

# 為替市場と乱流の比較

## --確率分布とヴォラティリティ--

田中 美栄子<sup>(1)</sup>

板橋 毅<sup>(2)</sup>

## Comparing Foreign Exchange Markets and Turbulence

## --Probability Distributions and Volatilities--

Mieko Tanaka-Yamawaki

Tsuyoshi Itabashi

### Abstract

We examine the real data of turbulence and foreign exchange rates in order to compare the two stochastic processes. We have found that the probability distributions of both cases follow the Lévy distribution, thus exhibit scale invariance. Moreover it is found that not only the moments of velocity differences in the scaling region obey the scaling law derived from the Kolmogorov's theory, but also the moments of price differences obey the same law. However the scaling law for the volatility shows different properties for foreign exchange rates and for turbulence, which indicates that we need to investigate the similarity as well as the differences at the same time in comparing the two phenomena.

### Keywords

price fluctuation, turbulence, probability density distribution, Lévy distribution, volatility, scale dependence

### 1. はじめに

金融工学において価格変動は正規分布になると考えられている。これは価格変動が完全なランダムであることを意味しているが、実際のデータは正規分布からのずれを示している。

初めに完全なランダムからのずれを 1963 年にマンデルブロが発見した[1]。その後、より大規模なデータで詳細な解析をしたのがマンテーニャとスタンレーである。彼らは実際に、1 分ごとの為替の価格変動データで  $\alpha$  が 1.4 のレヴィ分布に

なることを指摘した[2]。これをもとに、ガシュガイエらは外国為替市場と乱流を結びつけ、外国為替と乱流との類似を示した[3]。

3次元等方乱流において、スケール不変性が存在することが知られている。(コルモゴロフ則) これは周波数  $f$  の関数としてパワースペクトル  $S(f)$  が周波数  $f$  のべき乗となり、両対数表示で直線となることによって特徴付けられる。特にその傾きが  $-5/3$  となる周波数の範囲は慣性領域と呼ばれており、傾き  $-5/3$  は次元解析から導かれる[4]。

この慣性領域において、速度差のモーメントは

(1) 情報システム工学科助教授

(2) 情報工学専攻大学院生

距離間隔  $\Delta r$  のべき乗になり、次元解析から

$$\langle (\Delta v)^n \rangle = c (\Delta r)^{\zeta_n} \quad (1)$$

のように書ける。ここで、指数  $\zeta_n$  は  $n/3$  である (コルモゴロフ理論)。実際のデータでは  $\zeta_n$  が  $n/3$  になるのは、 $n$  のごく小さい時に限られることが知られている。

ガシュガイエ等は、超短期価格変動値の確率密度分布と乱流の速度差の確率密度分布を比較し、類似性を確かめた。彼等は更に、為替市場と3次元等方乱流との対応を、表1のように仮定し、乱流におけるスケーリングの起源が、大きな渦から小さな渦へのカスケード的なエネルギー伝達構造にあることから類推して、市場における情報の伝達も同様のカスケード構造を持つものと考えた。

乱流	為替
Velocity $\Delta v$	Price $\Delta x$
Space resolution $\Delta r$	Time resolution $\Delta t$
Energy cascade in space hierarchy	Information cascade in time hierarchy
$\langle (\Delta v)^n \rangle = c (\Delta r)^{\zeta_n}$	$\langle (\Delta x)^n \rangle = c (\Delta t)^{\zeta_n}$

表1: 乱流と為替の対応表。(文献[3]からの引用。)

更にモーメントのスケーリング式

$$\langle (\Delta x)^n \rangle = c (\Delta t)^{\zeta_n} \quad (2)$$

において指数  $\zeta_n$  が式(1)と同じ  $n/3$  となることを示した。

我々はこのことに大変興味を持ち、文献[3]で用いられたものと同じ為替データ FX1 と、より大規模な為替データ FX2、及び乱流データ TRB の解析を行った。その結果、為替と乱流の類似を確かめただけでなく、為替の  $\zeta_n$  が乱流の  $\zeta_n$  よりも長い範囲で  $n/3$  になることを発見した [5,6,7,8,9,10,11,12]。

