離散時間システムのロバスト安定化に関する一考察

河野通夫[1)]・高橋伸弥[2)]

A Note on Robust Stability of a Discrete-Time System

Michio KONO, Nobuya TAKAHASHI

Abstract

In the previous paper, the author has proposed guaranteed cost contol, which is a design procedure of state-feedback systems that guarantees a certain level of linear-quadratic performance for all admissible plant perturbations in a discrete-time system. This method guarantees robust stability. but does not require the matching condition in contrast to other quadratic stability methods. In Section 3, it is shown that if a Riccati-like discrete algebraic equation with the upper bound matrix term has a semi-positive definite solution and a detectability condition is satisfied, the close-loop system is robust stable.

Key Words:Guaranteed Cost Control, Discrete-Time System, Robust Stability

1 まえがき

構造的不確かさをもつ連続時間システムのロバスト安定化に関して多くの研究がなされてきたが，それらのうちの多くは２次安定化に基づいており，マッチング条件を前提としていた [1~3]。それ以前に Chang と Peng は連続時間システムが有界なパラメータ変動を受けた場合，評価関数値の上界を保証する制御系の設計法を提案した。これはギャランティードコスト制御系とよばれ，同時にロバスト安定性も保証されることが示されている [4]。とくに線形２次形式の場合は，この問題は，上界行列とよばれる付加項をもつ Riccati 方程式の可解問題に帰着されることが示され，固有値・固有ベクトルに基づく上界行列が導入された。その後，この流れの研究は，線形システムに限定し，Chang と Peng が与えたものとは別の上界行列（２次上界）を導入することによって，２次安定化問題の成果を利用する方向に発展した [5),6)]。したがって，当然ながら拡張マッチング条件を前提としている。著者らは，線形上界を導入することにより，ギャランティードコスト制御問題を構成するコントローラの存在条件を与えた [7)]。文献 5), 6) で用いられている拡張マッチング条件が定性的であるのに対し，これはパラメータの変動が大き過ぎないという自然な条件であり，定量的な形で与えられている。著者らは文献 8) において，文献 7) の結果を線形離散時間システムの場合に拡張し，付加項をもつ離散型 Riccati 代数方程式が半正定解をもつ場合，出力重みと A 行列の公称値の組が可観測であれば，ロバスト安定となることを示した。本稿においては，文献 7) の定理２の証明と同じ手法を用いて前記の条件を可検出性まで弱めることができることを示す。

2 基礎的事項

最初に線形２次形式の場合のギャランティードコスト制御について説明する。パラメータ変動のある制御対象

$$x(t+1) = A(\xi)x(t) + B(\zeta)u(t) \tag{1}$$

を考えよう。ただし $A(\xi), B(\zeta)$ は A_0, B_0 をそれぞれ公称値とし，

$$\begin{aligned} A(\xi) &= A_0 + \Delta A(\xi) \\ B(\zeta) &= B_0 + \Delta B(\zeta) \end{aligned} \tag{2}$$

と表現できると仮定する。評価関数を

$$J(x(t_1), u, \xi, \zeta) = \sum_{t=t_1}^{t_f-1} \{x^T(t)C^TCx(t) + u^T(t)Ru(t) + x^T(t_f)Px(t_f) \tag{3}$$

としよう。P_f は半正定，R は正定である。ギャランティードコスト関数として，

$$V(x,t) = x^T P(t) x \tag{4}$$

を考えることにしよう。ただし，$P(t)$ は半正定対称行列で，ギャランティードコスト行列とよばれる。

ここで，対称行列 T_i, $(i = 0,1,2,3)$ をつぎのように定義する。

$$T_0(P(t+1)) = A_0^T P(t+1) A_0 - A_0^T \Omega(P(t+1))^T \cdot B_0^T P(t+1) A_0 \Omega(P(t+1)) A_0 \tag{5}$$

