

誘電率推定問題における Born 近似法の比較・検討

宮野裕一¹⁾・横田 光広²⁾

Comparison and Examination on a Dielectric Constant Estimation by Using Born Approximations

Yuichi MIYANO, Mitsuhiro YOKOTA

Abstract

The accuracy of the reconstruction algorithm of estimating the relative permittivity of a dielectric cylinder using the extended technique of the Born approximation is examined in this report. The integral equation is solved by method of moment. Born approximation and its related various approximate methods such as the Iterative Born approximation, the Extended Born approximation, and Distorted Born approximation are applied in order to determine relative permittivity of a cylinder. Numerical simulations are performed for a dielectric cylinder to show the reconstruction accuracy. From the numerical results, the Distorted Born approximation is efficient for the case of this report.

Keywords: Iterative Born approximation, Extended Born approximation, Distorted Born approximation, Method of Moments

1. まえがき

リモートセンシング、医学、地球科学などの分野において、誘電率や透磁率などの電気特性、形状などを非破壊的に計測することは大変重要である。この問題は、逆散乱問題として知られており、数理的に厳密な解を求めることは容易ではない。電磁波逆散乱問題では、しばしば、積分方程式が用いられているが、この方程式は非線形方程式であるため、多くの近似解法が提案されている。背景媒質の屈折率が物体のそれとほとんど同じ場合の解法として Born 近似が用いられている。この手法を改良した手法として反復 Born 近似法¹⁾、拡張 Born 近似^{2),3)}、Distorted Born 近似法⁴⁾ などがある。

本報告では物体に電磁波を照射し、その散乱電磁波を測定することによって物体の誘電率を推定する問題を数値的に検討している。誘電率測定には、取り扱いの容易な手法の1つである反復 Born 近似法を用い、木材中の節あるいは空隙の存在がどの程度推定できるかについて、検討している。なお、本報告では、柱軸方向に一様な2次元問題として取り扱っている。

2. 定式化

2次元問題の場合、散乱電界の満たすべき積分方程式は次のようになる。

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc} + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (1)$$

式(1)より、散乱電界は次式となる。

$$E^{sc}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2)$$

ここで $E^{sc}(\mathbf{r})$ は既知の散乱電界、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ はグリーン関数、 $E(\mathbf{r}')$ は領域 D の全電界を表している。 $o(\mathbf{r}')$ は物体関数で $o(\mathbf{r}') = k_0^2[\epsilon_r(\mathbf{r}') - \epsilon_r^b]$ で与えられ k_0^2 は自由空間での波数、 ϵ_r は散乱体の複素比誘電率、 ϵ_r^b は背景媒質の複素比誘電率である。

式(1)の被積分項にある物体関数 $o(\mathbf{r}')$ と全電界 $E(\mathbf{r}')$ の二つが未知となり、何らかの近似を用いて物体関数を求める必要がある。以下では、Born 近似および関連する手法について、簡単にまとめる。

2.1 Born 近似

よく知られている近似として、散乱体内部の全電界を入射電界で近似する。これを Born 近似と呼ぶ。

$$E^{sc}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E^{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3)$$

この近似は散乱体の比誘電率が背景媒質のそれと非常に近い場合に有効な近似であることが知られている。散乱体の比誘電率が大きい場合、Born 近似の適用範囲を広げる手法の1つとして、次の反復 Born 近似が提案されている。

2.2 反復 Born 近似¹⁾

Moghaddam と Chew は時間領域データを用いて反復 Born 近似法を提案している。送受信系の座標を図1に示す。

R は受信機 ($m = 1, \dots, M$)、 $T(l = 1, \dots, L)$ は送信機を示す。以下は反復 Born 近似のアルゴリズムである。

まず、物体内部の全電界を Born 近似を用いて入射電界で近似すると、観測点 \mathbf{r}_m での散乱電界は以下で与えられる。

$$E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = \int_D G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') E^{inc}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (4)$$