本研究では、2種類の外国為替データ FX1

(1992年10月1日~1993年9月30日、ドイツマルク対アメリカドル、データ数1,472,241個)、FX2 (1995年1月1日~2000年12月31日、日本円対アメリカドル、データ数9,872,376個)と宮崎大学15m風洞実験により得られた乱流データ TRB (データ数250,000個)を用いる。

## 2. 確率密度分布

まず初めに、為替と乱流の確率密度分布を求める。為替は価格差の確率密度分布  $P_{\Delta x}(\Delta x)$ 、乱流は速度差の確率密度分布  $P_{\Delta v}(\Delta v)$  である。ここで為替の価格差を  $\Delta x$  とし、ある時刻  $t$  での価格  $x(t)$  とある時刻  $t+\Delta t$  での価格  $x(t+\Delta t)$  との差を表す。また、乱流の速度差を  $\Delta v$  とし、ある距離  $r$  での速度  $v(r)$  とある距離  $r+\Delta r$  での速度  $v(r+\Delta r)$  との差を表す。

求めた確率密度分布を図1, 2, 3に示す。図1, 2は為替の確率密度分布を示しており、両者ともに  $\alpha=1.6$  のレヴィ分布でフィットできていることがわかる。図3には乱流の確率密度分布を示しており、為替と同様に  $\alpha=1.8$  のレヴィ分布でフィットできている。このことから、為替と乱流の確率密度分布はほぼ同じ分布だと言える。

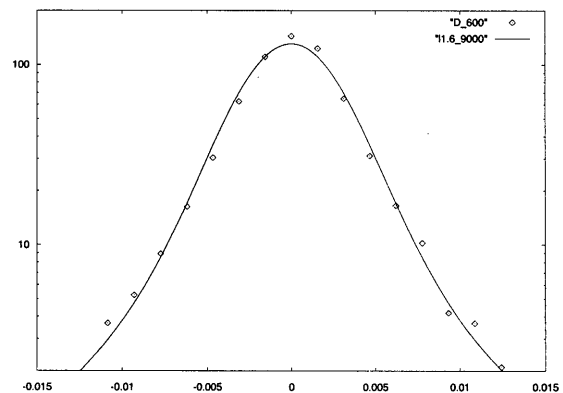


図1: 点がFX1の確率密度分布、線が  $\alpha=1.6$  のレヴィ分布を示している。

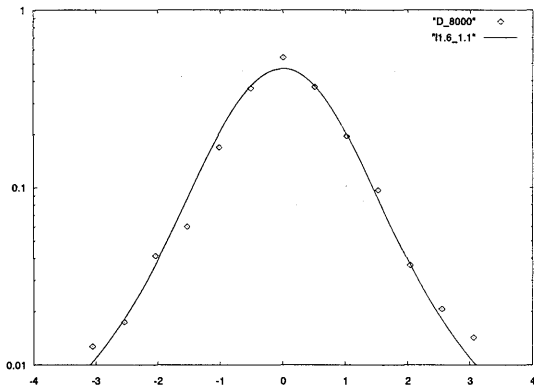


図 2：点が FX2 の確率密度分布、線が  $\alpha=1.6$  のレヴィ分布を示している。FX1 と同様にレヴィ分布でフィットできている。

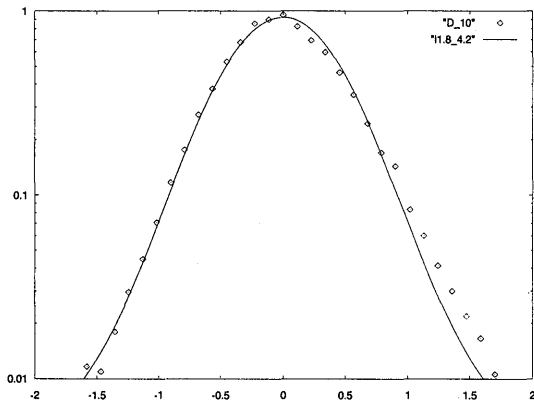


図 3：点が TRB の確率密度分布、線が  $\alpha=1.8$  のレヴィ分布を示している。為替と同様にレヴィ分布でフィットできている。

### 3. レヴィ分布

#### 3-1. スケール変換

レヴィ分布の定義は次式で与えられる。

$$P_{a,\beta}(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|k|^a + ikx} dk \quad (3)$$

