

磁気トルカを用いた小型衛星の姿勢制御の可制御性について

穂高一条¹⁾・渡邊泰三²⁾

About Controllability for Attitude Control of a Small Artificial Satellite in the Magnetic Torquers

Ichijo HODAKA, Taizo WATANABE

Abstract: Small artificial satellites are often utilized because they do not need large attitude control energy. There are various types of actuators that generate control torque; in particular, *magnetic torquers* are suitable for attitude control systems of small satellites in advantages of their simple mechanism and small size. Indeed, magnetic torquers have been put to practical use as actuators for relatively small satellites. However, it is more difficult to properly control magnetic torquers than other actuators. This is because control torque generated by magnetic torquers is affected by the geomagnetic magnitude and direction, and therefore, position of satellites in their orbit. This difficulty is a particular problem on magnetic torquers, which is not the case for other actuators. Under these circumstances, conventional control laws for magnetic torquers are designed by each satellite, and control laws for general small satellites have not been discussed. Thus, the purpose of this paper is to show general conditions of controllability of attitude control systems of small satellites with magnetic torquers and to study a tendency of moments of inertia of satellites that enables us to control attitude with small energy. As a result, we prove that plant is controllable for almost all combinations of inertial moments and find out a tendency that we can reduce energy to control attitude when moments of inertia are small and three moments of inertia are similar values.

Key words: Controllability, Attitude control, Artificial satellite, Magnetic torquers

1. はじめに

近年、人工衛星は天文観測、惑星探査、通信、気象観測など様々な分野において欠かせない存在となっている。このようなミッションを遂行するために打ち上げられた衛星は、常にある対象の方向を向いた状態に保つ必要があることが少なくない。そのため、衛星の姿勢を制御する方法がいくつか存在し、磁気トルカによる姿勢制御もその1つである。

磁気トルカは、衛星に据え付けられたコイルに電流を流すとき、その電流と地球磁場との間に発生するローレンツ力により生じたトルクを用いて姿勢制御を施す方式である。仕組みが容易で軽量かつ低コスト、永続性があり故障しにくいという長所がある一方、出力トルクが小さいという短所があるが、小型衛星ならば磁気トルカでの姿勢制御が十分可能であると考えられる。

磁気トルカのみによる小型衛星の姿勢制御の可制御

性条件は今までになされていない。これまでは磁気トルカを補助的に使用してきたため、磁気トルカによる姿勢制御が不可制御になってしまったとしても、メインの制御方法により姿勢制御可能であった。しかし、磁気トルカのみによる姿勢制御を行う衛星を作成したときに不可制御であった場合、姿勢制御不可能となる。本研究では磁気トルカのみによる小型衛星の姿勢制御の可制御性についての研究を行う。本研究において問題となるのが、衛星は地球を周回しているため、衛星の軌道上の各位置における衛星中心の地球磁場の強さや向きが周期的に変化することである。そこで、衛星の運動方程式から状態方程式を導出し、それを制御対象とすることにより、小型衛星の姿勢制御の可制御性の判定を行う。すでに線形近似した衛星の運動方程式及び線形周期係数システムの可制御性判定法は知られている。そのため、この既知の事実及び定理を用いることにより、磁気トルカを用いた小型衛星の周期係数状態フィードバックによる姿勢制御の可制御性を研究する。

また、磁気トルカを用いた姿勢制御の中でもより少

¹⁾電気電子工学科准教授
²⁾電気電子工学科科学部生

ないエネルギーで衛星の姿勢制御を行うことが求められる。そこで、可制御である様々な衛星の慣性モーメントを用い、各衛星の必要なエネルギーを算出し、そこからみえてくる特徴や傾向から、少ないエネルギーで姿勢制御可能な衛星にはどのような特徴があるのかを研究する。

2. 線形周期システムの可制御性

準備として、本論文で用いる各記号の説明を記す。 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$: 実数 (複素数) 全体, $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$: n 次元の実 (複素) 列ベクトル全体, $\mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m \times n})$: $m \times n$ の実 (複素) 行列全体とする。また, I_n : n 次単位行列, $0_{m \times n}$: $m \times n$ の零行列とする (サイズが明らかな場合はそれぞれ $I, 0$ と略記する)。 A^T は行列 A の転置行列, A^* は行列 A の複素共役転置行列とし, j は虚数単位とする。