¹⁾ 電気電子工学専攻大学院生

²⁾ 電気電子工学科教授

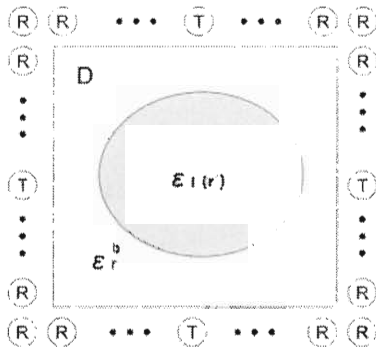


図1. 逆散乱問題における送受信系の座標系

ここで散乱データを $E^{sc}(\mathbf{r})$ に代入すると、物体関数だけが未知となりこの方程式は解くことが可能となる。本報告では、この物体関数を特異値分解法を用いて最小二乗近似解として解いている。次に式 (3) を以下のように変形する。

$$E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = -\frac{j}{4} k^2 \sum_{n=1}^N E_n^{inc}([\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \varepsilon_r^b]) \int_{cell} H_0^{(2)}(k_0 \rho) dx' dy' \quad (5)$$

ここで $\rho = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ である。式 (5) の積分計算は Richmond 近似を用いて、各セルを十分小さくとり四角いセルを半径 a_n とする同じ面積の円に置きなおすことで積分変数をセルの縦と横 dx', dy' から半径 ρ' と角度 ϕ' に置き換えることができる⁵⁾。以上より、式 (5) は次の行列方程式に帰着させることができる。

$$\sum_{n=1}^N C_{mn}([\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \varepsilon_r^b]) = E^{sc}(\mathbf{r}_m, \rho_l) \quad (6)$$

$$C_{mn} = -j \frac{\pi a_n k_0}{2} E_n^{inc}(\mathbf{r}') J_1(k_0 a_n) H_0^{(2)}(k_0 \rho_{mn}) \quad (7)$$

である。

次に得られた近似物体関数 $\bar{o}(\mathbf{r}')$ を式 (1) に代入する。

$$E(\mathbf{r}) = E^{inc}(\mathbf{r}) + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{o}(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (8)$$

このとき物体内部を含む観測領域 D の全電界 $E^{(1)}(\mathbf{r})$ を GMRES 法を用いて求める。全電界 $E^{(1)}(\mathbf{r})$ を用いて、

$$\bar{E}^{sc(1)}(\mathbf{r}_m, \rho_l) = \int_D G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \bar{o}(\mathbf{r}') \bar{E}^{(1)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (9)$$

観測点 $(\mathbf{r}_m, m = 1, \dots, M)$ での散乱電界を計算する。

観測点 $(\mathbf{r}_m, m = 1, \dots, M)$ において、測定データと計算で求めた散乱界を収束条件と比較する。収束条件を満足している場合は計算を終了。そうでない場合は、全電界 E と入射電界 E^{inc} を入れ替えて、計算を継続する。

2.3 拡張 Born 近似²⁾³⁾

式 (1) の積分項に含まれるグリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は特異性を持っている。すなわち、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ において無限大となる。 \mathbf{r} が散乱体内部にあれば、式 (1) の積分は $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ 近傍が大きく寄与することになる。そこで、物体内部の全電界 $E(\mathbf{r}')$ を \mathbf{r} での値 $E(\mathbf{r})$ で近似する。ただし、 \mathbf{r} は物体内部の点とする。積分方程式は

$$E(\mathbf{r}) \sim E^{inc}(\mathbf{r}) + \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[1 - \int_D G(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') o(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right]^{-1} E^{inc}(\mathbf{r}') o(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (10)$$

となる。

2.4 変形拡張 Born 近似⁶⁾

前に述べた拡張 Born 近似の式 (10) の一部を次のように定義する。

$$q(\mathbf{r}) \equiv o(\mathbf{r}) \left[1 - \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1} \quad (11)$$

この $q(\mathbf{r})$ を仮想的物体関数と呼ぶことにする。この式 (11) を変形し

$$o(\mathbf{r}) + q(\mathbf{r}) \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') o(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = q(\mathbf{r}) \quad (12)$$

を得る。この積分方程式を解き、 $o(\mathbf{r})$ の近似解が求めれば、 $o(\mathbf{r}) = k_0^2 [\varepsilon_r(\mathbf{r}) - \varepsilon_r^b]$ より誘電率分布が決定できる。

2.5 歪み Born 近似⁴⁾

これまで用いている積分方程式におけるグリーン関数は自由空間での表現を用いている。不均質媒質の場合、その媒質におけるグリーン関数を用いる方法が提案されている。特徴として、反復 Born 近似は雑音に対する許容度が高いが、歪み Born 近似は収束が早い点が挙げられる。

散乱データから物体関数を求める逆散乱問題では次式を解くことになる。

$$E^{sc}(\mathbf{r}) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon_r^b) \bar{o}(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (13)$$