$$T_1(\xi,\ P(t+1)) = \Delta A^T P(t+1)(I - B_0\Omega(P(t+1)))A_0 + A_0^T (I - B_0\Omega(P(t+1)))^T P(t+1)\Delta A + \Delta A^T P(t+1)\Delta A \tag{6}$$

$$T_2(\xi,\ \zeta,\ P(t+1)) = -A_0^T \Omega(P(t+1))^T \Delta B^T P(t+1) \cdot \Delta A - (A_0^T \Omega(P(t+1))^T \Delta B^T P(t+1)\Delta A)^T \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_3(\zeta,\ P(t+1)) = {}& -A_0^T \Omega(P(t+1))^T \Delta B^T P(t+1) \\ & \cdot \{I - B_0\Omega(P(t+1))\}A_0 - A_0^T\{I - B_0\Omega(P(t+1))\}^T \\ & \cdot P(t+1)\Delta B \Omega(P(t+1))A_0 \\ & + A_0^T \Omega(P(t+1))^T \Delta B^T P(t+1)\Delta B \\ & \cdot \Omega(P(t+1))A_0 \end{aligned} \tag{8}$$

である。ただし，T_0 は確定項，T_1 は ΔA のみを含む項，T_2 は ΔA と ΔB を含む項，T_3 は ΔB のみを含む項である。T_1, T_2, T_3 の上界行列をそれぞれ $U_1(P(t+1)), U_2(P(t+1)), U_3(P(t+1))$ としよう。そのとき，終端条件を

$$P(t_f) = P_f \tag{9}$$

として差分行列方程式

$$\begin{aligned} P(t) = {}& C^TC + T_0(P(t+1)) + U_1(P(t+1)) \\ & + U_2(P(t+1)) + U_3(P(t+1)) \end{aligned} \tag{10}$$

[1)]情報システム工学科教授

[2)]情報システム工学科助手

を逆時間で解けば (4) 式で与えられる V はギャランティードコストとなる。差分方程式 (10) に定常解 P が存在すとる仮定すれば，P はつぎの代数方程式をみたす。

$$P = C^T C + T_0(P) + U(P) \tag{11}$$

ただし，

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P) + U_3(P) \tag{12}$$

であり，$R_c = B_0 R^{-1} B_0^T$ である。

（注意１）$U(P) = 0$ の場合には，(11) 式は離散型 Riccati 代数方程式 [7] に一致する。

3 主な結果

方程式 (11) の解 P を用いて，制御則を

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \eta^*(x(t)) \\ &= -(B_0^T P B_0 + R)^{-1} B_0^T P A_0 x(t) \\ &= -\Omega(P) A_0 x(t) \end{aligned} \tag{13}$$

としたとき，閉ループ系は

$$x(t+1) = A_c(A(\xi), B(\zeta)) x(t) \tag{14}$$

と表現できる。ただし，

$$\begin{aligned} &A_c(A(\xi), B(\zeta)) \\ &= A_0 - B_0 \Omega(P) A_0 + \Delta A - \Delta B \Omega(P) A_0 \end{aligned} \tag{15}$$

閉ループ系のロバスト安定性に関し，つぎの定理が成立する。

≪定理≫方程式 (11) に半正定解が存在すると仮定しよう。$(C, A(\xi))$ が可検出であれば，全ての許容変動に対し，(13) 式によって構成された閉ループ系 (14) は漸近安定になる。

証明の前に次の補題をおく。

［補題１］[8] つぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} &A_c(A(\xi), B(\zeta))^T P A_c(A(\xi), B(\zeta)) \\ &= (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0)^T P (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0) \\ &\quad + T_1(\xi, P) + T_2(\xi, \zeta, P) + T_3(\zeta, P) \end{aligned} \tag{16}$$

（証明）補題１から，

$$\begin{aligned} &A_c(A(\xi), B(\zeta))^T P A_c(A(\xi), B(\zeta)) - P \\ &= (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0)^T P (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0) \\ &\quad - P + T_1(\xi, P) + T_2(\xi, \zeta, P) + T_3(\zeta, P) \end{aligned}$$

