離散時間システムのギャランティードコスト制御に関する一考察

河野 通夫*・鈴木 達雄**・高橋 伸弥***

A Note on Guaranteed Cost Control of a Discrete-Time System

Michio KONO, Tatsuo SUZUKI and Nobuya TAKAHASHI

Abstract

Chang and Peng have proposed guaranteed cost control, which is a design procedure of state-feedback systems that guarantees a certain level of linear-quadratic performance for all admissible plant perturbations in a continuous-time system. This method guarantees robust stability, but does not require the matching condition in contrast to other quadratic stability methods. However, the exisitence of a controller is guaranteed only for a restricted class of perturbations. In this paper, we propose guaranteed cost control for a discrete-time system. In Section 3, under the assumption that there exists an upper bound matrix for the perturbations, an algebraic equation which includes the upper bound matrix term is derived. In Section 4, it is shown that if the above equation has a semi-positive definite solution and an obsevability condition is satisfied, the closed-loop system is robust stable.

Key Words :
Guaranteed Cost Control, Discrete-Time System, Robust Stability

1. まえがき

構造的不確かさをもつ連続時間システムの2次安定化に関して多くの研究がなされてきたが，それらはマッチング条件を前提としていた[1)~3)]。それ以前にChangとPengは，連続時間システムが有界なパラメータ変動を受けた場合，評価関数値の上界を保証する制御系の設計法を提案した。これはギャランティードコスト制御系とよばれ，同時にロバスト安定性も保証されることが示されている[4)]。とくにシステムが線形で評価関数が2次形式の場合，この問題は，上界関数とよばれる付加項をもつRiccati方程式の可解問題に帰着されることが示され，固有値に基づく上界関数が導入された。この設計法は，単に安定性だけでなく，評価関数値も考慮に入れているので，制御系に対する総合的評価が可能で，制御系設計法として優れている。その後，この流れの研究は，線形システムに限定し，ChangとPengが与えたものとは別の上界関数（2次上界）を導入することによって，2次安定化問題の成果を利用する方向に発展した[5),6)]。したがって，当然ながら拡張マッチング条件を前提としている。それに対し，著者らは，線形上界を導入することにより，ギャランティードコスト制御系を構成するコントローラの存在条件を与えた[7)]。文献5)，6)で用いられている拡張マッチング条件が定性的であるのに対し，これは，パラメータの変動が大き過ぎないという自然な条件であり，定量的な形で与えられている。文献5)，6)の結果を線形離散時間システムに拡張する試みもなされているが，すべて2次上界に基づいている[8),9)]。本稿の目的は，文献7)の結果を離散時間の場合に拡張するための基礎的な関係を与えることにある。

* 情報システム工学科教授
** 三菱重工業株式会社
*** 情報システム工学科助手

2. 基礎的事項

非線形離散時間システム

$$x(t+1)=f(x(t),\ u(t),\ \xi) \qquad (2.1)$$

を考えよう。ここで，x (t) はn次元状態ベクトル，u (t) はm次元入力ベクトル，ξは未知なベクトル値パラメータで，閉かつ有界な領域Ξに属すると仮定する。すなわち，

$$\xi \in \Xi$$

Ξを許容領域とよぶ。この制御対象に対し，評価関数を

$$J(x(t_1), u, \xi) = \sum_{t=t_1}^{t_f-1} l(x(t), u(t)) + \theta(x(t_f)) \quad (2.2)$$

としよう。ここで，$l(x(t), u(t))$, $\theta(x(t_f))$ は非負の関数で，それぞれ軌道に沿った各点でのコストおよび終端時刻t_fでのコストを表わす。入力を状態の非線形関数として求めることを考える。すなわち，

$$u(t) = \eta(x(t), t) \quad (2.3)$$

［定義1］任意の許容変動ξに対し，

$$J(x(t_1), u(\cdot), \xi) \leqq V \quad (2.4)$$

とするような実数Vと$u(\cdot)$が存在するとき，Vを$x(t_1)$を初期値とするギャランティードコストとよび，$u(\cdot)$をギャランティードコスト制御入力とよぶ。