本節では、入力を持たない線形時変システムに関する基礎事項を述べておく。 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ を連続な複素行列値関数として、線形時変システム

$$\dot{x} = A(t)x \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \dot{x} := \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

を考える。(1) 式の線形独立な解を並べてできる行列、すなわち、行列微分方程式 $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ の解 $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ のうち、 $\det \Phi(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$ をみだすものを(1) 式の基本行列と呼ぶ。

また、 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: 定数行列, $B(t) \in \mathbb{C}^{n \times m}$: 周期 $T > 0$ をもつ連続な複素行列値関数であり、入力 u をもつ線形周期システム

$$\dot{x} = Ax + B(t)u \quad (2)$$

を考える。そして、

$$M(t) := \begin{bmatrix} B(t) & AB(t) & A^2B(t) & \cdots & A^{n-1}B(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

なる周期 T の連続な行列値関数を考える。

ここから、本研究の制御系の可制御性条件を求めるために必要となる定理を示す。

定理 1. (Cayley-Hamilton の定理)

$n \times n$ 行列 A の固有多項式が

$$\Delta(s) = \det[sI - A] = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

で与えられるとき、

$$\Delta(A) = A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = 0$$

が成立する [1]。

定理 2.

A 行列が定数行列であり、かつ、 $A = \gamma(e^{AT})$ なる多項式 $\gamma(s)$ が存在するとき、線形周期システム (2) 式が可制御であるための必要十分条件は、

$$W = \int_0^T M(t)M(t)^* dt \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

が正則となることである。

定理 2 は、 A 行列が特別な条件 ($A = \gamma(e^{AT})$) を満たす場合のみに有効である。しかし、 A 行列が定数行列であったとしても、特別な条件 ($A = \gamma(e^{AT})$) を満たさないためこのままでは対処することができない場合が存在する。そのような場合、適当な状態変数変換を施すことによって対処することができる。

定理 3.

線形周期システム

$$\dot{x} = Ax + B(t)u \quad (4)$$

を考える。ただし、 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ は周期 $T > 0$ をもつ連続な複素行列値関数とする。このとき、 $\det Y(t) \neq 0, t \in \mathbb{R}$ なる周期 T の複素行列値関数 $Y(t) = e^{At}e^{-\tilde{A}t} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ と複素正方行列 $\tilde{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 、周期 T の連続な複素行列値関数 $\tilde{B}(t) \in \mathbb{C}^{n \times m}$ が存在して、(4) 式は変数変換 $x = Y(t)\xi$ によって、

$$\dot{\xi} = \tilde{A}(t)\xi + \tilde{B}(t)u \quad (5)$$

に移され、正則な複素行列 $Q := e^{AT} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ によって、

$$e^{\tilde{A}T} = Q, \quad \tilde{A} = \gamma(Q) \quad (6)$$

が成り立つ。すなわち、

$$\tilde{A} = \gamma(Q) = \gamma(e^{\tilde{A}T}) \quad (7)$$

なる \tilde{A} が常に存在し、その線形周期システム (4) 式が可制御であるための必要十分条件は

$$W = \int_0^T \tilde{M}(t)\tilde{M}(t)^* dt \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

が正則となることである。ただし、

$$\tilde{M}(t) := \begin{bmatrix} \tilde{B}(t) & \tilde{A}\tilde{B}(t) & \tilde{A}^2\tilde{B}(t) & \cdots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}(t) \end{bmatrix}$$

これにより、 $A = \gamma(e^{AT})$ が成り立たない場合においても可制御性条件を判断することができる [2]。

本論文で扱う制御系において、計算を簡単化するため A 行列をジョルダン標準形に相似変換して計算を

行う。それに伴い、線形周期システムの変数変換が必要となる。そのため、ジョルダン標準形に相似変換したままシステムの可制御性条件をチェックできるよう準備をする。

(2) 式を考える。

$$\dot{x} = Ax + B(t)u$$

において、 A 行列を相似変換行列 P を用いてジョルダン標準形 J に相似変換すると、

$$P^{-1}AP = J \rightarrow A = PJP^{-1}$$

となるので、 $z = P^{-1}x$ とすると (2) 式は次のように移される。

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Jz + P^{-1}B(t)u \\ &= Jz + \bar{B}(t)u \end{aligned} \quad (8)$$

