異なる二つの楕円関数の和を母解とする楕円型平均法

大西　惇平 1)　・　岡部　匡 2)

Elliptic Averaging Method Using Sum of Two Kinds of Jacobian Elliptic Function as Generating Solution

Jumpei OHNISHI,　Tadashi OKABE

Abstract

An improved averaging method is proposed in order to obtain a highly accurate periodic solution composed of only odd order harmonics in a strongly nonlinear dynamical system. In this method, sum of the Jacobian elliptic cosine (cn) and sine (sn) function is incorporated as the generating solution. The proposed method is applicable to relatively general nonlinear systems based on Duffing equation. The stability of the solution is analyzed by obtaining the characteristic multipliers of the variational equation. The numerical results for typical nonlinear oscillators are shown. The effectiveness of the proposed method is verified by comparing the computational results with those obtained by the shooting method.

Key Words:
Method of Vibration Analysis, Nonlinear Vibration, Forced Vibration, Averaging Method, Jacobian Elliptic Function

1. 緒　言

非線形振動系に対する近似解析法である平均法は，多くの利点を有することからこれまで各方面で多く利用されてきた．著者らは，平均法の高性能化を目的としてJacobiの楕円関数を母解として用いた楕円型平均法（cn 型平均法，sn 型平均法，dn 型平均法）を提案し，強非線形系に対して高精度の近似解が得られることを報告した[(1)-(3)]．cn 型平均法は漸硬型，及び飛移り型 Duffing 系の両振りモードを，sn 型平均法は漸軟型 Duffing 系を，dn 型平均法は飛移り型 Duffing 系の片振りモードを解析対象とする．さらに，漸硬型，漸軟型，飛移り型 Duffing 系（両振りモード）を基盤とするすべての振動系に対し，母解の変更なしに適用可能であるcn関数とsn関数の和を母解とする平均法（以後，cn+sn4 型平均法と呼ぶ）を提案し，cn，sn 型平均法よりも高精度な近似解を得られる事を報告した[(4)]．

単一項の楕円関数を母解とする楕円型平均法において近似解を得るために決定すべき未知変数は，振幅 A，位相 θ，母数 k の 3 個であり，cn+sn4 型平均法では位相と母数は同一とし，決定すべき未知変数は振幅 A_1, A_2，位相 θ，楕円関数の母数 k の 4 個である．

本報では，異なる 2 つの楕円関数の和を母解とした平均法として cn 関数と sn 関数の和を母解とする平均法と dn 関数と zeta 関数[(5)]の和を母解とする平均法（以後，それぞれの解法を cn+sn5 型平均法，dn+zeta5 型平均法と呼ぶ）を提案する．これらの手法は，母解を構成する二つの楕円関数の振幅と位相は異なるものとし，求める未知変数を 5 個とした手法である．

本報では，cn+sn5 型平均法及び dn+zeta5 型平均法のアルゴリズムを定式化するとともに，求められた近似解の安定判別法について論じる．さらに，いくつかの振動系に対する数値計算結果を示し，高精度数値解法であるシューティング法[(6)]による数値解との比較を通して本手法の有効性を検証する．

---

1) 機械システム工学専攻大学院生
2) 機械システム工学科准教授

2. 楕円関数の和を母解とする平均法の概要

2.1 基礎式

以下の1自由度系の非線形常微分方程式を基礎式とする．

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}+\beta_1 x+\beta_3 x^3=\varepsilon f(\omega t,x,\dot{x})\\&f(\omega t,x,\dot{x})=f(\omega t+2\pi,x,\dot{x}),\ \beta_1=\beta_3=\pm 1\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ここで，x, ω はそれぞれ変位，振動数を表す無次元変数，t は時間を代表するパラメータ，"・"は t に関する微分を表す．式(1)の左辺のばね関数中のパラメータ β_1,β_3 の値により，式(1)の左辺は，$\beta_1=\beta_3=1$ のとき漸硬型，$\beta_1=1,\beta_3=-1$ のとき漸軟型，$\beta_1=-1,\beta_3=1$ のとき飛移り型の Duffing 型振動系となる．また，ε は摂動項 f の大きさを表す微小パラメータであり，f は減衰項，外力項および x^3 以外の非線形ばね項などで構成される関数である．