つぎに上界行列の定義を与える。

［定義2］$T(\xi)$ をξをパラメータとしてもつn×n行列としよう。Uが$T(\xi)$の上界行列であるとは，すべてのxと$\xi \in \Xi$に対し，

$$x^T T(\xi) x \leqq x^T U x \quad (2.5)$$

が成立する場合をいう。

ギャランティードコストとギャランティードコスト制御入力の存在に関しつぎの定理が成立する。

《定理1》スカラー値関数V(x, t)とm次元ベクトル値関数$\eta(x, t)$が存在して，すべての$\xi \in \Xi$に対し，つぎの関係をみたすと仮定しよう。

$$l(x(t), \eta(x, t), t) + V(x(t+1), t+1) - V(x(t), t) \leqq 0, \quad t < t_f \quad (2.6)$$

$$V(x(t_f), t_f) = \theta(x(t_f)) \quad (2.7)$$

そのとき，任意の$t_1 < t_f$に対し，$V(x(t_1), t)$ は$x(t_1)$を初期値とするギャランティードコストとなり，$\eta(x(t), t)$ $(t_1 \leqq t < t_f)$ はギャランティードコスト制御入力となる。

（証明）(2.6) 式において$t = t_1, \ldots, t_f - 1$まで和をとると

$$\sum_{t=t_1}^{t_f-1} l(x(t), \eta(x(t), t)) + V(x(t_f), t_f) - V(x(t_1), t_1) \leqq 0$$

左辺の第1項と第2項の和は$J(x(t_1), u(\cdot), \xi)$であるから，

$$J(x(t_1), u(\cdot), \xi) \leqq V(x(t_1), t_1)$$

が得られる。ただし，

$$u(t) = \eta(x(t), t) (t_1 \leqq t < t_f) \quad (2.8)$$

これは，$V(x(t_1), t_1)$が$x(t_1)$を初期値とするギャランティードコストであり，(2.8) 式で与えられる$u(\cdot)$がギャランティードコスト制御入力となっていることを示している。 証了

（注意1）スカラー値関数$H(V, x, u, t, \xi)$ を

$$H(V, x, u, t, \xi) = l(x, u) + V(f(x, u, \xi), t+1) - V(x, t) \quad (2.9)$$

と定義すれば，定理の条件 (2.6)式は

$$H(V, x, \eta, t, \xi) \leqq 0, \quad t < t_f \quad (2.6')$$

となる。

（注意2）この定理の条件は文献4）の(3)式，(4)式に対応しており，直接調べられない条件であるが，文献7）の結果を離散時間の場合に拡張する場合に重要となる。

3．線形2次形式の場合のギャランティードコスト制御

この節以降，線形2次形式の場合を考察する。(2.1) 式，(2.2) 式はそれぞれ，

$$x(t+1) = A(\xi)x(t) + B(\zeta)u(t) \quad (3.1)$$

$$J(x(t_1), u, \xi, \zeta) = \sum_{t=t_1}^{t_f-1} \{x^T(t)C^T Cx(t) + u^T(t)Ru(t)\} + x^T(t_f)P_f x(t_f) \quad (3.2)$$

となる。ただし，P_fは半正定，Rは正定であり，$A(\xi)$, $B(\zeta)$ はA_0, B_0をそれぞれ公称値とし，

$$A(\xi) = A_0 + \Delta A(\xi) \quad (3.3)$$

$$B(\zeta) = B_0 + \Delta B(\zeta) \quad (3.4)$$

と表現できると仮定する。

ギャランティードコスト関数として

$$V(x, t) = x^T P(t) x \quad (3.5)$$

を考えることにしよう。ただし，P(t)は半正定対称行列で，ギャランティードコスト行列とよばれる。

このとき，(2.9) 式は

$$\begin{aligned}
&H(V, x, u, \xi, \zeta) \\
&= x^T C^T Cx + u^T Ru \\
&\quad + (A(\xi)x + B(\zeta)u)^T P(t+1)(A(\xi)x \\
&\quad + B(\zeta)u) - x^T P(t)x \\
&= x^T C^T Cx + u^T Ru + x^T A^T(\xi)P(t+1)A(\xi)x \\
&\quad + u^T B^T(\zeta)P(t+1)A(\xi)x \\
&\quad + (u^T B^T(\zeta)P(t+1)A(\xi)x)^T \\
&\quad + u^T B^T(\zeta)P(t+1)B(\zeta)u - x^T P(t)x \\
&= x^T C^T Cx + u^T Ru + x^T(A_0 + \Delta A)^T
\end{aligned}$$