歪み Born 近似は以下のアルゴリズムで構成されている。

1. 比誘電率が 1 とした自由空間中でのグリーン関数を初期値として、Born 近似を用いて逆散乱問題により求める。 r_l に線波源を配置した場合の r_m での散乱電界は式 (13) より、以下の式のようになりこれから近似物体関数 $\bar{o}^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l)$ を求める。

$$E^{sc}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_l) = \int_D G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', 1; \mathbf{r}_l) \bar{o}(\mathbf{r}') E^{inc}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l) d\mathbf{r}' \quad (14)$$

- 得られた物体関数を用いて、物体内および観測点での散乱電界をモーメント法により求める。ここで、グリーン関数は自由空間のものを用いる事に注意する。得られる物体内部での近似電界を $E^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l)$ とする。これを用いて、観測点での近似散乱界 $E^{sc(1)}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_l)$ を計算する。
- 次にグリーン関数を更新する。観測点 $\mathbf{r}_m (m = 1 \sim M)$ に線波源を置き、ステップ1で求めた比誘電率と背景媒質で決まる物体関数を用いて、各セルでの全電界を求める。ただし、ここでもグリーン関数は自由空間のものを用いる事である。求められた物体内部の全電界 $E(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_m)$ を新しいグリーン関数 $G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \epsilon_r^{b(1)}; \mathbf{r}_m) (m = 1, \dots, M)$ とする。積分方程式を解くときに、波源を観測点 \mathbf{r}_m に置いているので、間接的に観測点 \mathbf{r}_m の関数とみなすことが出来る。
- ステップ2で求めた新しいグリーン関数と電界を積分方程式に代入し散乱界を求める。この散乱界と観測散乱界の差を取り、逆散乱問題により、物体関数の修正量を求め、以前に求めていた物体関数を補正する。

$$\begin{aligned} E^{sc}(\mathbf{r}_m; \mathbf{r}_l) - \int_D G_m(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}', \epsilon_r^{b(1)}; \mathbf{r}_l) \bar{\delta}^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l) E^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l) d\mathbf{r}' \\ = \int_D G_m(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}', \epsilon_r^{b(1)}; \mathbf{r}_l) \delta \bar{\delta}^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l) E^{(1)}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_l) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (15)$$

物体関数の補正 $\bar{\delta}^{(2)}(\mathbf{r}') = \bar{\delta}^{(1)}(\mathbf{r}') + \delta \bar{\delta}^{(1)}(\mathbf{r}')$

- 得られた新しい物体関数を用いてステップ2を繰り返す。ここで得られる散乱界を観測散乱界の残差が収束判別式を満たす場合、反復を終了する。

2.6 収束判別式

次式で定義される相対誤差 **RRE** の収束判定条件 δ が満足される時、反復を終了する。

$$\mathbf{RRE} = \frac{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M |E^{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E^{sc(l)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2}{\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M |E^{sc}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2} < \delta \quad (16)$$

3. シミュレーション結果

本節では、反復 Born 近似、拡張 Born 近似、変形拡張 Born 近似、歪み Born 近似の4つの手法を用いて計算しその結果の比較・検討を行う。波長を $\lambda = 1.55[\mu\text{m}]$ とし、図2に示すように観測領域は 4λ 、入射点および観測点は観測領域中心から 4λ 離れた位置に交互に 9° おきに配置、セルの大きさは $\lambda/40$ の正方形とした。また、背景媒質の誘電率を $\epsilon_r^b = 1.0$ とし、入射波は電界強度 $|E_z| = 1$ の線波源とする。判定条件は $\delta = 10^{-8}$ に設定している。

3.1 半径を変化させた場合

本節では半径別の結果を得るために、誘電率を 1.1 に固定している。図3を見ると、4手法の結果ともあまり違いは見

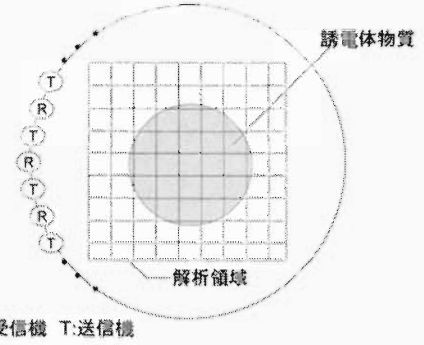


図2. 観測領域

られないが、「拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似」は「反復 Born 近似と歪み Born 近似」と比較してやや色が濃く、推定した誘電率の数値が低いことがわかる。詳細に比較するた