2.2 cn+sn5 型平均法

cn+sn5 型平均法は，漸硬型，漸軟型，及び飛移り型 Duffing 系の両振りモードを基盤とする振動系を解析対象とし，次のような cn 関数と sn 関数の和及びその導関数を平均法の母解とする．

$$\left.\begin{aligned}x&=A_1\,\mathrm{cn}(v_1,k)+A_2\,\mathrm{sn}(v_2,k)\\\dot{x}&=-A_1\alpha\omega\,\mathrm{sn}(v_1,k)\mathrm{dn}(v_1,k)\\&\quad+A_2\alpha\omega\,\mathrm{cn}(v_2,k)\mathrm{dn}(v_2,k)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ここに，

$$v_i=\alpha u_i,\quad u_i=\omega t+\theta_i,\quad \alpha=\frac{2K}{\pi} \tag{3}$$

ただし，$i=1,2$ であり，$K=K(k)$ は第1種完全楕円積分，$k\ (0\le k<1)$ は楕円積分の母数である．未知変数は $A_i=A_i(t), \theta_i=\theta_i(t), k=k(t)$ の5個であり，それぞれ t に関する徐変化関数であると仮定する．

一方，cn+sn4 型平均法では平均法の母解を

$$\left.\begin{aligned}x&=A_1\,\mathrm{cn}(v,k)+A_2\,\mathrm{sn}(v,k)\\\dot{x}&=-A_1\alpha\omega\,\mathrm{sn}(v,k)\mathrm{dn}(v,k)\\&\quad+A_2\alpha\omega\,\mathrm{cn}(v,k)\mathrm{dn}(v,k)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

のように設定しており，未知変数は A_1,A_2,θ,k の4個である．cn+sn5 型平均法では，cn+sn4 型平均法と比較して計算手続きはやや複雑になるものの，近似解の精度が大幅に改善される．これについては後の計算例によって検証する．

以後，表記の簡略化のため次のような表記を用いる．

$$\mathrm{ep}_1=\mathrm{ep}_1(v_1,k)=\mathrm{cn}(v_1,k),\ \mathrm{ep}_2=\mathrm{ep}_2(v_2,k)=\mathrm{sn}(v_2,k) \tag{5}$$

ep_i の v_i に関する偏微分は，次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{ep}_1}{\partial v_1}&=-\mathrm{sn}(v_1,k)\mathrm{cn}(v_1,k),\\\frac{\partial \mathrm{ep}_2}{\partial v_2}&=\mathrm{cn}(v_2,k)\mathrm{sn}(v_2,k)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(5)，(6)を用いると，式(2)の母解は次式のように表される．

$$x=\sum_{i=1}^{2}A_i\mathrm{ep}_i,\qquad \dot{x}=\sum_{i=1}^{2}A_i\alpha\omega\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i} \tag{7}$$

まず A_i,θ_i,k が t の関数であることに注意して，式(2)の第1式を t に関して微分し，$\dot{x}_i$ を導出すると次式を得る．

$$\dot{x}=\sum_{i=1}^{2}\left[\dot{A}_i\mathrm{ep}_i+A_i\alpha(\omega+\dot{\theta}_i)\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}+\dot{k}\frac{A_iP_i}{k_il_i^2}\right] \tag{8}$$

ここに，

$$P_i=-Z_i\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}+(-1)^ik^2\mathrm{ep}_i(1-\mathrm{ep}_i^2) \tag{9}$$

であり，$Z_i=Z(v_i,k)$ はヤコビの zeta 関数，$l=\sqrt{1-k^2}$ は k の補母数である．式(8)と式(2)の第2式を比較すると，次の関係が求められる．