$$P(t+1)(A_0+\Delta A)x$$
$$+u^T(B_0+\Delta B)^T P(t+1)(A_0+\Delta A)x$$
$$+(u^T(B_0+\Delta B)^T P(t+1)(A_0+\Delta A)x)^T$$
$$+(u^T(B_0+\Delta B)^T P(t+1)(B_0+\Delta B)u$$
$$-x^T P(t)x$$

となるが，連続時間システムの場合と異なり，Hを最小にするuはΔBのみならず，ΔAをも含んだ形でしか得られない。そこで，ChangとPengとは違った方法を提案する。まず，$H(V,x,u,\xi,\zeta)$ を

$$H(V,x,u,\xi,\zeta)$$
$$=x^TC^TCx+H_0(P(t+1),x,u)$$
$$+H_1(P(t+1),x,u,\xi,\zeta)-x^TP(t)x \quad (3.6)$$

と表現する。H_0 は確定的な項で

$$H_0(P(t+1),\ x,\ u)$$
$$=x^TA_0^TP(t+1)A_0x+u^TB_0^TP(t+1)A_0x$$
$$+(u^TB_0^TP(t+1)A_0x)^T$$
$$+u^T\{B_0^TP(t+1)B_0+R\}u \quad (3.7)$$

であり，H_1 は不確かさを含む項で

$$H_1(P(t+1),x,u,\xi,\zeta)$$
$$=2x^T\Delta A^TP(t+1)A_0x+x^T\Delta A^TP(t+1)\Delta Ax$$
$$+2u^TB_0^TP(t+1)\Delta Ax$$
$$+2u^T\Delta B^TP(t+1)\Delta Ax$$
$$+2u^T\Delta B^TP(t+1)A_0x$$
$$+2u^TB_0^TP(t+1)\Delta Bu$$
$$+u^T\Delta B^TP(t+1)\Delta Bu \quad (3.8)$$

である。H_1 は評価できないので，H_0 のみを最小にするようなuを求めると

$$u^*(t)=\eta^*(x(t),t)$$
$$=-\Omega(P(t+1))A_0x(t) \quad (3.9)$$

となる。ただし，

$$\Omega(P)=\{B_0^TPB_0+R\}^{-1}B_0^TP \quad (3.10)$$

である。（3.9）式を（3.6）式に代入したとき，$H(P(t+1),x,\eta^*,\xi,\zeta)$ が非正であり，かつ，

$$P(t_f)=P_f \quad (3.11)$$

であれば，定理1により，$V(x,t)=x^TP(t)x$ はギャランティードコストとなる。$H(V,x,\eta^*,\xi,\zeta)$ が非正である条件からつぎの差分不等式が導出できる。

$$P(t)\geqq C^TC+T_0(P(t+1))+T_1(\xi,P(t+1))$$
$$+T_2(\xi,\zeta,P(t+1))+T_3(\zeta,P(t+1)) \quad (3.12)$$

