

# Born 近似を用いた 誘電率推定に関する検討

横田 光広<sup>1)</sup> · 宮野 裕一<sup>2)</sup> · 宮田 拓也<sup>3)</sup>

## Examination on Dielectric Constant Estimation by using the Iterative Born Approximation

Mitsuhiro YOKOTA, Yuichi MIYANO, Takuya MIYATA

### Abstract

The accuracy of a reconstruction algorithm of estimating the relative permittivity of a dielectric cylinder using the extended technique of the Born approximation is considered in this article. The integral equation is solved by moment method of dividing the cylinder into cells. Born approximations are applied in order to determine relative permittivity of a object. In this research, Iterative Born approximation as the the extended technique of the Born approximation is applied. Numerical simulations are performed for dielectric cylinder (Japanese cedar) to show the reconstruction accuracy.

Key Words :

Moment Method , Iterative Born Approximation , Extended Born Approximation

### 1. まえがき

リモートセンシング, 医学, 地球科学などの分野において, 誘電率や透磁率などの電気特性, 形状などを非破壊的に計測することは大変重要である。この問題は, 逆散乱問題として知られており, 数理的に厳密な解を求めることは容易ではない。電磁波逆散乱問題では, しばしば積分方程式が用いられているが, この方程式は非線形方程式であるため, 多くの近似解法が提案されている。Born 近似は最も簡単近似の 1 つであり, 物体内部の全電界を入射電界で近似するものである。この近似は, 背景媒質と物体の比誘電率差が小さい場合に有効であるが, 比誘電率差が大きくなると誤差も増大してくる。この問題を解決するために, 反復 Born 近似法<sup>1)</sup>, 拡張 Born 近似<sup>2),3)</sup>, Distorted Born 近似法<sup>4)</sup> など数多くが提案されている。

逆問題とは, 既知の入力および出力を用いて, その原因となる事象を求める問題である。本研究では, この入力および出力は, それぞれ入射電界および散乱電界にあたり, 原因は未知物体の比誘電率分布や形状な

どの物理情報と言い換えることが出来る。

本報告では物体に電磁波を照射し, 測定された散乱電磁波を用いて, 物体の誘電率を推定する問題を数値的に検討している。誘電率測定には, 取り扱いの容易な手法の 1 つである反復 Born 近似法を用いている。対象として, 木材中の節あるいは空隙を取り上げ, 節や空隙などの位置や比誘電率をどの程度推定できるかについて, 検討している。なお, 本報告では, 柱軸方向に一樣な 2 次元問題として取り扱っている。

### 2. 定式化

2 次元問題の場合, 散乱電界の満たすべき積分方程式は次のようになる。

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc} + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1)$$

式 (1) より, 散乱電界 ( $E^{sc} = E - E^{inc}$ ) は次式となる。

$$E^{sc}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2)$$

ここで  $E^{sc}(\mathbf{r})$  は散乱電界,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  は自由空間中のグリーン関数,  $E(\mathbf{r}')$  は領域  $D$  の未知全電界である。 $o(\mathbf{r}')$  は物体関数で  $o(\mathbf{r}') = k_0^2 [\epsilon_r(\mathbf{r}') - \epsilon_r^b]$  と定義され,  $k_0$  は自由空間中の波数,  $\epsilon_r$  は散乱体の複素比誘電率,  $\epsilon_r^b$  は背

<sup>1)</sup>電気電子工学科教授

<sup>2)</sup>電気電子工科学部生

<sup>3)</sup>電気電子工学専攻大学院生

景媒質の複素比誘電率である。式(1)の被積分項にある物体関数  $o(\mathbf{r}')$  と全電界  $E(\mathbf{r}')$  の二つが未知となり、何らかの近似を用いて物体関数を求める必要がある。

## 2.1 Born 近似

よく知られている近似として、散乱体内部の全電界を入射電界で近似する。これを Born 近似と呼ぶ。

$$E^{sc}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E^{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3)$$