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\dot{A}_i\mathrm{ep}_i+\dot{\theta}_iA_i\alpha\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}+\dot{k}\frac{A_i}{kl^2}P_i\right]=0 \tag{10}$$

次に，式(2)の第2式を t に関して微分すると，次式を得る．

$$\ddot{x}=\sum_{i=1}^{2}\alpha_i\omega\left[\dot{A}_i\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}+A_i\alpha(\omega+\dot{\theta}_i)Q_i+\dot{k}\frac{A_i}{kl^2}R_i\right]=0 \tag{11}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}&Q_i=\mathrm{ep}_i[(-1)^i2k^2\mathrm{ep}_i^2+a_i],\\&R_i=\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}\left(\frac{E_i}{K_i}-b_i+(-1)^{i+1}2k^2\mathrm{ep}_i^2\right)+Z_iQ_i,\\&a_1=2k^2-1,\ a_2=-(1+k^2),\\&b_1=1,\ b_2=l^2\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

を得る．式(2)の第1式と式(11)を式(1)に代入すると，

$$\sum_{i=1}^{2}\alpha\omega\left[\dot{A}_i\frac{\partial \mathrm{ep}_i}{\partial v_i}+\dot{\theta}_iA_i\alpha Q_i+\dot{k}\frac{A_i}{kl^2}R_i\right]=\varepsilon f-\Gamma \tag{13}$$

を得る．ここに，

$$\Gamma=\sum_{i=1}^{2}\left[A_i\omega^2\alpha^2Q_i+\beta_1A_i\mathrm{ep}_i+\beta_3(A_i\mathrm{ep}_i)^3\right] \tag{14}$$

式(10)，(13)から $\dot{A}_i,\dot{\theta}_i,\dot{k}$ をそれぞれ個別に消去することによって，5本の関係式を求める．$\dot{A}_i,\dot{\theta}_i,\dot{k}$ は微小であると仮定し，導出した5本の関係式に1周期にわたる平均化処理を施すことにより，次式のような5本の平均化方程式を得る．なお，以下では，頭号"—"は平均化された量であることを示す．

$$\boldsymbol{J}-\varepsilon\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0} \tag{15}$$

ここに，

$$\boldsymbol{J}=\left(\bar{J}_1,\cdots\bar{J}_5\right)^T,\quad \boldsymbol{I}=\left(\bar{I}_1,\cdots\bar{I}_5\right)^T \tag{16}$$

であり，上式中の関数は次式により定義される．

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{J}_1=\int_0^{2\pi}\bar{\Gamma}\mathrm{ep}_1 d\omega t,\quad \bar{J}_2=\int_0^{2\pi}\bar{\Gamma}\mathrm{ep}_2 du\\
&\bar{J}_3=\int_0^{2\pi}\bar{\Gamma}\frac{\partial \mathrm{ep}_1}{\partial v_1}d\omega t,\quad \bar{J}_4=\int_0^{2\pi}\bar{\Gamma}\frac{\partial \mathrm{ep}_2}{\partial v_2}d\omega t\\
&\bar{J}_5=\int_0^{2\pi}\bar{\Gamma}(\bar{A}_1\bar{P}_1+\bar{A}_2\bar{P}_2)d\omega t\\
&\bar{I}_1=\int_0^{2\pi}f\,\mathrm{ep}_1 d\omega t,\quad \bar{I}_2=\int_0^{2\pi}f\,\mathrm{ep}_2 du\\
&\bar{I}_3=\int_0^{2\pi}f\frac{\partial \mathrm{ep}_1}{\partial v_1}d\omega t,\quad \bar{I}_4=\int_0^{2\pi}f\frac{\partial \mathrm{ep}_2}{\partial v_2}d\omega t\\
&\bar{I}_5=\int_0^{2\pi}f(\bar{A}_1\bar{P}_1+\bar{A}_2\bar{P}_2)d\omega t
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