(3)式において、 $\beta'=\lambda\beta$ 、 $k'=k/\lambda$ とすると

$$P_{a,\beta}(x) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta'|k'|^a + i\lambda k'x} dk' \quad (4)$$

(4)式が得られる。この(4)式は次式のようなスケール不変な性質を示す形で表すことができる。

$$P_{a,\beta}(x) = \lambda^{1/a} P_{a,\beta'}(\lambda^{1/a} x) \quad (5)$$

(5)式は、様々な  $\beta$  に対する  $P_{a,\beta}(x)$  のスケールを変換することで一つの分布に重なることを意味する。 $\beta$  は時間スケール  $\Delta t(\Delta r)$  に比例するので、異なる  $\Delta t(\Delta r)$  の確率密度分布を(4)式に従って同一分布へと変換できることになる。

図 4 に 3つの異なる  $\Delta t (=10,100,1000)$  に対する FX1 の確率密度分布を示している。この3つを(5)式に従って変換することで同一分布に重なることを図 5、6、7 に示す。

ここで、分布が重なる  $\Delta t(\Delta r)$  の範囲は限定されていて、そのような  $\Delta t(\Delta r)$  の領域をスケールリング領域という。これは FX1 では  $\Delta t=20\sim 5000$ 、FX2 では  $\Delta t=30\sim 40000$ 、TRB では  $\Delta r=10\sim 70$  となった。

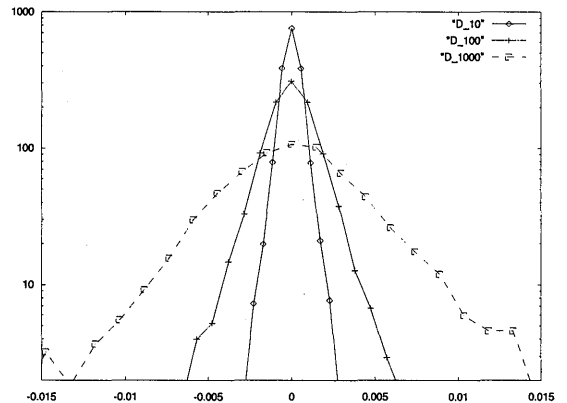


図 4： $\Delta t=10,100,1000$  に対する、価格変動  $\Delta X$  の確率密度分布（データは FX1）。 $\Delta t$  が大きくなるにつれ分布が広がっている。