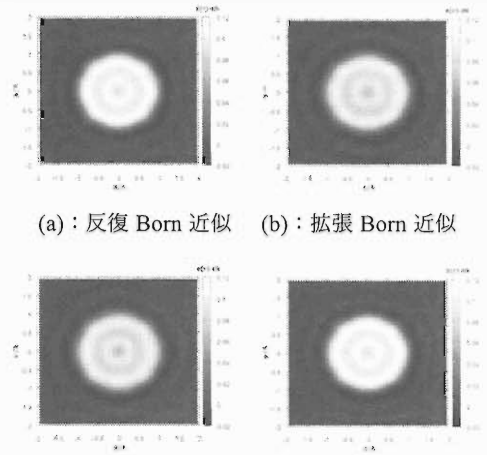


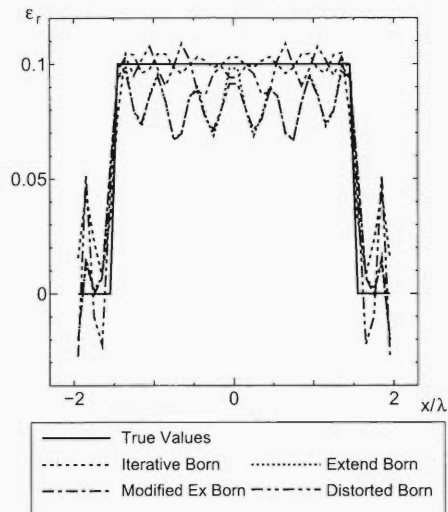
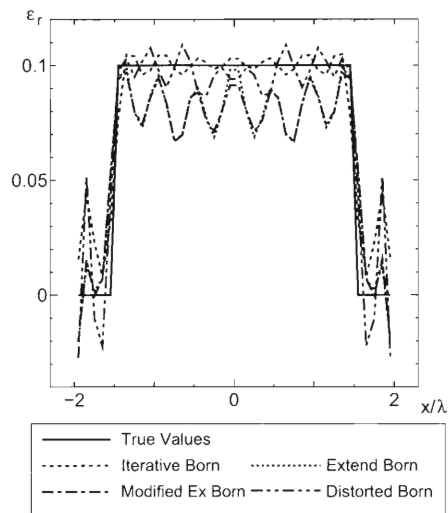
図3. 半径 $a = 1\lambda$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 1.1$ での結果

め、図4は図3を $y/\lambda = 0$ での断面図を4手法で比較した図である。この図で比較すると、やはり「拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似」が「反復 Born 近似と歪み Born 近似」に比べ、誘電体部分で数値が低く、真値とも最大 0.036 の差があり、シミュレーション精度が低いことがわかる。

この結果も半径 1λ のときと同様に、 $y/\lambda = 0$ での断面図で比較する。「反復 Born 近似と歪み Born 近似」は正確に真値付近を推定できているのに対して、「拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似」は真値に到達しておらず、真値のやや下で推定している。真値との差は最大で 0.034 程見られた。半径を変えた場合も、この2つの手法の方がシミュレーション精度が低いことがわかった。

3.2 比誘電率を変化させた場合

本節では誘電率を変化させて、それぞれの手法の精度・性能を比較する。ここでは推定対象に誘電率 $\epsilon_r = 1.3$ 、半径 1λ のものを選んでみる。図6を見ると、反復 Born 近似につい

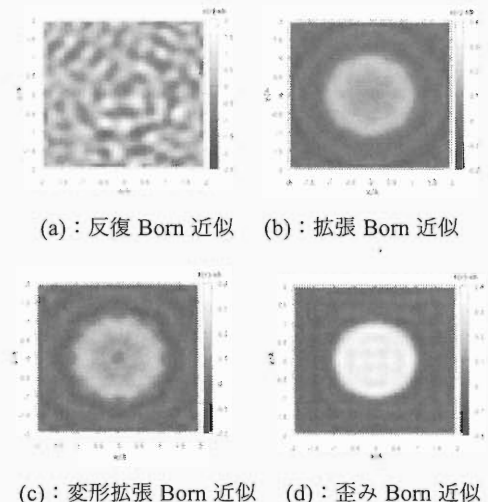
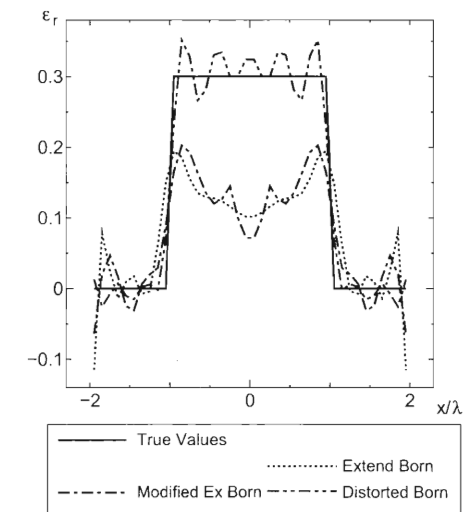
図4. 半径 $a = 1\lambda$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 1.1$ での断面図図5. 半径 $a = 1.5\lambda$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 1.1$ での断面図

