

多層周期構造における有効誘電率の数値的検討

松元 和正¹⁾ · 横田 光広²⁾

Numerical Examination on Effective Permittivity of Multilayered Periodic Structures

Kazumasa MATSUMOTO, Mitsuhiro YOKOTA

Abstract

The effective permittivity of the two-dimensional multilayered periodic structures is examined numerically and theoretically. The original periodic structure is replaced with the simple structure such as the dielectric slab. By using reflectance of the periodic structure obtained by the FDTD method, the effective permittivity of the dielectric slab, which has the same reflectance as that of periodic structure, is obtained by using the transcendental equation. Also, the effective permittivity of the periodic laminated structure is calculated theoretically. In order to reduce the procedure to obtain the effective permittivity of the multilayered periodic structures, the reflectance is estimated by using the reflectance from one-layered structure. The range of the application and validity of this procedure is examined.

Keywords: Effective permittivity, Periodic structure, FDTD method

1. まえがき

周期構造における電磁波の散乱問題は電磁界解析の分野において基礎的かつ重要な問題の1つであり、理論的及び数値的な観点から数多くの研究がなされている¹⁾。これまで、周期構造からの散乱特性を解析する手法が提案されているが、これらの手法では複雑な計算や特殊関数などを用いており、取り扱いが必ずしも容易であるとは限らない。そこで、周期構造の等価的な誘電率を求める手法が提案されている^{2)–4)}。

本論文では文献³⁾の手法を参考にして、まず単層周期構造における有効誘電率をFDTD法により求め、単層周期構造をこの有効誘電率を持つ誘電体スラブ（以降、有効誘電膜と呼ぶ。）に置きかえる。その後、多層周期構造を同じ層数を持つ有効誘電膜で置きかえ多層化する。多層周期構造及び多層誘電膜の反射特性を比較し、有効誘電率を用いた多層周期構造の近似の有効性と適用範囲について検討する。また、有効誘電率を精度良く求めるために単層の有効誘電膜を多層化する場合について提案する。

2. 定式化

図1に示す2次元多層誘電膜を考える。この多層誘電膜にz軸に垂直な電界成分を持つE波(E_z, H_x, H_y)が入射角 θ_{in} で入射する場合を考える。1層目の進行波 a_1 と反射波 b_1 は、次層の a_2, b_2 と次式の関係がある⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{k_{x2}}{k_{x1}}\right) e^{jk_{x2}d_2} & \left(1 - \frac{k_{x2}}{k_{x1}}\right) e^{-jk_{x2}d_2} \\ \left(1 - \frac{k_{x2}}{k_{x1}}\right) e^{jk_{x2}d_2} & \left(1 + \frac{k_{x2}}{k_{x1}}\right) e^{-jk_{x2}d_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

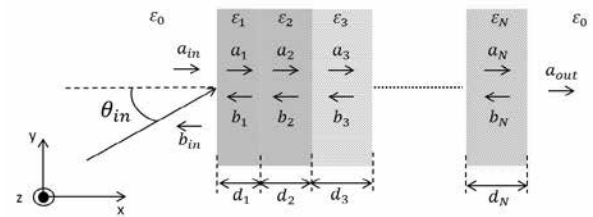


図1 多層誘電膜

ここで k_{xi} は*i*層目における*x*方向の波数であり、光速を*c*、角周波数を ω とすると

$$k_{xi} = \frac{\sqrt{\epsilon_i} \omega}{c} \cos \theta_i \quad (2)$$

となる。多層膜全体で上式と同様の手法を繰り返し適用すると

$$\begin{bmatrix} a_{in} \\ b_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{out} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

が得られる。このとき、反射率 R_{slab} は次式のようにになる。

$$R_{slab} = \left(\frac{c_0}{a_0} \right)^2 \quad (4)$$

1次元周期構造を比誘電率 ϵ_r の単層誘電膜に置き換えた場合、単層誘電膜の有効誘電率は両者の反射率が等しくなるように決定される。即ち、

$$f(\epsilon_r) = R_{slab}(\epsilon_r) - R_{FDTD} = 0 \quad (5)$$

を満たす誘電膜の比誘電率 ϵ_r を有効誘電率 ϵ_{eff} として取り出す。ここで R_{FDTD} はFDTD法を用いて計算された、オリジナルの1次元周期構造における反射率である。

¹⁾ 電気電子工学専攻大学院生

²⁾ 工学教育研究部教授

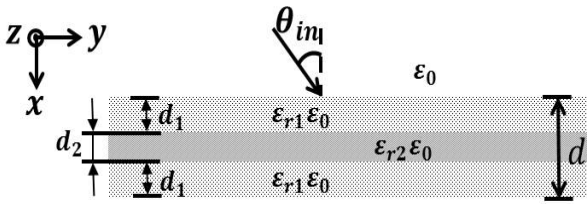


図2 3層膜近似

本論文では、有効誘電率を精度良く求めるため、単層の有効誘電膜を図2に示す3層誘電膜で置き換える。このとき、有効誘電率 ϵ_{r1} 及び ϵ_{r2} は次式の超越方程式を解くことにより求める。

$$f(\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}) = R_{slab}(\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}) - R_{FDTD} = 0 \quad (6)$$