式(15)は $\bar{A}_i,\bar{\theta}_i,\bar{k}$ に関する 5 元の連立方程式であり，これを数値解法を用いて解くことで $\bar{A}_i,\bar{\theta}_i,\bar{k}$ が決定され，近似解を得ることが出来る．ただし，式(15)を満たす $\bar{A}_i,\bar{\theta}_i,\bar{k}$ は一意的ではなく複数個存在する．第 3 章では，複数個存在する解の中から最も高精度な解を決定し，その数値計算結果を示した．

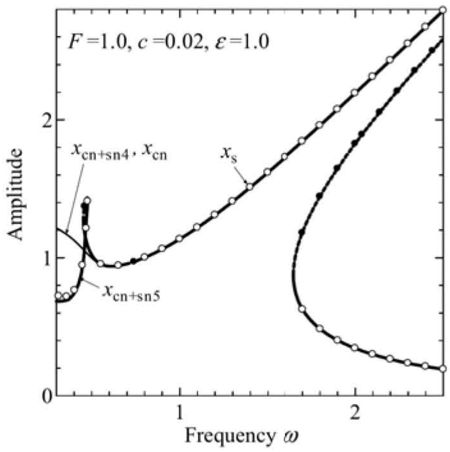


図 1　振幅の周波数応答曲線

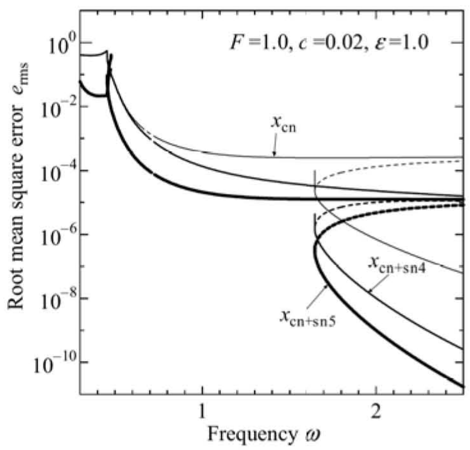


図 2　RMS 誤差

2. 3 dn+zeta5 型平均法

dn+zeta5 型平均法は，飛移り型 Duffing 系の片振りモードを解析対象とし，次のような dn 関数と zeta 関数の和及びその導関数を平均法の母解とする．

$$\left.\begin{aligned}
&x=A_1\,\mathrm{dn}(v_1,k)+A_2\,Z(v_2,k)\\
&\dot{x}=-A_1k^2\alpha\omega\,\mathrm{sn}(v_1,k)\mathrm{cn}(v_1,k)+A_2\alpha\omega\left[\mathrm{dn}(v_2,k)^2-\frac{E}{K}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$E=E(k)$ は第 2 種完全楕円積分である．未知変数は cn+sn5 型平均法と同様，$A_i,\theta_i,k\ (i=1,2)$ の 5 個であり，ほぼ同様の理論展開により $\bar{A}_i,\bar{\theta}_i,\bar{k}$ が決定でき，近似解を求めることができる．

2. 4 安定判別

cn+sn5 型平均法，dn+zeta5 型平均法より得られた定常周期解の安定性は，基礎式に付随する変分方程式：

$$\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1\\ \dot{\xi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \varepsilon\dfrac{\partial f}{\partial x}-\beta_1-\beta_3x^2 & \varepsilon\dfrac{\partial f}{\partial \dot{x}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix} \tag{19}$$

の平衡点の安定性から判別できる．定常周期解に対しては，式(19)は周期係数型の線形常微分方程式となり，その平衡点の安定性は推移行列の 2 個の固有値，すなわち特性乗数から判別できる．これら 2 個の特性乗数の絶対値がともに 1 より小であれば式(19)の平衡点，したがって楕円型平均法の定常周期解は安定，そうでなければ不安定である．