ては結果が得られなかった。拡張 Born 近似とトモグラフィは誘電体の形状は推定できているが、色が濃く誘電率までは推定できていないことがわかる。歪み Born 近似のみ誘電率、形状ともに推定できている。

図7は誘電率 $\epsilon_r = 1.3$ の場合の断面図である。反復 Born 近似の結果については省いている。この断面図を見ると、拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似は最大で0.2程度までしか推定できておらず、シミュレーション精度は低い。一方、歪み Born 近似は真値付近で推定できており、4手法の中で最もシミュレーション精度が高いことがわかる。

3.3 誘電体内部に別の誘電体が存在する場合

本節では誘電体内部に別の誘電体が存在する場合について検証する。具体的な誘電体分布としてはまず誘電率1.1、半径1λの物体の中心に誘電率1.3、半径0.5λの物体が存在し

図6. 半径 $a = 1\lambda$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 1.3$ での結果図7. 半径 $a = 1\lambda$ 、比誘電率 $\epsilon_r = 1.3$ での断面図

ているものとする。この物体を推定した結果が図8となる。4つの結果を比較すると、どの手法を用いた場合も誘電体の外部、内部ともに形状をはっきり確認することができる。しかし「拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似」では内部の誘電体部分の色が濃く、推定した数値が低いことがわかる。

断面図で比較すると、外部の誘電体ではどの手法も比較的正確に推定できているが、内部の推定では「拡張 Born 近似と変形拡張 Born 近似」で真値に大きな差があり、最大で0.2までしか推定できていない。一方、「反復 Born 近似と歪み Born 近似」ではやや波打っているが、内部の誘電率も推定できている。

3.4 計算時間と相対誤差

本節では各手法の計算時間や相対誤差の観点から比較・検討を行う。全ての手法において、収束判定条件を $\delta = 10^{-8}$ とし、最大反復回数を100回と設定している。

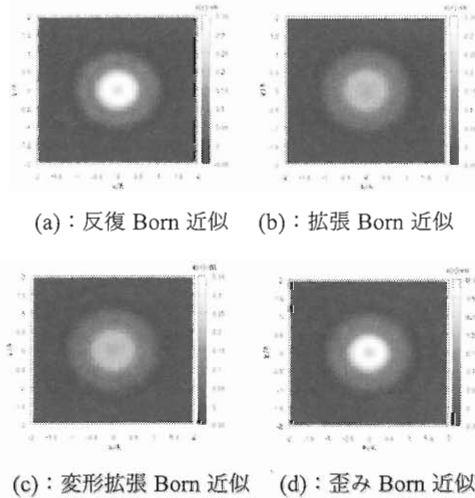


図 8. 誘電体内部に別の誘電体が存在する場合の結果

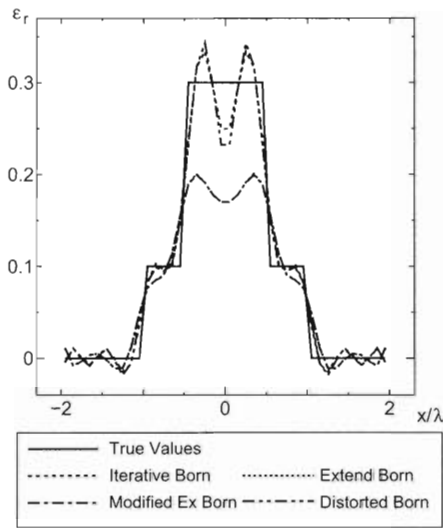


図 9. 誘電体内部に別の誘電体が存在する場合の断面図

本研究では、シミュレーションの終了条件として相対誤差による終了のほか、過去 3 回分の相対誤差の変化量が連続で $\pm 1/1000$ 以下となった場合、相対誤差がこれ以上の変化が起きない状態に陥ったと判断し終了させる条件を組み込んでいる。