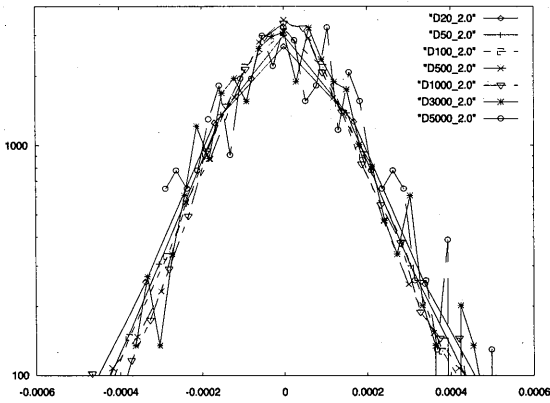


図 5 : スケール変換した FX1 の確率密度分布。  
 $\Delta t=20\sim 5000$  で重なっている。

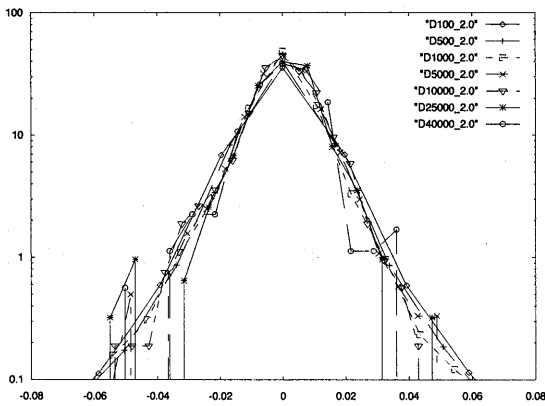


図 6 : スケール変換した FX2 の確率密度分布。  
 $\Delta t=30\sim 40000$  で重なっている。

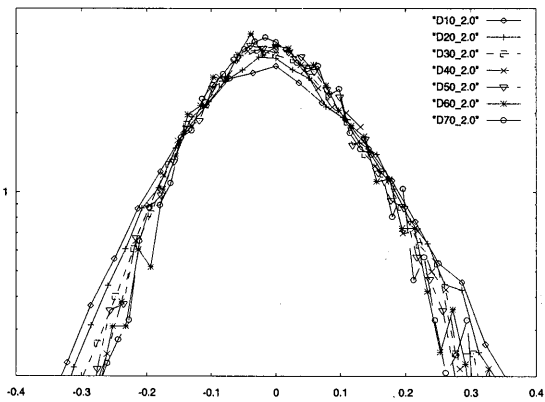


図 7 : スケール変換した TRB の確率密度分布。  
 $\Delta r=10\sim 70$  で重なっている。

### 3-2. 原点回帰率 : $P(0)$

スケーリング領域を確認するために、別の方法を用いる。そこで、(4)式において  $x=0$  とすると

次式が得られる。

$$P_{a,\beta}(0) = \tau^{1/a} P_{a,\beta}(0) \quad (6)$$

(6)式を両対数で表すとスケール不変な範囲において直線が現れる。このことからスケール変換で求めたスケーリング領域の確認をする。

図 8、9、10 に為替、乱流それぞれの  $P(0)$  のグラフを示す。この結果、FX1、FX2、TRB いずれもスケール変換で求めたスケーリング領域で直線が現れており、2つの方法で一致する結果となった。

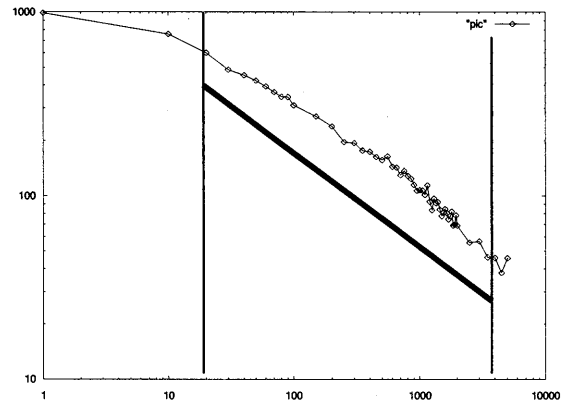


図 8 : FX1 の原点回帰率  $P(0)$  のグラフ。縦軸に  $P(0)$ 、横軸に  $\Delta t$  をとり両対数表示している。スケーリング領域  $\Delta t=20\sim 5000$  で直線が現れている。

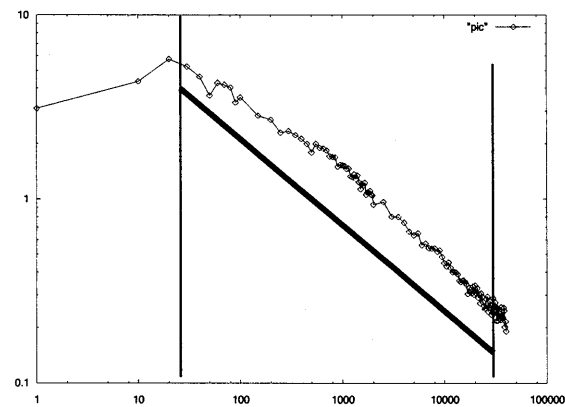


図 9 : FX2 の原点回帰率  $P(0)$  のグラフ。縦軸に  $P(0)$ 、横軸に  $\Delta t$  をとり両対数表示している。スケーリング領域  $\Delta t=30\sim 40000$  で直線が現れている。