このとき、

$$\begin{aligned} \bar{M} &:= \begin{bmatrix} \bar{B}(t) & J\bar{B}(t) & \cdots & J^{n-1}\bar{B}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P^{-1}B(t) & P^{-1}AB(t) & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B(t) \end{bmatrix} \\ &= P^{-1} \begin{bmatrix} B(t) & AB(t) & \cdots & A^{n-1}B(t) \end{bmatrix} \\ &= P^{-1}M \end{aligned}$$

よって、定理 2 より、(8) 式が可制御であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T M(t)M(t)^* dt \in \mathbb{C}^{n \times n} \\ &= \int_0^T P\bar{M}(t)\bar{M}(t)^* P^* dt \end{aligned}$$

が正則となることである。

3. 制御系の可制御性条件

この節では、前述の定理を用いて制御系の可制御性条件を見出す。流れとしてはおよそ次のようになる。衛星の運動方程式から微分方程式を導出し、状態方程式に変換したものを制御対象とする。制御則の計算を進めるのに適した形に等価変形するため、 A 行列をジョルダン標準形に相似変換する。 A 行列において、 $A = \gamma(e^{AT})$ なる多項式 $\gamma(s)$ が存在するかを確認する。上記が確認できるならば定理 2 を、確認できないならば定理 3 を用いて可制御性条件を見出す。

衛星の基準座標系を図 1 に示す。図 1 における x, y, z 軸はそれぞれ以下のように定義する [3]。

- x 軸；速度方向を正とする軌道の接線方向
- y 軸；右手直交系をなす方向
- z 軸；地球重心方向

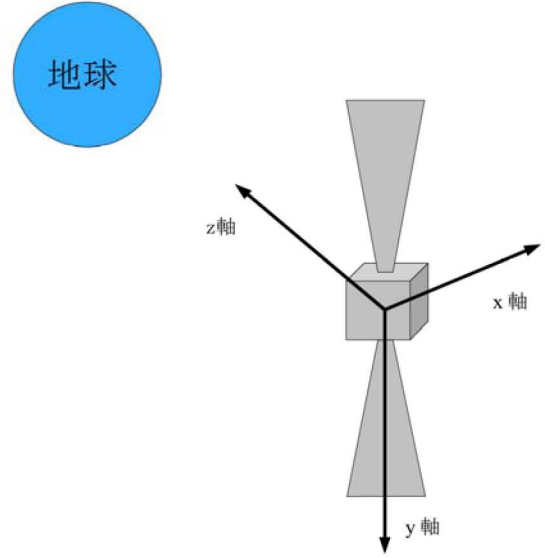


図 1: 衛星の基準座標系の定義

線形近似した衛星の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \alpha'' + 2\pi(J_x - 1)\gamma' + 4\pi^2 J_x \alpha \\ \quad = Q_x((-2 \sin i \sin 2\pi\tau)m_y - (\cos i)m_z) \\ \beta'' = Q_y(\sin i)((-\cos 2\pi\tau)m_z + (2 \sin 2\pi\tau)m_x) \\ \gamma'' + 2\pi(J_z + 1)\alpha' - 4\pi^2 J_z \gamma \\ \quad = Q_z((\cos i)m_x + (\sin i \cos 2\pi\tau)m_y) \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $Q_x = \frac{1}{I_x}Q_0$, $Q_y = \frac{1}{I_y}Q_0$, $Q_z = \frac{1}{I_z}Q_0$, $Q_0 = \frac{4\pi^2}{G}R_e^3 g_1^0$, $J_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}$, $J_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}$ とし、 $R_e = 6.37 \times 10^6$ [m]：地球半径、 i ：軌道傾斜角、 $G = 3.986 \times 10^{14}$ [Nm²/kg]：地球の重力定数、 I_x, I_y, I_z ：それぞれ衛星の x, y, z 軸まわりの慣性モーメントであり、 $g_1^0 = -3.04 \times 10^{-5}$ [T] で与えられる [4]。

ここで、

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, & x_2 = \dot{\alpha} = \alpha' \\ x_3 = \beta, & x_4 = \dot{\beta} = \beta' \\ x_5 = \gamma, & x_6 = \dot{\gamma} = \gamma' \end{cases} \quad (10)$$