3. 数値計算結果

3. 1 計算条件

本章では，数種の振動系に対する cn+sn5 型平均法，dn+zeta5 型平均法，単一項の楕円関数を母解とする楕

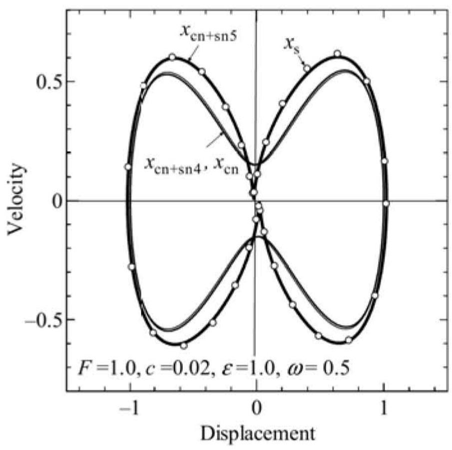


図 3　位相平面図

円型平均法による結果及びシューティング法による結果との比較を通して，本手法の有効性を検証する．

以下に示す図において，cn+sn5 型平均法による近似解 x_{cn+sn5} と dn+zeta5 型平均法による近似解 $x_{dn+zeta5}$ を太線，cn+sn4 型平均法による近似解 x_{cn+sn4} を中太線，cn 型平均法による近似解 x_{cn}，dn 型平均法による近似解 x_{dn} を細線で示した．それぞれ実線は安定解，破線は不安定解を示す．また，シューティング法による高精度数値解 x_s を○(安定)および●(不安定)で示した．

3. 2 漸硬型 Duffing 系への適用

cn+sn5 型平均法の適用例として，漸硬型 Duffing 系 $(\beta_1=\beta_3=1)$ に対する結果を示す．減衰を有する強制 Duffing 方程式の摂動項は次式で示される．

$$f = F\cos\omega t - c\dot{x} \tag{20}$$

ここに，F は外力の振幅，c は粘性減衰係数を代表するパラメータである．計算においては，各パラメータの値を $F=1.0, c=0.02, \varepsilon=1.0$ に設定した．

図 1 に漸硬型 Duffing 系における振幅の周波数応答の計算結果を示した．cn+sn5 型平均法は，主共振領域においてシューティング法の結果とよく一致しており，精度良い近似解が求められていることがわかる．また，cn+sn5 型平均法では，cn+sn4 型平均法や cn 型平均法では求めることが出来ない主共振左側すそ部 $\omega=0.4\sim0.8$ における 3 次高調波振動の近似解も求めることができ，シューティング法による結果とほぼ一致していることが確認できる．次に，cn+sn5 型平均法による近似解の具体的な精度を評価するために，シューティング法の数値解を基準とした RMS 誤差 e_{rms} の計算結果を図 2 に示す．e_{rms} の定義は次式による．

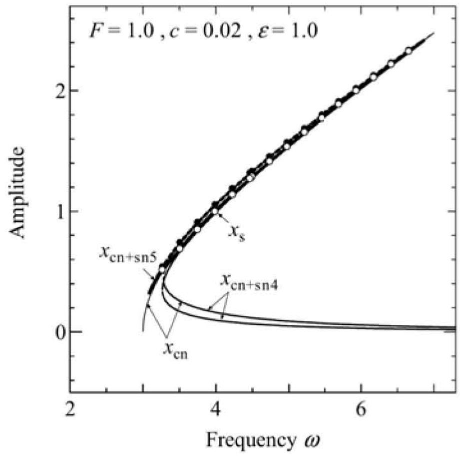
$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x_{cn+sn5} - x_s)^2\,du} \tag{21}$$

cn+sn4 型平均法, cn 型平均法により得られた近似解に対しても，式(12)と同種の RMS 誤差の計算を行った．図 2 より，cn+sn5 型平均法の計算結果は，cn+sn4 型平均法及び cn 型平均法の結果と比較して図示した振動数全域において精度が改善されていることが確認できる．