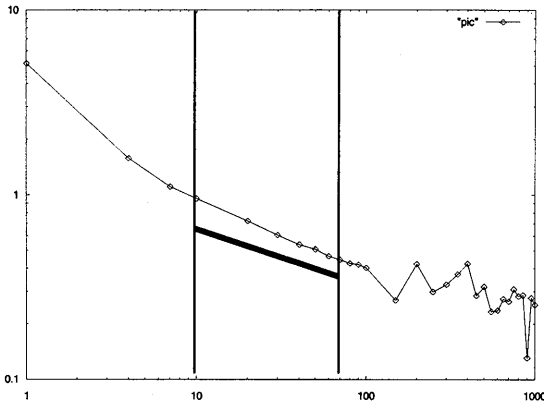


図 10 : TRB の原点回帰率  $P(0)$  のグラフ。縦軸に  $P(0)$ 、横軸に  $\Delta r$  をとり両対数表示している。スケーリング領域  $\Delta r=10\sim 70$  で直線があらわれている。

#### 4. モーメント

スケーリング領域が決まったので、為替と乱流のモーメントをそれぞれ計算し、(1)式、(2)式のスケーリング則が成り立つのかどうか、また、乱流と為替がどの程度類似しているのかについて調べる。

図 11、12、13 に FX1、FX2、TRB のモーメントを示す。これらのグラフから  $n$  が増えるにつれて傾きが大きくなっていることがわかる。これらのグラフからスケーリング領域での傾きを最小二乗法で求め、その結果を図 14、15、16 に示す。結果として、FX1 では指数  $\zeta_n$  が  $n < 3$  で直線  $n/3+0.7$  に従い、また同じ為替データである FX2 の指数  $\zeta_n$  も同様に  $n < 3$  で直線  $n/3+0.7$  に従っている。TRB では、指数  $\zeta_n$  が  $n < 3$  で直線  $n/3+0.3$  に従う結果となった。

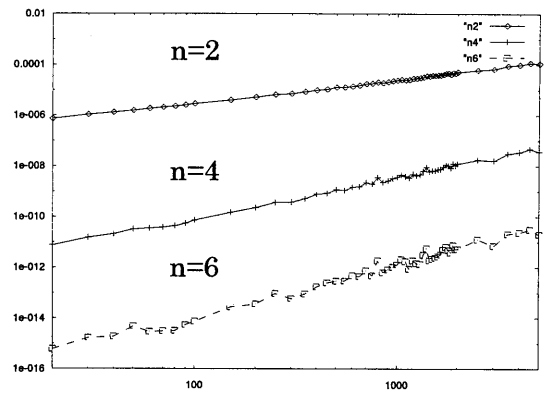


図 11 : FX1 のモーメントのグラフ。縦軸に  $\Delta x$  の  $n$  乗の平均、横軸に  $\Delta t$  をとり両対数表示している。

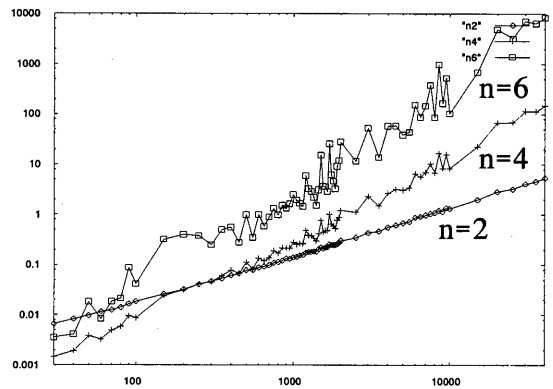


図 12 : FX2 のモーメントのグラフ。縦軸に  $\Delta x$  の  $n$  乗の平均、横軸に  $\Delta t$  をとり両対数表示している。