なる $x_1 \sim x_6$ により (9) 式を変換すると、次の状態方

程式が導出される。

$$\dot{x} = Ax + B(t)u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\pi^2 J_x & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\pi(J_x - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\pi(J_x + 1) & 0 & 0 & 4\pi^2 J_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & Qx(-2ss) & Qx(-\cos(i)) \\ 0 & 0 & 0 \\ Qy(2ss) & 0 & Qy(-sc) \\ 0 & 0 & 0 \\ Qz(\cos(i)) & Qz(sc) & 0 \end{bmatrix}$$

$$ss = \sin(i) \sin(2\pi t), \quad sc = \sin(i) \cos(2\pi t)$$

$$u = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}$$

本研究では、これを制御対象とする。

ここで、衛星の姿勢制御が可能であるときの条件を求めたいため、 J_x, J_z を文字のまま計算する必要がある。しかし、 A 行列をそのまま用いると、パソコン上の数式処理システムを使ったとしても、計算時間が非常に長く現実的な時間の中では値を返すことができなかつたり、メモリがいっぱいになりシステムが機能しなかつたりというような不具合が生じる。そこで、計算を簡易化するために A 行列を対角化することを考える。

定義 1.

A 行列の相異なる固有値を μ_1, \dots, μ_l とする。固有値は固有方程式の解なのだから、このことは A の固有多項式が因数分解され、

$$\Delta(s) = (s - \mu_1)^{k_1} (s - \mu_2)^{k_2} \dots (s - \mu_l)^{k_l}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$$

と表されることを意味する。ここで、 $\Delta(s)$ は n 次式である。このとき、 k_1, k_2, \dots, k_l は、 $\Delta(s) = 0$ の解 μ_1, \dots, μ_l の重複度を表している [1]。

また、一般に次の定理が知られている。

定理 4.

A 行列の固有値の重複度がすべて 1 のとき、 A 行列はその固有値を対角に並べた対角行列に変換可能である [1]。

A 行列の固有値は次のようになる。

$$\lambda = 0, 0, -j2\pi, j2\pi, -2\pi\sqrt{J_x J_z}, 2\pi\sqrt{J_x J_z}$$

A 行列の固有値 0 の重複度が 2 であるので、 A 行列は対角化不可能である。そこで、対角行列に最も近い行列であるジョルダン標準形に相似変換することを考える。いま A 行列の固有値と A 行列の要素から、 J_x, J_z

について場合わけを考える。

$$\left\{ \begin{array}{ll} J_x J_z = 0; & (A1) J_x = 0 \cap J_z = 0 \\ & (A2) J_x = 0 \cap J_z \neq 0 \\ & (A3) J_x \neq 0 \cap J_z = 0 \\ & (A4) J_x = 1 \cap J_z = 0 \\ & (A5) J_x = 0 \cap J_z = -1 \\ J_x J_z = -1; & (B1) J_x = 1 \cap J_z = -1 \\ & (B2) J_x J_z = -1 \cap J_x \neq 1 \cap J_z \neq -1 \\ J_x J_z \neq -1, 0; & (C1) J_x J_z \neq -1, 0 \cap J_x \neq 1 \cap J_z \neq -1 \\ & (C2) J_x \neq 0, 1 \cap J_z = -1 \\ & (C3) J_x = 1 \cap J_z \neq -1, 0 \end{array} \right.$$

ここで、

$$J_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad J_z = \frac{I_x - I_y}{I_z}$$

であったので、(A4),(A5),(C2),(C3) の場合は存在しない。その結果、次の場合についてだけ考えればよい。

$$\left\{ \begin{array}{ll} J_x J_z = 0; & (A1) J_x = 0 \cap J_z = 0 \\ & (A2) J_x = 0 \cap J_z \neq 0 \\ & (A3) J_x \neq 0 \cap J_z = 0 \\ J_x J_z = -1; & (B1) J_x = 1 \cap J_z = -1 \\ & (B2) J_x J_z = -1 \cap J_x \neq 1 \cap J_z \neq -1 \\ J_x J_z \neq -1, 0; & (C1) J_x J_z \neq -1, 0 \cap J_x \neq 1 \cap J_z \neq -1 \end{array} \right.$$