この近似は散乱体の比誘電率が背景媒質のそれと非常に近い場合に有効な近似であることが知られている。散乱体の比誘電率が大きい場合、Born 近似の適用範囲を広げる手法の一つとして、次の反復 Born 近似が提案されている。

## 2.2 反復 Born 近似<sup>1)</sup>

Moghaddam と Chew は時間領域データを用いて反復 Born 近似法を提案している。送受信系の座標を図1に示す。

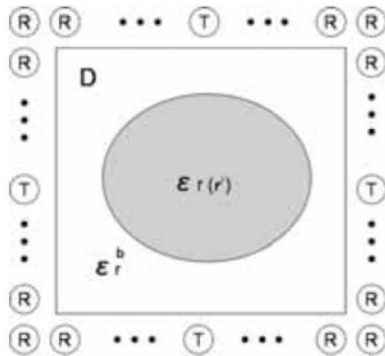


図1: 逆散乱問題における送受信系の座標系

R は受信機 ( $m = 1, \dots, M$ ), T ( $l = 1, \dots, L$ ) は送信機を示す。反復 Born 近似のアルゴリズムを以下に示す。

まず、物体内部の全電界を Born 近似を用いて入射電界で近似すると、観測点  $\mathbf{r}_m$  での散乱電界は以下で与えられる。

$$E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = \int_D G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E^{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4)$$

ここで散乱データを  $E^{sc}(\mathbf{r})$  に代入すると、物体関数だけが未知となりこの方程式は解くことが可能となる。本研究では、この物体関数を特異値分解法を用いて最小二乗近似解として解いている。次に式(3)を以下のように変形する。

$$E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = -\frac{j}{4} k^2 \sum_{n=1}^N E_n^{inc}([\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \varepsilon_r^b]) \int_{cell} H_0^{(2)}(k_0 \rho) dx' dy' \quad (5)$$

ここで  $\rho = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$  である。

式(5)の積分計算は Richmond 近似を用いて、各セルを十分小さくとり四角いセルを半径  $a_n$  とする同じ面積の円に置きなおすことで積分変数をセルの縦と横  $dx', dy'$  から半径  $\rho'$  と角度  $\phi'$  に置き換えることができる<sup>5)</sup>。以上より、式(5)は次の行列方程式に帰着させることができる。

$$\sum_{n=1}^N C_{mn}([\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \varepsilon_r^b]) = E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) \quad (6)$$

$$C_{mn} = -j \frac{\pi a_n k_0}{2} E_n^{inc}(\mathbf{r}') J_1(k_0 a_n) H_0^{(2)}(k_0 \rho_{mn}) \quad (7)$$

である。

次に得られた近似物体関数  $\bar{o}(\mathbf{r}')$  を式(1)に代入する。

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc}(\mathbf{r}) + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{o}(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8)$$

このとき物体内部を含む観測領域 D の全電界  $E^{(1)}(\mathbf{r})$  を GMRES 法を用いて求める。全電界  $E^{(1)}(\mathbf{r})$  を用いて、

$$\bar{E}^{sc(1)}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = \int_D G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \bar{o}(\mathbf{r}') \bar{E}^{(1)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (9)$$

観測点 ( $\mathbf{r}_m, m = 1, \dots, M$ ) での散乱電界を計算する。

観測点 ( $\mathbf{r}_m, m = 1, \dots, M$ ) において、測定データと計算で求めた散乱界を以下の式に代入し収束条件と比較する。

$$\frac{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M |E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) - \bar{E}^{sc(l)}(\mathbf{r}_m, \rho_l)|^2}{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M |E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l)|^2} < \delta \quad (10)$$

ここで  $\delta$  は収束条件であり、設定した条件を満足している場合、反復 Born 近似法は終了する。そうでない場合、式(8)で求めた全電界  $\bar{E}$  の式(2)の物体内部の全電界として再び反復計算をし、収束条件を満たすまで繰り返す。