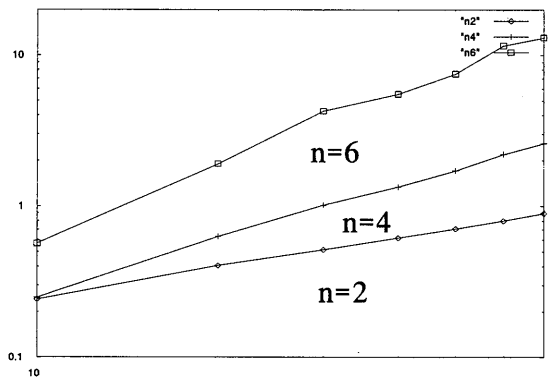


図 13 : TRB のモーメントのグラフ。縦軸に  $\Delta v$  の  $n$  乗の平均、横軸に  $\Delta r$  をとり両対数表示している。

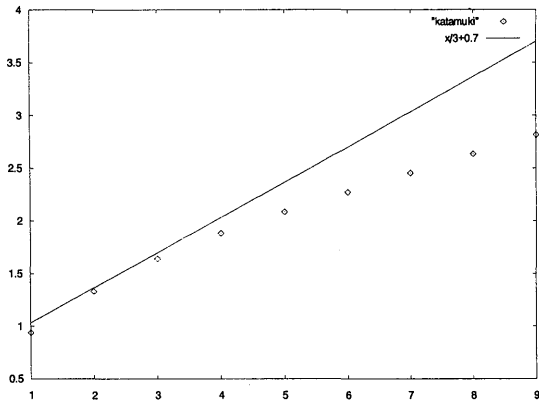


図 14 : FX1 の指数  $\xi_n$  のグラフ。縦軸に  $\xi_n$ 、横軸に  $n$  をとっている。点は指数  $\xi_n$  の値、直線は  $n/3+0.7$  を示している。指数  $\xi$  が  $n<3$  で直線に従っているのがわかる。

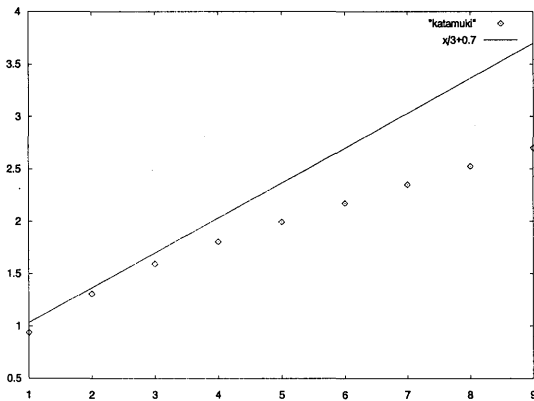


図 15 : FX2 の指数  $\xi$  のグラフ。縦軸に  $\xi_n$ 、横軸に  $n$  をとっている。点は指数  $\xi_n$  の値、直線は  $n/3+0.7$  を示している。FX1 と同様に指数  $\xi_n$  が  $n<3$  で直線に従っているのがわかる。

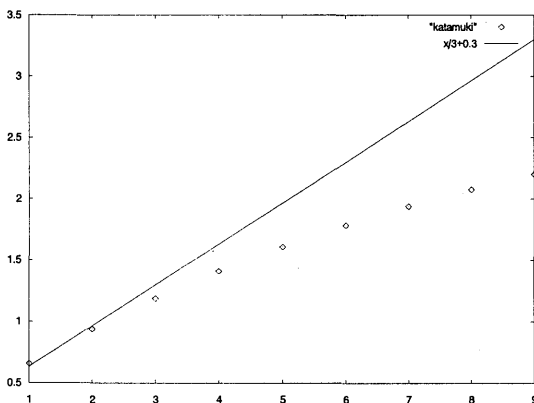


図 16 : TRB の指数  $\zeta_n$  のグラフ。縦軸に  $\zeta_n$ 、横軸に  $n$  をとっている。点は指数  $\zeta_n$  の値、直線は