以上の場合わけに対して定理 3 を適用すると、制御対象が可制御となる条件を次のように求めることができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} i \neq 0 \cap J_x = 0 \cap J_z = 0 (I_x = I_y = I_z) \text{ のとき} \\ i \neq 0 \cap J_x = 0 \cap J_z \neq 0 (I_y = I_z) \text{ のとき} \\ i \neq 0 \cap J_x \neq 0 \cap J_z = 0 (I_x = I_y) \text{ のとき} \\ i \neq 0 \cap J_x > 0 \cap J_z > 0 \text{ のとき} \\ i \neq 0 \cap J_x < 0 \cap J_z > 0 (J_x J_z \neq -1) \text{ のとき} \\ \quad (\text{ただし, } I_y \neq 3I_x + I_z) \\ i \neq 0 \cap J_x > 0 \cap J_z < 0 (J_x J_z \neq -1) \text{ のとき} \\ \quad (\text{ただし, 条件}^* \text{ [卒業論文参照] を除く)} \\ i \neq 0 \cap J_x < 0 \cap J_z < 0 \text{ のとき} \\ \quad (\text{ただし, } I_z \neq I_x - 3I_y) \end{array} \right. \tag{11}$$

4. 衛星の制御

衛星の姿勢制御には当然ながらエネルギーを必要とする。しかし、地上と切り離れた宇宙でのエネルギーの調達には困難で限られた範囲の中で制御を行うこととなる。よって、少ないエネルギーで衛星の姿勢制御を行うことが求められる。前節では、制御系の可制御性条件が求まった。そこでこの節では、可制御である衛星に対してある制御を施したときのエネルギーの必要量を求める。その方法としては、様々な衛星の慣性モーメントを用い、各衛星の必要なエネルギーを算出する。そこからみえてくる特徴や傾向を探る。

ここでは、衛星の姿勢制御に必要なエネルギーの算出方法を記す。

定理 5.
時変システム

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (12)$$

に対しても定常システムと同様に可制御性の概念を定義できる。時刻 $t = t_1$ において任意の状態 x^0 から出発し、時刻 $t = t_2$ で状態が原点に到達するような入力 $u = u(t)$ を選ぶことができる時、システム (12) は $[t_1, t_2]$ で可制御であるという。このように定常システムとは異なり時変システムでは時間区間を指定することが必要になる。

次のような行列 $W(t_2, t_1)$ を定義する。

$$W(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau \quad (13)$$

ただし、 $\Phi(t_1, \tau)$ は $A(t)$ の基本行列 (2 節参照) である。このとき、システム (12) が $[t_1, t_2]$ で可制御であるための必要十分条件は $W(t_2, t_1)$ が正則なことであり、そのときの入力は、

$$u(t) = -B^T(t) \Phi(t_1, t) W^{-1}(t_2, t_1) x_0 \quad (14)$$

となる [5]。

いま $W(t_2, t_1) = W$, $\Phi(t_1, \tau) = e^{-A\tau}$ (2 節参照) であるので、

$$u(t) = -B^T(t) e^{-At} W^{-1} x_0 \quad (15)$$

となる。ここで、 $x(t_1) = x^0$ を

$$x^0 = \left[\frac{\pi}{180} \quad 0 \quad \frac{\pi}{90} \quad 0 \quad \frac{\pi}{60} \quad 0 \right]^T$$

と仮定する。ただし、この x^0 は衛星の姿勢制御前の状態を表し、目標の方向からずれている状況としている。また、この状態から (15) 式の入力 $u(t)$ を選ぶことで、

$$x(t_2) = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T$$

なる $x(t_2)$ へと遷移し、衛星が目標の方向を向くようにできる。本研究の制御系において入力 $u(t)$ を電流と考えると、時間 $[0, 10]$ での単位抵抗値あたりのエネルギー U は次のようになる。

$$U = \int_0^{10} u^2(t) dt \quad (16)$$

以上の方法により、衛星の姿勢制御に必要なエネルギー比を導出する。この節では、実際の衛星を 10 用意し、各衛星のエネルギーの比 U を求める。ここで用いる衛星はすべて、前章の可制御性条件から可制御であることが確認できている。また、各衛星の比較を簡易

化するために軌道傾斜角 $i = \frac{\pi}{2}$ 一定とし、 m_x, m_y, m_z におけるエネルギーの比をそれぞれ U_x, U_y, U_z とし、 $U = U_x + U_y + U_z$ とする。入力を電流で考えているため、エネルギーの比にはそれぞれ絶対値をとった。

No.1 PRIMROSE PRIMary Membrane and Orbit-change Skill Experiment

日本大学 理工学部 航空宇宙工学科

(<http://www.jsforum.or.jp/event/contest/prize14/pdf/nichidai.pdf> より引用)

慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 6.23, \quad I_y = 6.26, \quad I_z = 11.18$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 1.8531 \times 10^{-6} + 0.0262775 + 4.633 \times 10^{-7} \\ &\approx 0.0262799 \end{aligned}$$

