathbf{x}) = 1/2$ である。また ξ_1 は境界 $(\Gamma_1 + \Gamma_{01})$ 上の位置を表す。

以上のように図 2. 3 - 1 に示すような震源断層—不整形地盤系における地震波問題は、積分方程式によって定式化することができることを示した。これらの式 (2.3-1) と式 (2.3-2) の積分方程式の境界条件は、地表面で応力が零並びに、弾性体 V_0 と V_1 の接触している境界上で変位と応力が連続という条件となる。このような積分方程式を境界要素法によって離散化し境界条件を加味すると、境界上の未知変位と未知応力を求めることができる。次章では、積分方程式を離散化して解く境界要素法を整理する。