$n/3+0.3$  を示している。指数  $\zeta_n$  が  $n<3$  で直線に従っているのがわかる。

### 5. ヴォラティリティから見る類似性

ここまで、確率密度分布、モーメントでの類似を確かめてきた。しかし、価格差と速度差のヴォラティリティを為替については  $\Delta t$  の関数(6)式、乱流については  $\Delta r$  の関数(7)式として求めることでパワー則が現れ、指数  $\nu$  と  $\mu$  が相違していることが指摘された[6]。

$$s(? t) = C(? t)^\nu \tag{7}$$

$$s(? r) = C(? r)^\mu \tag{8}$$

ここで  $C$  は比例定数、 $\sigma$  は以下に示す式である。

$$s(? t) = \sqrt{\langle ? x^2 \rangle - \langle ? x \rangle^2}$$

$$s(? r) = \sqrt{\langle ? v^2 \rangle - \langle ? v \rangle^2}$$

(7)式、(8)式のそれぞれの指数  $\nu$ 、 $\mu$  の値を最小二乗法で調べることで為替と乱流の相違点を調べる。図 17、18、19 にそれぞれの  $\sigma$  を示す。求めた指数  $\nu$  の値は、為替データ FX1、FX2 で 0.48 と統一した結果が得られた。しかし、乱流での指数  $\mu$  の値は 0.33 となり為替との類似は見られないことがわかった。

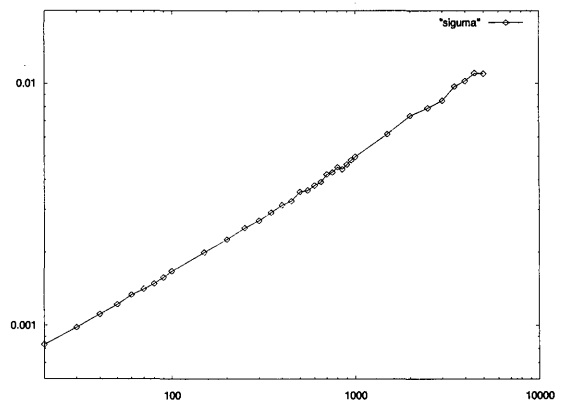


図 17 : FX1 でのヴォラティリティのパワー則。縦軸に  $\sigma(\Delta t)$ 、横軸に  $\Delta t$  をとり、両対数表示している。傾きは 0.48 となっている。

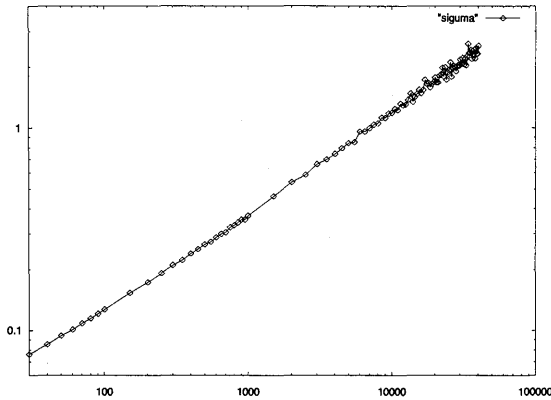


図 18 : FX2 でのヴォラティリティのパワー則。縦軸に  $\sigma(\Delta t)$ 、横軸に  $\Delta t$  をとり、両対数表示している。傾きは FX1 と同様に 0.48 となっている。

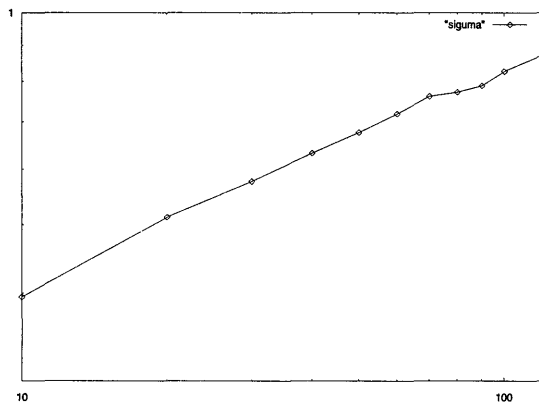


図 19 : TRB でのヴォラティリティのパワー則。縦軸に  $\sigma(\Delta r)$ 、横軸に  $\Delta r$  をとり、両対数表示している。傾きは 0.33 となっている。