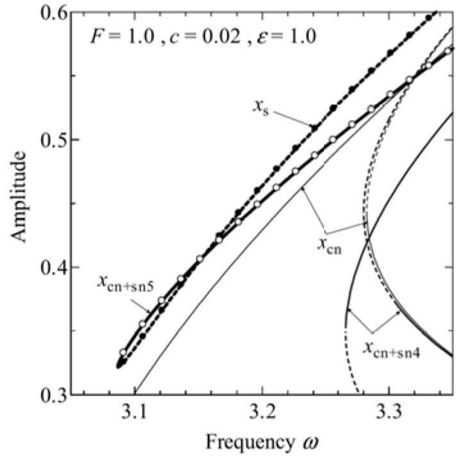
図 3 には高調波共振部 $\omega=0.5$ の位相平面図を示した．cn+sn5 型平均法による近似解は，他の楕円型平均法と比較してシューティング法による結果とよく一致していることがわかる．

3. 3 漸硬型 Duffing 系 1/3 次分数調波振動への適用

次に，漸硬型 Duffing 方程式における 1/3 次分数調波振動の計算結果を示す．cn+sn5 型平均法により 1/3 次分数調波振動の近似解を計算するには，式(1)の摂動



(a) $\omega=2\sim7.3$



(b) $\omega=3.05\sim3.35$

図 4　振幅の周波数応答曲線

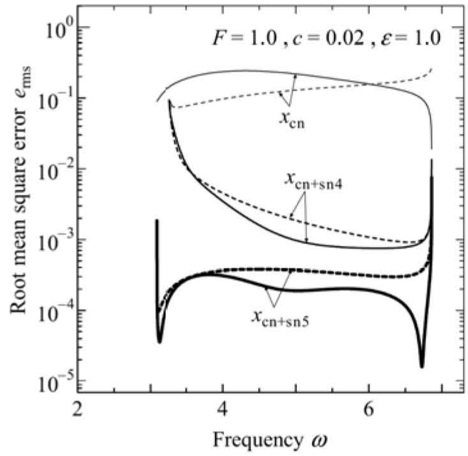


図 5　RMS 誤差

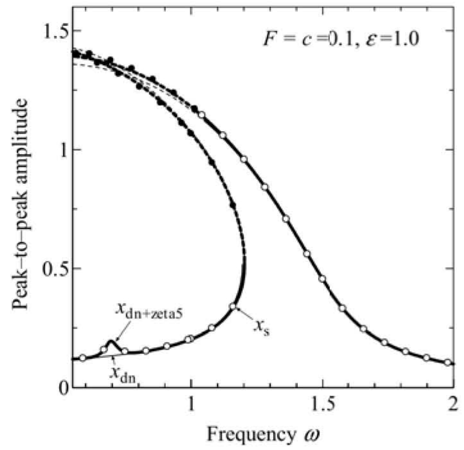


図 6　振幅の周波数応答曲線

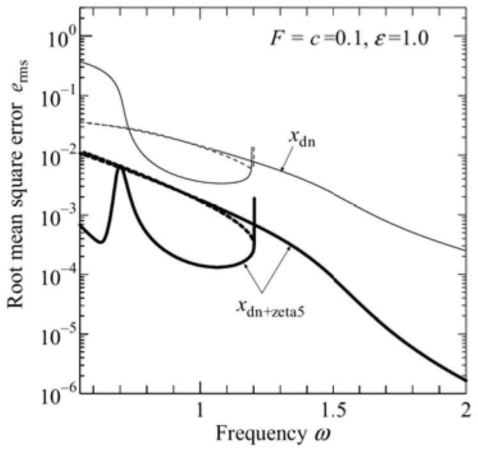


図 7　RMS 誤差

項を

$$f = F\cos\Omega t - c\dot{x},\quad \Omega = 3\omega \tag{22}$$

と定義し，ωt に関する 2π 周期解を求めればよい．各パラメータの値は，前節と同様 $F=1.0, c=0.02, \varepsilon=1.0$ とした．1/3 次分数調波振動の振幅の周波数応答曲線は，安定解と不安定解から構成される島状の形状となる．図 4(a)に振幅の周波数応答を，図 4(b)には左側先端部近傍における振幅の周波数応答の拡大図を示した．これらの図から，cn+sn4 型平均法や cn 型平均法が左側先端部においてシューティング法の計算結果と定性的に異なっているのに対し，cn+sn5 型平均法による近似解は極めてよく一致していることがわかる．