ただし，$T_i(i=0,1,2,3)$ は対称行列で，

$$T_0(P(t+1))=A_0^TP(t+1)A_0$$
$$-A_0^T\Omega(P(t+1))^TB_0^TP(t+1)A_0 \quad (3.13)$$

$$T_1(\xi,P(t+1))$$
$$=\Delta A^TP(t+1)(I-B_0\Omega(P(t+1)))A_0$$
$$+A_0^T(I-B_0\Omega(P(t+1)))^TP(t+1)\Delta A$$
$$+\Delta A^TP(t+1)\Delta A \quad (3.14a)$$

$$T_2(\xi,\zeta,P(t+1))$$
$$=-A_0^T\Omega(P(t+1))^T\Delta B^TP(t+1)\Delta A$$
$$-(A_0^T\Omega(P(t+1))^T\Delta B^TP(t+1)\Delta A)^T \quad (3.14b)$$

$$T_3(\zeta,P(t+1))$$
$$=-A_0^T\Omega(P(t+1))^T\Delta B^TP(t+1)$$
$$\{I-B_0\Omega(P(t+1))\}A_0$$
$$-A_0^T\{I-B_0\Omega(P(t+1)\}^T$$
$$P(t+1)\Delta B\Omega(P(t+1))A_0$$
$$+A_0^T\Omega(P(t+1))^T\Delta B^TP(t+1)$$
$$\Delta B\Omega(P(t+1))A_0 \quad (3.14c)$$

である。ここで，T_0 は確定項，T_1 はΔAのみを含む項，T_2 はΔAとΔBを含む項，T_3 はΔBのみを含む項である。T_1，T_2，T_3 の上界行列をそれぞれ，$U_1(P(t+1))$，$U_2(P(t+1))$，$U_3(P(t+1))$ としよう。そのとき，

$$P(t)=C^TC+T_0(P(t+1))+U_1(P(t+1))$$
$$+U_2(P(t+1))+U_3(P(t+1)) \quad (3.15)$$

が成立すれば，（3.12）式はみたされる。すなわち，終端条件を（3.11）式として（3.15）式を逆時間で解けば，（3.5）式で与えられるVはギャランティードコストとなる。また，それに対応する制御則は（3.9）式によって与えられる。

差分方程式（3.15）に定常解Pが存在すると仮定すれば，Pはつぎの代数方程式をみたす。

$$P=C^TC+T_0(P)+U(P) \quad (3.16)$$

ただし，

$$U(P)=U_1(P)+U_2(P)+U_3(P) \quad (3.17)$$

である。これは $t_f\to\infty$ の場合に対応し，（3.9）式は固定ゲイン制御則

$$u^*(t)=-\Omega(P)A_0x(t)$$

に帰着される。Pが正則であれば，逆行列の補題[10]によって（3.16）式は次式のように変形できる。

$$P=C^TC+A_0^T(P^{-1}+R_0)^{-1}A_0+U(P) \quad (3.18)$$

ただし，$R_0=B_0R^{-1}B_0^T$ である。

（注意2）$U(P)=0$ の場合には，（3.18）式は離散型Riccati代数方程式[11]に一致する。

4．ロバスト安定性

方程式（3.16）の半正定解Pを用いて制御則を

$$u^*(t)=\eta^*(x(t))$$
$$=-(B_0^TPB_0+R)^{-1}B_0^TPA_0x(t)$$

$$= -\Omega(P)A_0 x(t) \quad (4.1)$$

としたとき，閉ループ系は

$$x(t+1) = A_c(A(\xi), B(\zeta))x(t) \quad (4.2)$$

と表現できる。ただし，

$$A_c(A(\xi), B(\zeta))$$
$$= A_0 - B_0\Omega(P)A_0 + \Delta A - \Delta B\Omega(P)A_0 \quad (4.3)$$

以下では，閉ループ系（4．2）のロバスト安定性について考察する。そのためつぎの命題をおく。

《命題1》方程式（3．16）に半正定Pが存在すると仮定する。(C，A_0）が可観測であれば，Pは正定になる。

（証明）制御則（4．1）を用いたときの評価関数値をJ^*（x，ξ）で表わす。Pが正定でないとすれば，（2．4）式から，あるxとすべての許容変動ξに対し，

$$x^T \sum_{j=0}^{n-1} (A(\xi)^T)^j C^T C A(\xi)^j x \leqq J^*(x, \xi)$$
$$\leqq x^T P x = 0$$