## 6. 結論

本研究では外国為替と乱流の実データの統計的解析を行い、為替と乱流の類似性について調べてきた。初めに為替と乱流の確率密度分布を求め、それぞれがレヴィ分布でフィットできることが確かめられた。このことから確率密度分布では、為替と乱流が類似していることがわかった。

また、レヴィ分布でフィットできることからレヴィ分布の性質を用いてスケーリング領域を求め、その領域におけるモーメントの指数を比較し類似性を調べた。結果は、為替ではモーメントの指数  $\zeta_n$  が  $n < 3$  で直線  $n/3 + 0.7$  に従い、乱流ではモーメントの指数  $\zeta_n$  が  $n < 3$  で直線  $n/3 + 0.3$  に

従うことがわかった。これより、為替と乱流のモーメントの指数では傾き  $n/3$  に従うという点で類似しているが、切片においてずれが見られることがわかる。また、乱流ではコルモゴロフ理論との切片におけるずれも見られる。

さらに、それぞれのヴォラティリティを求めることで為替と乱流の類似性を調べた。ヴォラティリティのパワー則を調べた結果、為替では FX1、FX2 とともに指数  $\nu$  が 0.48 となり、乱流では指数  $\mu$  が 0.33 となった。このことから、ヴォラティリティのパワー則において為替と乱流は類似していないことがわかる。

ここまでのまとめとして、為替と乱流は確率密度分布やモーメントのように類似が見られる性質を持っているが、全く類似しない性質も持ち合わせている。

## 参考文献

- [1] Benoit B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, New York, 1977, 邦訳 広中平祐, "フラクタル幾何学", 日本経済新聞社, 1985
- [2] Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley, "Scaling behavior in the dynamics of an economic index", NATURE, vol. 376, pp.46-49, 1995
- [3] S. Gashghaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner & Y. Dodge, "Turbulent cascades in foreign exchange markets", NATURE, vol. 381, pp.767-770, 1996
- [4] A.N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscos fluid for very large Reynolds number", Dokl. Acad. Nauk, SSSR, 30, 9-13, 1941
- [5] Mieko Tanaka-Yamawaki, Tsuyoshi Itabashi, and Shinya Komaki, "Does Information Flow in High-frequency Financial Data as Energy Does in

- Turbulence”, Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Symposium on Artificial Life and Robotics, 1, pp.78-81, 2002
- [6] Rosario N. Mantegna, H.Eugene Stanley, “An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance”, Cambridge University Press, 2000, 邦訳, 中嶋真澄, “経済物理学入門—ファイナンスにおける相関と複雑性—”, エコノミスト社, 2000, 第11章
- [7] 板橋 毅, “乱流、為替における統計的解析”, 平成13年度卒業論文(宮崎大学工学部), 2002年3月
- [8] 板橋 毅, “為替と乱流をつなぐスケーリング則”, 宮崎大学工学部紀要第31号 pp.361-366, 2002年3月
- [9] Mieko Tanaka-Yamawaki and Tsuyoshi Itabashi and Hiromori Miyagi, “On the Similarity Between Price Fluctuation and Turbulence”, Technical report of IEICE, NLP 2001-113(2002-3), pp.7-11, 2002
- [10] Mieko Tanaka-Yamawaki and Tsuyoshi Itabashi, “Scaling Property of Foreign Exchange Market and Its Relation to Turbulence”, Proceedings of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, Xi'an, PRC, October 7-11, 2002, pp.423-426
- [11] Mieko Tanaka-Yamawaki and Tsuyoshi Itabashi, “Scaling Law in Common to Turbulence and Price Fluctuations”, Proc. of The Eighth Int. Symp. on Artificial Life and Robotics (AROB8th '03), Beppu, Oita, Japan, 24-26 January, 2003, pp.70-73
- [12] Mieko Tanaka-Yamawaki and Tsuyoshi Itabashi, “Statistical Property of High Frequency Price Fluctuations”, 日本機械学  
界第12回インテリジェント・システム・シンポジウム: Fuzzy, Artificial Intelligence, Neural Networks and Computational Intelligence (FAN Symposium'02 in Saga) 講演論文集(2002年11月21-22日, 佐賀) pp.279-283