## 3. シミュレーション結果

図2に示すように、観測領域は一辺が  $1\lambda$  の正方形とし、入射点および観測点は観測領域中心から  $1.5\lambda$  離れた位置に交互に各 20 点配置、セルの大きさは  $\lambda/40$  としている。長さは波長で規格化している。また、背景媒質の誘電率を  $\varepsilon_r^b = 1.0$  とし、入射波は電界強度  $|E_z| = 1$  の平面波とする。判定条件は  $\delta = 10^{-8}$  に設定している。

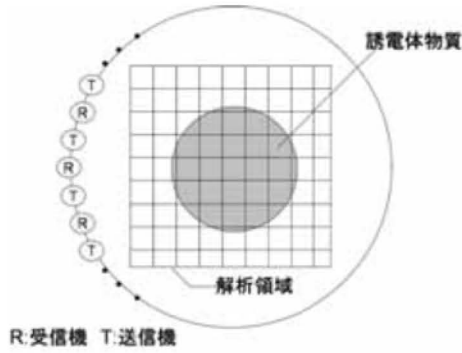


図 2: 観測領域

### 3.1 半径を変化させた場合

本報告では木材をモデルとして取り扱い、比誘電率を 1.3 と設定している。図 3 および 4 は、物体の半径を変化させた場合、真値と推定された比誘電率分布を示している。両図を比較すると半径が大きくなり観測領域境界面に近づいていくと分布の形状が変化していくことが分かる。また、境界面に接したときは接した部分の比誘電率が本来の 1.3 より大きくなっている。

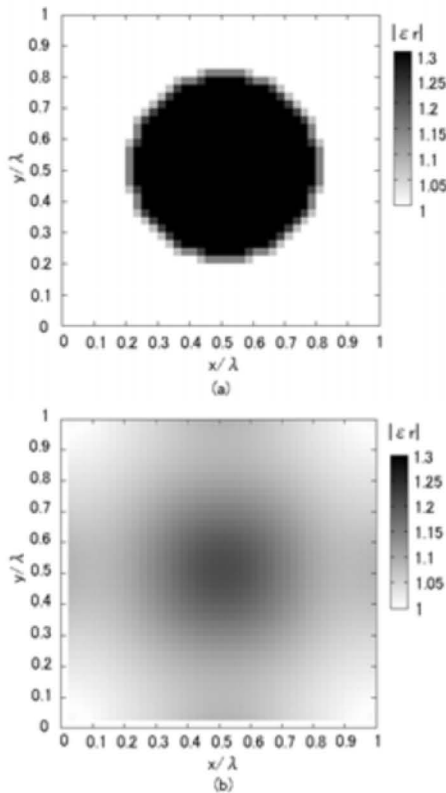


図 3 : 半径  $a = 0.3\lambda$ , 比誘電率  $\epsilon_r = 1.3$  ((a) : 真値, (b) : シミュレーション結果)

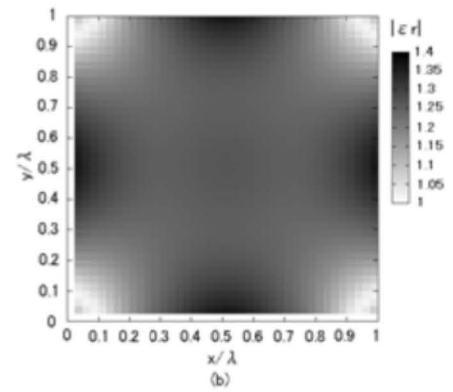
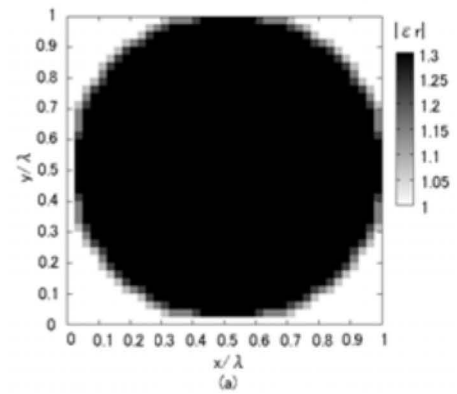
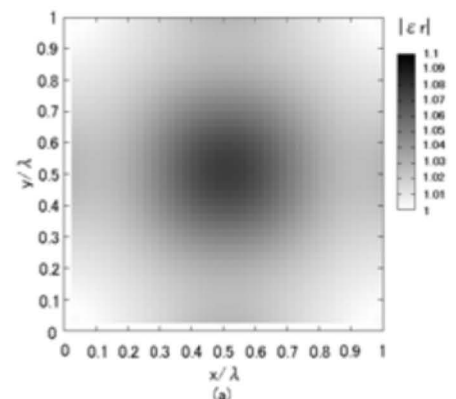