No.2 北辰

名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

(<http://www.jsforum.or.jp/event/contest/prize16/pdf/nagoyadai.pdf> より引用)

慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 2.14, \quad I_y = 0.949, \quad I_z = 2.38$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 5.295 \times 10^{-7} + 2.6846 \times 10^{19} + 1.324 \times 10^{-7} \\ &\approx 2.6846 \times 10^{19} \end{aligned}$$

No.3 立体編隊飛行衛星「TETRA」

東京工業大学

(http://www.jsforum.or.jp/event/
contest/prize16/pdf/tokodai.pdf より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 1.04 \times 10^5, \quad I_y = 1.07 \times 10^5, \quad I_z = 1.11 \times 10^5$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 18.9501 + 1.10539 \times 10^9 + 4.73754 \\ &\approx 1.10539 \times 10^9 \end{aligned}$$

No.4 太陽極大期における放射線観測衛星

「ソラマメ」

大阪府立大学

(http://www.jsforum.or.jp/event/
contest/prize16/pdf/osakafudai.pdf より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 0.276, \quad I_y = 0.276, \quad I_z = 0.427$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 4.3 \times 10^{-9} + 7.158 \times 10^{-7} + 3.4 \times 10^{-9} \\ &\approx 7.235 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

No.5 小型宇宙天文台「完全星覇」

大阪府立大学 工学部 航空宇宙工学科

(http://www.jsforum.or.jp/event/
contest/prize14/pdf/osakafuritudai.pdf より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 1.263, \quad I_y = 1.279, \quad I_z = 1.627$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 1.38 \times 10^{-8} + 0.00421421 + 3.5 \times 10^{-9} \\ &\approx 0.00421423 \end{aligned}$$

No.6 彗星トレイル観測衛星

北海道大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻宇宙環境システム工学研究室

(http://www.jsforum.or.jp/event/
contest/prize14/pdf/hokudai.pdf より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 1.86 \times 10^6, \quad I_y = 22.8 \times 10^6, \quad I_z = 22.6 \times 10^6$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 4995.07 + 3.12485 \times 10^{23} + 1248.77 \\ &\approx 3.12485 \times 10^{23} \end{aligned}$$

No.7 月周回小型衛星

東京工業大学

(http://www.jsforum.or.jp/event/
contest/prize16/pdf/todai.pdf より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 9.281 \times 10^6, \quad I_y = 7.849 \times 10^7, \quad I_z = 8.438 \times 10^7$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 2.02431 \times 10^6 + 5.10473 \times 10^9 + 506076 \\ &\approx 5.10726 \times 10^9 \end{aligned}$$

No.8 たんせい2号

JAXA 宇宙航空研究開発機構

(http://www.isas.jaxa.jp/j/enterp/
missions/ohsumi.shtml より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 347.21, \quad I_y = 347.21, \quad I_z = 379.69$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 0.00669231 + 0.501895 + 0.0015084 \\ &\approx 0.510096 \end{aligned}$$

No.9 小型高機能科学衛星「れいめい」

JAXA 宇宙航空研究開発機構

(http://www.isas.jaxa.jp/j/enterp/
missions/reimei/index.shtml より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 5.05, \quad I_y = 5.05, \quad I_z = 7.16$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 1.4567 \times 10^{-6} + 0.000212837 + 9.538 \times 10^{-7} \\ &\approx 0.000215247 \end{aligned}$$

No.10 オーロラ観測衛星「きょっこう」

JAXA 宇宙航空研究開発機構

(http://www.isas.jaxa.jp/j/enterp/
missions/kyokko.shtml より引用)慣性モーメント [$kg \cdot m^2$]

$$I_x = 13.33, \quad I_y = 18.36, \quad I_z = 18.68$$

$$\begin{aligned} U &= |U_x| + |U_y| + |U_z| \\ &= 3.766 \times 10^{-7} + 1864.79 + 9.41 \times 10^{-8} \\ &\approx 1864.79 \end{aligned}$$