図 5 には各楕円型平均法の近似解に対する RMS 誤差を示した．cn+sn5 型平均法は他の楕円型平均法と比較して精度よい近似解を得られていることが確認できる．

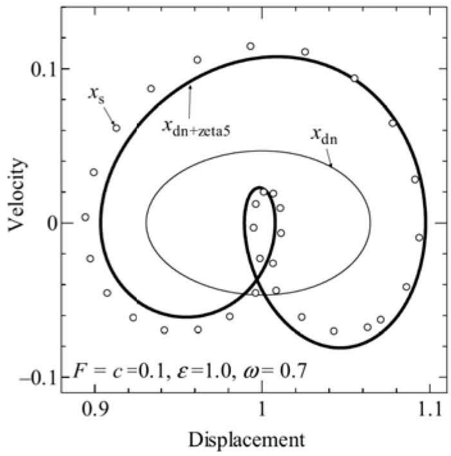


図 8　位相平面図

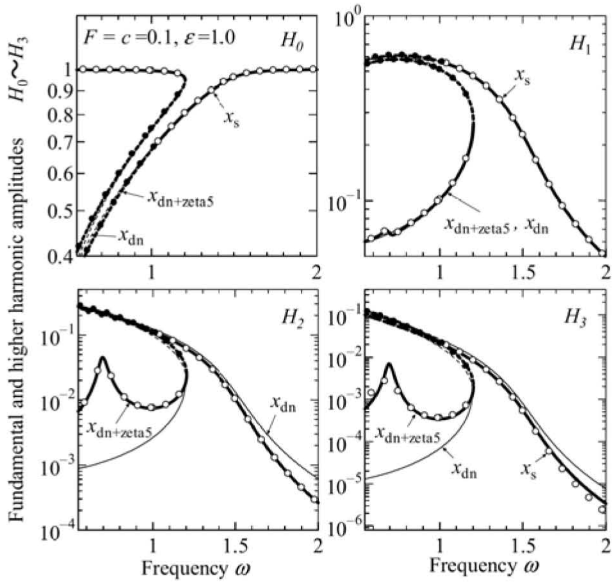


図 9　調波振幅の周波数応答曲線

3.4 飛移り型 Duffing 系（片振りモード）への適用

dn+zeta5 型平均法の適用例として，飛移り型 Duffing 系の片振りモード ($\beta_1=-1, \beta_3=1$) に対する計算結果を示す．計算に用いたパラメータは $F=c=0.1$, $\varepsilon=1.0$ とした．

図 6 に振幅の周波数応答の計算結果を，図 7 に楕円型平均法の近似解に対する RMS 誤差を示す．これらの図から，dn+zeta5 型平均法の計算結果は，dn 型平均法と比較して精度良い近似解が得られていることが確認できる．

図 8 には高調波共振近傍 $\omega=0.7$ における位相平面図を示した．dn+zeta5 型平均法による近似解は，シューティング法による計算結果と比較して若干の誤差