図 4 : 半径  $a = 0.5\lambda$ , 比誘電率  $\epsilon_r = 1.3$   
((a) : 真値 (b) : シミュレーション結果)

### 3.2 比誘電率を変化させた場合

図 5 および 6 は、物体の比誘電率を変化させた場合の推定された比誘電率分布を示している。ここでは、半径を  $a = 0.3\lambda$  に固定している。これらの図から形状の変化はほとんど見られなかった。しかし、比誘電率が大きくなり背景媒質との差が大きくなるにつれ、真値と測定結果との差も大きくなっていることが分かった。これは散乱体の比誘電率が背景媒質のそれと非常に近い場合に有効という Born 近似の特性が影響したものだと考えられる。



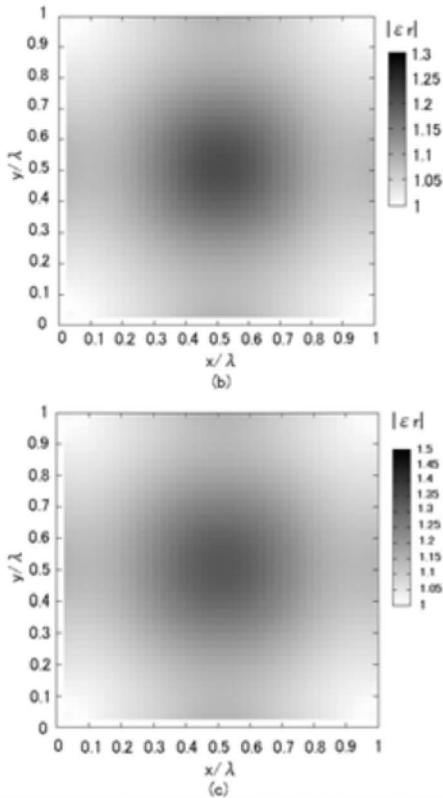


図5：比誘電率別の推定された比誘電率分布  
 ((a) :  $\epsilon_r = 1.1$  (b) :  $\epsilon_r = 1.3$  (c) :  $\epsilon_r = 1.5$ )

3.3 分布の形状を変化させた場合

次に、誘電率分布の形状を変化させた場合の結果を比較する。まず、図6(a)に示すように中心に低い比誘電率の穴を開けた場合を検討する。比誘電率分布の半径  $a = 0.4\lambda$ ，穴の半径  $a_b = 0.2\lambda$  とした。結果としては、中心部分に空洞があることは確認できる。しかし、リング状部分と空洞部分の比誘電率の差が小さく本来の相対比は  $\frac{\epsilon - \epsilon_r^b}{\epsilon_r^b} = 0.3$  になるはずなのだが、計算結果での相対比は最大で  $\frac{\epsilon_{ring} - \epsilon_{hall}}{\epsilon_{hall}} = 0.86$  と大きくなった。

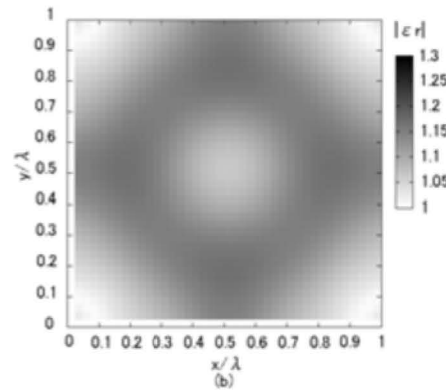
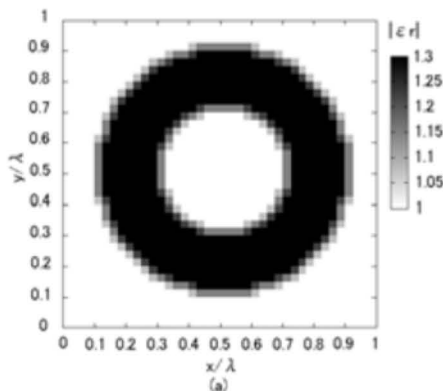