を満たす誘電膜の比誘電率 ϵ_{r1} 及び ϵ_{r2} を、それぞれ有効誘電率 ϵ_{eff1} 及び ϵ_{eff2} として取り出す。ここで、 ϵ_{r1} と d_1 はそれぞれ3層膜の外側の層の比誘電率と膜厚を表し、 ϵ_{r2} と d_2 はそれぞれ3層膜の内側の層の比誘電率と膜厚を表している。

3. 数値計算結果

本研究では、正方柱、または、円柱で構成された多層周期構造について検討を行う。これらの周期構造を有効誘電膜に置き換える際には、1次元周期構造を単層膜により近似するモデル³⁾と、3層膜により近似するモデルの2つのモデルを用いている。入射波はガウスパルスを用いており、構造に対して垂直に入射している。またFDTD法で解析する際には、周期的境界条件とPML吸収境界条件を適用している。

3.1 正方柱周期構造

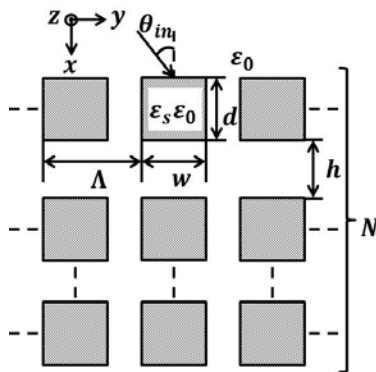


図3 多層正方柱周期構造

本項では図3に示す正方柱周期構造に対する数値計算結果を示す。 N は周期構造の層数、 $\Lambda = 1.0\mu\text{m}$ は周期であり、 $h = 0.5\Lambda$ は周期構造の間隔である。また正方柱は $\epsilon_s = 2.0$ の比誘電率を持ち、その厚さ及び幅は $d = w = 0.5\Lambda$ である。近似層の厚さは正方柱の厚さ d と等しくしている。

3.1.1 有効誘電率

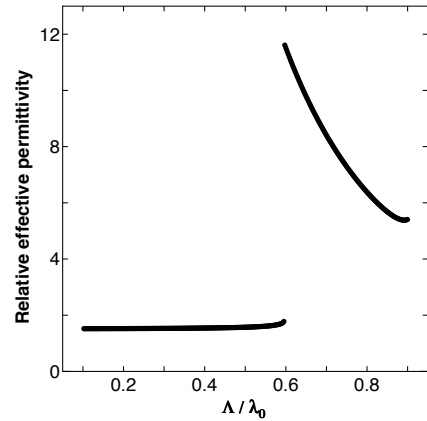
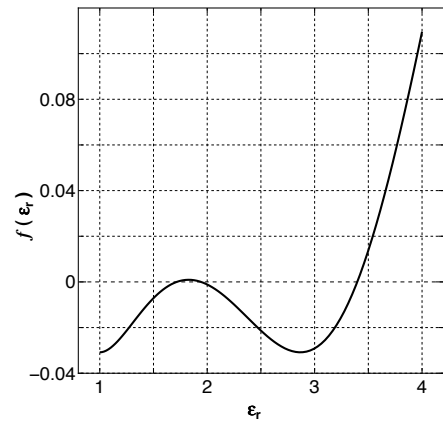
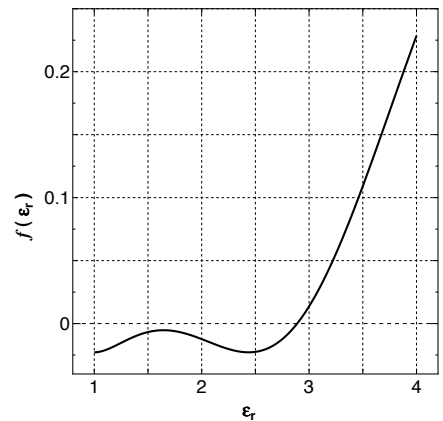


図4 単層正方柱周期構造に対する単層膜近似モデルの有効誘電率



(a) $\Lambda/\lambda_0 = 0.5906$



(b) $\Lambda/\lambda_0 = 0.6406$

図5 単層膜近似モデルにおける不連続点前後の解の変化

図4は $N = 1$ の単層周期構造における単層膜近似モデルの有効誘電率である。横軸の Λ/λ_0 は規格化周波数である。この図から単層膜近似モデルの有効誘電率は、規格化周波数