以上の結果より、ほとんど U は U_y によって決まる
ことがわかる。そこで、表を整理し次のようにまとめ

る。表1に各衛星の慣性モーメントとエネルギー比の表を示す。

表1: 各衛星の慣性モーメントとエネルギー比

I_x	I_y	I_z	$U \approx U_y$
6.23	6.26	11.18	0.0262799
2.14	0.949	2.38	2.68×10^{19}
1.04×10^5	1.07×10^5	1.11×10^5	1.105×10^9
0.276	0.276	0.427	7.235×10^{-7}
1.263	1.279	1.627	0.00421423
1.86×10^6	22.8×10^6	22.6×10^6	3.124×10^{23}
9.28×10^6	7.84×10^7	8.43×10^7	5.107×10^9
347.21	347.21	379.69	0.510096
5.05	5.05	7.16	0.000215247
13.33	18.36	18.68	1864.79

5. 考察

本研究の考察として、衛星の姿勢制御に必要なエネルギーと慣性モーメントの関係についての考察を行う。表1を並び替え次のようにまとめる。表2に U を基準とした降順表を示す。

表2: U を基準とした降順表

I_x	I_y	I_z	$U \approx U_y$
1.86×10^6	22.8×10^6	22.6×10^6	3.124×10^{23}
2.14	0.949	2.38	2.68×10^{19}
9.28×10^6	7.84×10^7	8.43×10^7	5.107×10^9
1.04×10^5	1.07×10^5	1.11×10^5	1.105×10^9
13.33	18.36	18.68	1864.79
347.21	347.21	379.69	0.510096
6.23	6.26	11.18	0.0262799
1.263	1.279	1.627	0.00421423
5.05	5.05	7.16	0.000215247
0.276	0.276	0.427	7.235×10^{-7}

表2から、慣性モーメントの和が大きいほど姿勢制御に必要なエネルギー比が大きくなる傾向があることがわかる。しかし、衛星 No.2 においてはその傾向から大きく外れていることがわかる。また、衛星 No.6 は No.3 及び No.7 と比較して慣性モーメントの和に

大差がないにもかかわらず、エネルギー比に10桁以上の開きがある。さらに、衛星 No.8 と No.10 のエネルギー比の逆転にも矛盾が生じる。

これより、別の傾向が他にもあると考えるのが自然である。そこで、3つの慣性モーメントに注目してみると、3つの慣性モーメントの比率に開きがあるほど、エネルギー比が大きくなる傾向があると考えられる。

以上をまとめると、姿勢制御に必要なエネルギーを少なくするには次のことに注意すればよいと考えられる。

- 衛星の慣性モーメントを小さくする。
- 衛星の3つの慣性モーメントの比率の開きを小さくする。

6. おわりに

本研究では磁気トルカのみによる小型衛星の姿勢制御の可制御性についての研究を行った。

まずはじめに、衛星が制御可能であるための条件を示した。計算が非常に複雑であり、そのままでは計算が困難であるためジョルダン標準形なるものを導入した。その結果、いくつかの特別な条件を除いてはほぼどのような条件下でも制御可能であることが判明した。しかし、いくら制御可能であったとしても、姿勢制御に必要なエネルギーが磁気トルカ制御によって出力できないほど大きな値となると実質的には不可制御と同じこととなる。

そこで次に、実際に可制御である衛星をいくつか用意しその中でも、姿勢制御に必要なエネルギーが少ない衛星にはどのような特徴があるのかを判断することを目標に研究した。その結果、衛星の慣性モーメントを小さくする、衛星の3つの慣性モーメントの比率の開きを小さくすることによって姿勢制御に必要なエネルギーが少なくなることが予想された。

しかしながら、用意した衛星の数が少なかったため信頼性に欠ける。そのため、参考とする衛星の数を増やし信頼性を高める、または、新しい傾向を探ることが今後の課題である。

*参考文献

- [1] 志賀浩二；固有値問題 30 講 1995
- [2] 穂高一条, 軸屋一郎；線形周期システムの可制御性と状態空間表現の関係計測自動制御学会論文集 Vol.43, No.3, 1/7 2006
- [3] 茂原正道；衛星とロケットの誘導・制御 1994
- [4] 安藤充宏；磁気トルカを備えた小型衛星の周期係数フィードバックによる姿勢制御名古屋大学工学研究科 2006 年度修士論文
- [5] 木村英紀；動的システムの理論 1983
- [6] 斎藤利生；宇宙工学概論 1988
- [7] 川上一郎；ジョルダン標準形 2006
- [8] 杉浦光夫, 横沼健雄；ジョルダン標準形テンソル代数 1991
- [9] 上坂吉則, 塚田真；入門線形代数 1987
- [10] 斎藤正彦；基礎数学線形代数演習 1985
- [11] 中島惇, 石川洋文；大学基礎線形代数 1985