図6：半径  $a_b = 0.2\lambda$  の穴を開けた場合  
 ((a) : 真値 (b) : シミュレーション結果)

次に図7(a)に示す比誘電率分布を正方形にした場合について検討する。この分布は、比誘電率を  $\epsilon_r = 1.3$ ，中心座標を  $(0.5\lambda, 0.5\lambda)$ ，一辺を  $0.5\lambda$  の正方形とした。結果を比較すると、もともとの正方形だった形状は高周波成分が落ちたことにより丸みをおびた正方形となっていることが分かる。

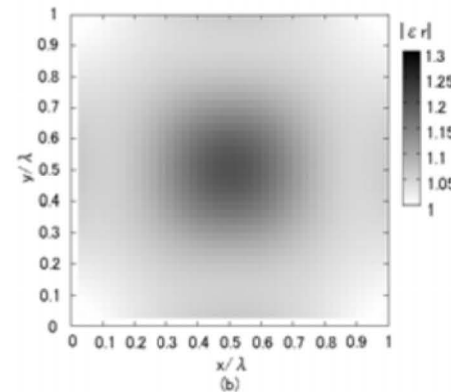
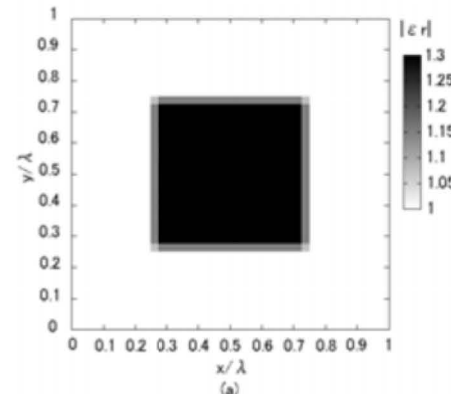


図7：一辺  $0.5\lambda$  の正方形  
 ((a) : 真値 (b) : シミュレーション結果)

4. まとめ

本研究では、反復 Born 近似法を使って比誘電率の推定を行い、比較・検討を行った。比誘電率が背景媒

質に近い場合は、比較的良く推定できているが、背景媒質との差が大きくなるにつれて、誤差が大きくなることが確認された。また、解析領域との関係において、物体と同程度の大きさでは、誤差が大きくなることが示された。

今回のシミュレーションでは、PCのメモリの関係で数値計算する上でのセルの大きさを $\lambda/40$ とした。このセルの大きさをさらに小さくし、セル自体の数を増やせばシミュレーションの精度はさらに向上すると考えられる。そのほか、シミュレーションの初期設定を見直す必要があると考えられる。

### 参考文献

- 1) M. Moghaddam and W. C. Chew : “ Study of some practical issues in inversion with the Born iterative method using time-domain data ” ,IEEE Trans. Antennas Propag., **41**, 2, pp. 177-184 (1993)
- 2) T. M. Habashy, R. W. Groom and B. Spies: “ Beyond the Born and Rytov approximations: A non-linear approach to electromagnetic scattering ” , J. Geophys. Res., **98**, B2, pp. 1759-1775 (1993)
- 3) Z. Q. Zhang and Q. H. Liu: “ The hybrid extended Born approximation and CG-FFHT method for axisymmetric media ” ,IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **39**, 4, pp. 710-716 (2001)
- 4) W. C. Chew and Y. M. Wang: “ Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method ” ,IEEE Trans. Med. Imaging, **9**, 2, pp. 218-225 (1990)
- 5) A. Ishimaru: “ Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering ” ,Prentice Hall (1991)