が成立する。(11) 式を代入すると，

$$\begin{aligned} &A_c(A(\xi), B(\zeta))^T P A_c(A(\xi), B(\zeta)) - P \\ &= (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0)^T P (A_0 - B_0 \Omega(P) A_0) \\ &\quad - C^T C - A_0^T P A_0 + A_0^T P B_0 (B_0^T P B_0 + R)^{-1} B_0^T P A_0 \\ &\quad + T_1(\xi, P) + T_2(\xi, \zeta, P) + T_3(\zeta, P) - U(P) \\ &= -C^T C - A_0^T \Omega(P)^T R \Omega(P) A_0 \\ &\quad - (U_1(P) - T_1(\xi, P)) - (U_2(P) - T_2(\xi, \zeta, P)) \\ &\quad - (U_3(P) - T_3(\zeta, P)) \end{aligned} \tag{17}$$

が得られる。$A_c(A(\xi), B(\zeta))$ の固有値，固有ベクトルをそれぞれ λ, ω としよう。ω の複素共役転置を ω^* で表す。(17) 式の右から ω，左から ω^* をかけると，

$$\begin{aligned} &(\lambda^* \lambda - 1) \omega^* P \omega \\ = \; &-\omega^* \{ A_0^T \Omega(P)^T R \Omega(P) A_0 + C^T C \\ &+ U_1(P) - T_1(\xi, P) + U_2(P) - T_2(\xi, \zeta, P) \\ &+ U_3(P) - T_3(\zeta, P) \} \omega \end{aligned}$$

となる。閉ループ系が漸近安定でないと仮定すれば，少なくともある λ に対し，

$$\lambda^* \lambda - 1 \geq 0$$

が成立する。$\lambda^* \lambda = 1$ であれば $\Omega(P) A_0 \omega = 0$，$C\omega = 0$ となり，$A_c(A(\xi), B(\zeta))\omega = A(\xi)\omega = \lambda\omega$ であるから，$(C, A(\xi))$ は可検出でない。また，$\lambda^* \lambda > 1$ の場合には，(17) 式の右辺の半負定性から，$\omega^* P \omega = 0$ であるから，上と同様にして $(C, A(\xi))$ は可検出でない。

証了

4 あとがき

上界行列が与えられれば，差分方程式 (10) の定常解を求めることで (11) 式の解を求めることができ，具体的に定理の条件を調べることができ，有用な結果が得られた。具体的に上界行列を決めることは重要である。一つの方法として，線形上界がある。

参考文献

1) 木村・藤井・森：ロバスト制御，コロナ社，1994

2) G. Leitman : Guaranteed asymptotic stability for some linear system with bounded uncertainties, *Trans. ASME J. Dynam. Sys. Meas. and Control,* Vol. 101, pp. 212–216, 1979.

3) J. S. Thorp and B. R. Barmish : On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control, Vol. 35, pp. 559–579, 1981.

4) S. S. Chang and T. K. C. Peng : Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, *IEEE Trans.*, Vol. AC-17, pp. 474–483, 1972.

5) D. S. Bernstein and W. M. Haddad : The optimal projection equations with Peterson-Hollet bounds : Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation for system with structured real-valued parameter uncertainty, *IEEE Trans.*, Vol. AC–33, pp. 578–583, 1988.

6) I. R. Petersen and D. C. McFarlane : Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain systms, *IEEE Trans.*, Vol. AC-39, pp. 1071–1977, 1994.

7) 高橋・河野・平沼・佐藤：ギャランティードコスト制御の一般化，日本機械学会論文集 C 編，66 巻 645 号， pp. 1531–1536, 2000.

8) 河野・鈴木・高橋：離散時間システムのギャランティードコスト制御に関する一考察，宮崎大学工学部紀要，第 29 号, pp. 321–325, 2000.