$\Lambda/\lambda_0 = 0.6$ 付近で不連続となっていることが確認できる。図 5 は単層近似モデルにおける不連続点 $\Lambda/\lambda_0 = 0.6$ 前後の超越方程式 (5) の解の変化を表している。図の横軸は近似単層膜の比誘電率 ϵ_r であり、縦軸は超越方程式 (5) の f である。図 4 から、 $\Lambda/\lambda_0 < 0.6$ では誘電膜比誘電率 $\epsilon_r = 2.0$ 付近で解 ϵ_{eff} が得られているが、 $\Lambda/\lambda_0 > 0.6$ となると $\epsilon_r = 2.0$ 付近には解が存在しなくなるため、有効誘電率が不連続になったものと考えられる。

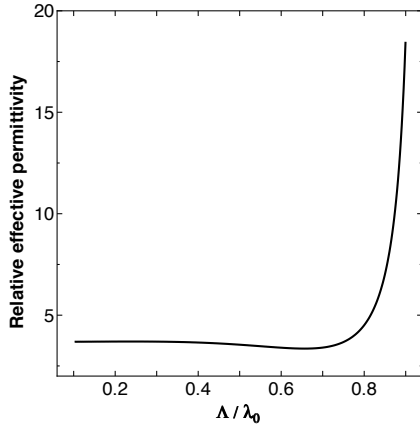


図 6 単層正方柱周期構造に対する 3 層膜近似モデルの内層有効誘電率

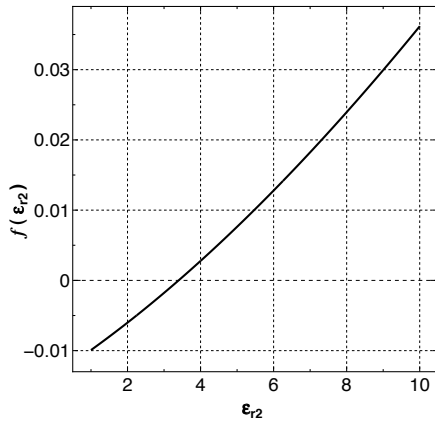


図 7 3 層膜近似モデルにおける $\Lambda/\lambda_0 = 0.5997$ での解の変化

図 6 は $N = 1$ の単層周期構造における 3 層膜近似モデルの内層有効誘電率 ϵ_{eff2} を表している。外層の厚さ d_1 と有効誘電率 ϵ_{eff1} は両側とも等しくしており、外層有効誘電率は ϵ_{eff2} が $\Lambda/\lambda_0 < 0.6$ の低周波域でほぼ一定となるような値 $\epsilon_{eff1} = 1.476$ に固定している。また外層の厚さ d_1 と内層の厚さ d_2 の比は $d_1 : d_2 = 49 : 2$ とし、3 層膜全体の厚さは正方柱の厚さ d と等しくしている。また図 7 は 3 層膜近似モデルにおける $\Lambda/\lambda_0 = 0.5997$ での解の変化を表している。図の横軸は近似 3 層膜の内層比誘電率 ϵ_{r2} である。これらの図から 3 層膜近似では膜厚が薄くなるため、式 (1) の指数関数に