が認められるものの定性的に一致していることがわかる．

楕円型平均法の特徴の1つに，基本調波のみならず高調波成分も解析的に求められることが挙げられる．近似解の高調波成分の精度良い近似が可能であることが，楕円型平均法により求められた近似解の精度を向上させる一つの要因である．図9は，dn+zeta5型平均法による近似解の調波振幅の計算結果であり，0次（定数項成分）から3次までの調波振幅 H_n ($n=0\sim3$) を示した．dn+zeta5 型平均法の調波振幅は q 展開公式[5]を用いて次式から計算できる．

$$\left.\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{2} A_i \mathrm{ep}_i \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{all} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \\
a_0 &= H_0 = \frac{\pi \overline{A}_1}{\overline{K}} \\
a_n &= \frac{2\pi \overline{q}^n}{\overline{K}} \left[\frac{\overline{A}_1}{1+\overline{q}^{2n}} \cos n\overline{\theta}_1 + \frac{\overline{A}_2}{1-\overline{q}^{2n}} \sin n\overline{\theta}_2 \right] \\
b_n &= \frac{2\pi \overline{q}^n}{\overline{K}} \left[-\frac{\overline{A}_1}{1+\overline{q}^{2n}} \sin n\overline{\theta}_1 + \frac{\overline{A}_2}{1-\overline{q}^{2n}} \cos n\overline{\theta}_2 \right] \\
H_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
\overline{q} &= \exp(-\pi \overline{K}' / \overline{K}), \quad \overline{K}' = K(\overline{l})
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

図9中には，dn型平均法やシューティング法による計算結果も併記した．シューティング法による数値解の高調波振幅はFFTを用いて計算した．2次と3次の高調波振幅の計算結果において，dn型平均法に大きな誤差が見受けられるのに対し，dn+zeta5型平均法では高調波成分においてもシューティング法の結果と非常によく一致していることがわかる．

4．結　言

強制非線形振動系に対する楕円平均法の高精度化を目的として，異なる2つの楕円関数の和を母解とした平均法（cn+sn5型平均法，dn+zeta5型平均法）の概要を述べ，強制Duffing方程式に対する計算結果を示した．シューティング法による数値解との比較を行い，本報で提案した手法は単一項の楕円関数を母解とするcn型平均法やdn型平均法，また，cn+sn4型平均法よりも高精度な近似解を求めことができることを示した．さらに，本報で提案した手法によれば，高調波振動や分数調波振動に対しても高精度な近似解を求めることが可能であることも示した．

cn+sn5型平均法は，cn+sn4型平均法と同様に漸硬型，漸軟型，飛移り型Duffing系（両振りモード）を基盤とするすべての振動系に対し，母解を変更することなく適用可能である．しかしながら，本論文で提案した手法では，式(15)を満足する根 $\overline{A}_i, \overline{\theta}_i, \overline{k}$ $(i=1,2)$ は一意には定まらず複数個の根が存在する．すなわち一つの周期解に対して複数の近似解が決定される．このため，本手法においては，複数個存在する近似解の中から最も適切な根を選定する必要がある．この点については今後の検討課題としたい．

参考文献

(1)近藤孝弘，岡部匡，関谷浩，強非線形系に対する平均法の高性能化に関する研究（第1報,ヤコビのcn楕円関数を母解とする場合），日本機械学会論文集（C編），**68**-669 (2002), pp. 1371-1378.

(2)岡部匡，近藤孝弘，浜尾晋次，強非線形ダフィング方程式を基盤とする系に対する平均法の高性能化に関する研究（ヤコビのsn関数およびdn関数を母解とする場合），日本機械学会論文集（C編），**69**-678 (2003), pp. 312-319.

(3)Okabe, T. and Kondou, T., Improvement to the Averaging Method Using the Jacobian Elliptic Function, Journal of Sound and Vibration, Vol. 320, Issue 1-2, (2009), pp. 339-364.

(4)岡部匡，近藤孝弘，渡邊裕文，Jacobiのcn関数とsn関数の和を母解とする楕円型平均法，日本機械学会論文集（C編），**74**-744, (2008), pp. 1971-1978

(5)Byrd, P.D. and Friedman, M. D., Handbook of Elliptic Integrals for Engineer and Scientists, Springer-Verlag, (1971), pp. 33-37,

(6)近藤孝弘，矢ヶ崎一幸，非線形振動とカオスに関する二,三の最近の話題,日本機械学会論文集(C編)，**61**-583, (1995), pp. 746-751