となるから，可観測グラミアン

$$G_0 = \sum_{j=0}^{n-1} (A(\xi)^T)^j C^T C A(\xi)^j$$

は正則でない。当然，$\xi = 0$に対しても，正則でないから，(C，A_0）は可観測でない。 証了

閉ループ系の安定性に関し，つぎの結果が得られる。

《定理2》方程式（3．16）に半正定解が存在すると仮定しよう。(C，A_0）が可観測であれば，すべての許容変動に対し，（4．1）式によって構成された閉ループ系（4．2）は漸近安定になる。

証明の前につぎの補題をおく。

［補題1］つぎの関係が成立する。

$$A_c(A(\xi), B(\zeta))^T P A_c(A(\xi), B(\zeta))$$
$$= (A_0 - B_0\Omega(P)A_0)^T P (A_0 - B_0\Omega(P)A_0)$$
$$+ T_1(\xi, P) + T_2(\xi, \zeta, P) + T_3(\zeta, P) \quad (4.4)$$

証明は付録

［補題2］

$$A_0^T(P^{-1} + R_0)^{-1} R_0 (P^{-1} + R_0)^{-1} A_0 + C^T C = F^T F \quad (4.5)$$

と分解したとき，(C，A_0）が可観測であれば，(F，A_c（A_0，B_0））は可観測である。

証明は付録。

（定理2の証明）定理の条件からPは正定になる。V(x(t))の差分を計算すると，補題1によって，

$$\Delta V(x) = V(A_c(A_0(\xi), B(\zeta))x) - V(x)$$
$$= x^T\{(A_0 - B_0\Omega(P)A_0)^T P (A_0 - B_0\Omega(P)A_0)$$
$$- P + T_1(\xi, P)$$
$$+ T_2(\xi, \zeta, P)$$
$$+ T_3(\zeta, P)\}x \quad (4.6)$$

と表現できる。（3．18）式を代入すると，

$$\Delta V(x) = x^T\{(A_0 - B_0\Omega(P)A_0)^T P (A_0 - B_0\Omega(P)A_0)$$
$$- C^T C - A_0^T(P^{-1} + R_0)^{-1} A_0\}x + x^T\{T_1(\xi, P)$$
$$- U_1(P) + T_2(\xi, \zeta, P) - U_2(P) + T_3(\zeta, P)$$
$$- U_3(P)\}x$$

が得られる。第1項の重み行列は

$$(A_0 - B_0\Omega(P)A_0)^T P (A_0 - B_0\Omega(P)A_0) - C^T C$$
$$- A_0^T(P^{-1} + R_0)^{-1} A_0$$
$$= -A_0^T(P^{-1} + R_0)^{-1} R_0 (P^{-1} + R_0)^{-1} A_0 - C^T C \quad (4.7)$$

と変形でき，半負定であることがわかる。また，

$T_i \leqq U_i (i = 1, 2, 3)$ であるから，

$$\Delta V(x) \leqq 0 \quad (4.8)$$

となる。$\Delta V(x) \equiv 0$と仮定すれば，

$$x^T\{A_0^T(P^{-1} + R_0)^{-1} R_0 (P^{-1} + R_0)^{-1} A_0 + C^T C\}x \equiv 0$$

となり，左辺の重み行列を（4．5）式のように分解したとき，許容可能なξ，ζに対し，(F, $A_c(A(\xi), B(\zeta))$)は可観測でなく，当然，(F, A_c（A_0, B_0））は可観測でない。このことから補題2によって（C, A_0）の可観測性が否定されるので，V(x）は単調減少であり，かつ正であるから，離散時間の場合のLyapunovの定理により，閉ループ系（4．2）は漸近安定であることがわかる。

証了

5．あとがき

上界関数を与え，具体的設計法を開発することは重要である。一つの方向は，上界として線形上界を用い，確率離散型Riccati代数方程式の可解問題に帰着させることが考えられる。

参考文献

1）木村・藤井・森：ロバスト制御，コロナ社，1994.

2）G.Leitman, : Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties, Trans. ASME J. Dynam. Sys. Meas. and Control, Vol.101, pp212-216, 1979.

3）J.S.Thorp and B.R.Barmish : On guaranteed stability of uncertain linear systems via linear control, Vol.35, 559-579, 1981.