表 1 は各手法の計算時間と計算終了時の相対誤差である。まず、相対誤差の変化量が少なくなり強制終了となった場合が多いことがわかる。今回使用した収束判定条件 $\delta = 10^{-8}$ では厳しいと思われるため、 $\delta = 10^{-5}$ 程度にすれば推定結果を現状に維持しつつ、計算時間を短縮できると考えられる。また、反復 Born 近似は推定対象によって計算時間にばらつきがあり、非常に動作が不安定である。一方、変形拡張 Born 近似と歪み Born 近似は比較的反复回数、計算時間、相対誤差のばらつきが少なく安定している。特に歪み Born 近似については、反復 Born 近似よりも速い時間で精度の良いシミュレーションを行える場合もあり、全体を通して非常に優秀で

表 1. 計算時間と相対誤差

	反復Born近似		
	反復回数	相対誤差	計算時間 (s)
$\epsilon_r=1.1, a=1.0\lambda$	24回	3.44111×10^{-9}	188.964
$\epsilon_r=1.1, a=1.5\lambda$	55回	3.05011×10^{-6}	500.498
$\epsilon_r=1.3, a=1.0\lambda$	100回	3.0982078	4510.457
内部に別誘電体	50回	9.62753×10^{-9}	510.217
	拡張Born近似		
	反復回数	相対誤差	計算時間 (s)
$\epsilon_r=1.1, a=1.0\lambda$	1回	4.15333×10^{-7}	24.913
$\epsilon_r=1.1, a=1.5\lambda$	1回	2.56010×10^{-7}	25.179
$\epsilon_r=1.3, a=1.0\lambda$	1回	6.56663×10^{-6}	26.052
内部に別誘電体	1回	4.16598×10^{-7}	26.380
	変形拡張Born近似		
	反復回数	相対誤差	計算時間 (s)
$\epsilon_r=1.1, a=1.0\lambda$	11回	1.36972×10^{-2}	367.480
$\epsilon_r=1.1, a=1.5\lambda$	13回	1.06450×10^{-2}	379.909
$\epsilon_r=1.3, a=1.0\lambda$	17回	0.1414699	451.388
内部に別誘電体	17回	4.6989×10^{-2}	452.044
	歪みBorn近似		
	反復回数	相対誤差	計算時間 (s)
$\epsilon_r=1.1, a=1.0\lambda$	31回	4.89253×10^{-8}	348.101
$\epsilon_r=1.1, a=1.5\lambda$	28回	1.31567×10^{-5}	411.796
$\epsilon_r=1.3, a=1.0\lambda$	28回	1.65599×10^{-6}	538.609
内部に別誘電体	29回	2.75596×10^{-7}	398.910

あるといえる。

4. まとめ

本報告では誘電率逆散乱問題に対して Born 近似を基本とした拡張手法である反復 Born 近似、拡張 Born 近似、変形拡張 Born 近似、歪み Born 近似の 4 手法を用い、誘電率分布の推定を行いその結果について比較・検討した。いずれの手法も物体の誘電率と背景媒質の誘電率の差が小さい場合に有効な Born 近似を基本とした方法であるため、物体の誘電率と背景媒質の誘電率が近いほうが精度の良い結果が得られた。また、4 手法によるシミュレーション結果を比較すると、本報告の構造では歪み Born 近似が最も優れた手法であることを示した。しかし、拡張 Born 近似とほとんど同じ結果であるが、収束までの時間が遅い変形拡張 Born 近似は今後改良をしていかなければならない。

今後の課題として、現時点で最も誘電率の適用範囲が広い歪み Born 近似を中心にさらに推定できる誘電率の範囲を拡大すること、変形拡張 Born 近似を改良することが挙げられる。

参考文献

- 1) M. Moghaddam and W. C. Chew: IEEE Trans. Antennas Propag., **41**, 2, 177-184, 1993.
- 2) T. M. Habashy, R. W. Groom and B. Spies: J. Geophys. Res., **98**, B2, 1759-1775, 1993.

- 3) Z. Q. Zhang and Q. H. Liu: IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **39**, 4, 710-716, 2001.
- 4) W. C. Chew and Y. M. Wang: IEEE TRans. Med. Imaging, **9**, 2, 218-225, 1990.
- 5) A. Ishimaru: Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering, Prentice Hall 1991.
- 6) C. Zhou and L. Liu: IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing, **38**, 404-415, 2000.