4）S.S.Chang and T.K.C.Peng : Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters, IEEE Trans. Vol.AC-17, pp.474-483, 1972.

5）D.S.Bernstein and W.M.Haddad : The optimal projection equations with Petersen-Hollot bounds : Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation for systems with structured real-valued parameter uncertainty, IEEE Trans. Vol.AC-33, pp.578-582, 1988

6）I.R.Petersen and D.C.McFarlane : Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems, IEEE Trans. Vol.AC-39, pp.1971-1977, 1994.

7）高橋，河野，平沼，佐藤：ギャランティードコスト制御の一般化，日本機械学会論文集（C編）66巻645号 pp.1531－1536，2000.

8）L.Xie and Y.C.Soh : Guaranteed cost control of uncertain discrete-time systems, Control Theory and Advanced Technology, Vol.10, pp.1235-1251, 1995.

9）I.R.Petersen, D.C.McFarlane and M.A.Rotea : Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems, Int. J. of Robust and Nonlinear Control, Vol.8, pp.649-657, 1998.

10）有本：カルマン・フィルタ，産業図書，1986.

11）P.E.Caines and D.Q.Mayne : On discrete time matrix Riccati equation of optimal control, Int. J. of Control, Vol.12, pp.785-794, 1970.

12）W.M.Wonham : On a matrix Riccati equation of stochastic control, SIAM J. Control Vol.6, pp.681-697, 1968.

<付録>

（補題1の証明）（3.14）式の関係から，

$$
\begin{aligned}
&A_c(A(\xi),B(\zeta))^T P A_c(A(\xi),B(\zeta))\\
&=\{(A_0-B_0\Omega A_0)+\Delta A-\Delta B\Omega A_0\}^T P\\
&\quad\times\{(A_0-B_0\Omega A_0)+\Delta A-\Delta B\Omega A_0\}\\
&=(A_0-B_0\Omega A_0)^T P(A_0-B_0\Omega A_0)\\
&\quad+(A_0-B_0\Omega A_0)^T P(\Delta A-\Delta B\Omega A_0)\\
&\quad+(\Delta A-\Delta B\Omega A_0)^T P(A_0-B_0\Omega A_0)\\
&\quad+(\Delta A-\Delta B\Omega A_0)^T P(\Delta A-\Delta B\Omega A_0)\\
&=(A_0-B_0\Omega A_0)^T P(A_0-B_0\Omega A_0)\\
&\quad+(A_0-B_0\Omega A_0)^T P\Delta A+\Delta A^T P(A_0-B_0\Omega A_0)\\
&\quad+\Delta A^T P\Delta A-(\Delta B\Omega A_0)^T P\Delta A\\
&\quad-\Delta A^T P\Delta B\Omega A_0-\{(A_0-B_0\Omega A_0)^T P\Delta B\Omega A_0\\
&\quad+(\Delta B\Omega A_0)^T P(A_0-B_0\Omega A_0)\\
&\quad-(\Delta B\Omega A_0)^T P(\Delta B\Omega A_0)\}\\
&=(A_0-B_0\Omega A_0)^T P(A_0-B_0\Omega A_0)+T_1(\xi,P)\\
&\quad+T_2(\xi,\zeta,P)+T_3(\zeta,P)
\end{aligned}
$$

証了

（補題2の証明）文献12）のLemma 4．1において

$$D=R^{-1}B_0^T(I+PR_0)^{-1}PA_0$$

$$G=-B_0$$

とおけば，

$$
\begin{aligned}
&R^{-1}B_0^T(B_0R^{-1}B_0+P^{-1})^{-1}\\
&=(R+B_0^TPB_0)^{-1}B_0^TP
\end{aligned}
$$

が成立するから，

$$
\begin{aligned}
A_0+GD&=A_0-B_0\Omega(P)A_0\\
&=A_c(A_0,B_0)
\end{aligned}
$$

となる。したがって，(C,A_0)が可観測であれば，$(F,A_c(A_0,B_0))$は可観測となる。

証了