よる振動が抑えられることにより不連続性が解消されることが確認できる。

3.1.2 反射率比較

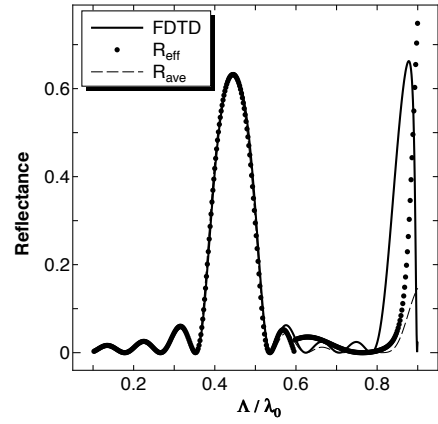


図 8 5 層正方柱周期構造に対する単層膜近似モデルの反射率比較

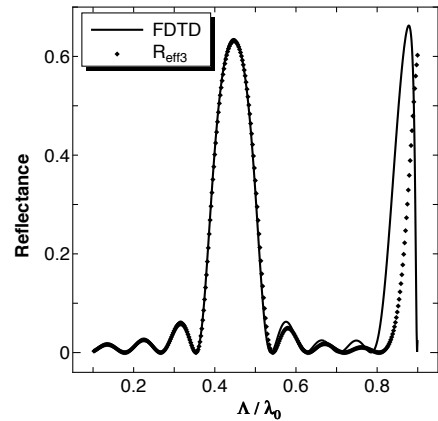


図 9 5 層正方柱周期構造に対する 3 層膜近似モデルの反射率比較

$N = 5$ の 5 層正方柱周期構造を単層膜モデル及び 3 層膜モデルで近似した場合の反射率比較を、それぞれ図 8 及び図 9 に示す。FDTD 法はオリジナルの 5 層正方柱周期構造の反射率を FDTD 法により求めた結果を表し、 R_{eff} 及び R_{eff3} はそれぞれ単層膜モデル及び 3 層膜モデルにより近似した反射率を表している。また R_{ave} は図 4 の単層膜近似モデルでの有効誘電率において、不連続点 $\Lambda/\lambda_0 = 0.6$ までの有効誘電率の平均値 $\epsilon_{effa} = 1.5527$ を用いて近似した反射率を表している。図 8 から、単層膜近似モデル R_{eff} はその有効誘電率と同様に $\Lambda/\lambda_0 = 0.6$ 付近で不連続となり、不連続点以下の低周波側では精度よく近似できているが、不連続点を越えた高周波側では近似できていないことが確認できる。平均値を用いた R_{ave} では不連続性が解消され、近似可能範囲が $\Lambda/\lambda_0 = 0.7$ 程度まで拡大していることが確認できる。また図 9 から、3 層膜近似モデル R_{eff3} は規格化周波数 $\Lambda/\lambda_0 = 0.8$ 程度まで近似で

きており、本研究における近似モデルの中では最も良い近似となることが確認できる。これは3層膜で近似したことにより、より複雑な散乱にも対応できるようになったためと考えられる。ここで本研究における近似可能な範囲は、FDTD法に対する差が50%までの範囲としている。

3.2 円柱周期構造

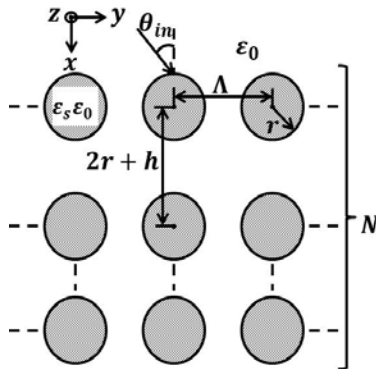


図10 多層円柱周期構造

本項では図10に示す円柱周期構造に対する数値計算結果を示す。Nは周期構造の層数、 $\Lambda = 1.0\mu\text{m}$ は周期であり、 $h = 0.5\Lambda$ は周期構造の間隔である。また円柱は $\epsilon_s = 2.0$ の比誘電率を持ち、その半径は $r = 0.25\Lambda$ である。近似層の厚さは円柱の直径 $2r$ と等しくしている。

3.2.1 有効誘電率

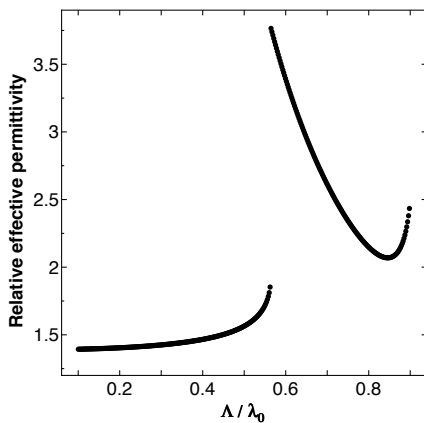


図11 単層円柱周期構造に対する単層膜近似モデルの有効誘電率

図11及び図12は、それぞれ $N = 1$ の単層周期構造における単層膜近似モデルの有効誘電率 ϵ_{eff} 及び3層膜近似モデルの内層有効誘電率 ϵ_{eff2} を表している。3層膜近似モデルの外層有効誘電率 ϵ_{eff1} は正方柱の場合と同様に、低周波域において ϵ_{eff2} がほぼ一定となるように $\epsilon_{eff1} = 1.235$ と固定している。また内外層の厚さの比は $d_1 : d_2 = 49 : 2$ としてい

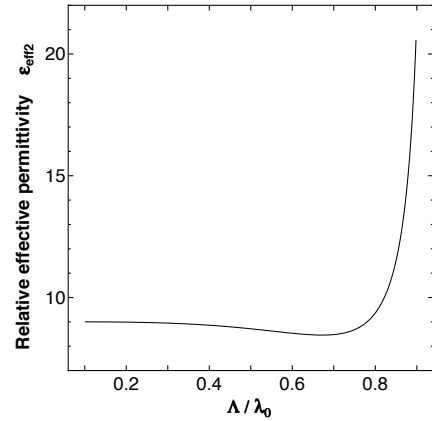


図12 単層正方柱周期構造に対する3層膜近似モデルの内層有効誘電率

る。これらの図から正方柱周期構造の場合と同様に、単層膜近似モデルでは $\Lambda/\lambda_0 = 0.57$ 付近で不連続が生じているが、3層膜近似モデルでは不連続が解消されていることが確認できる。

3.3 反射率比較

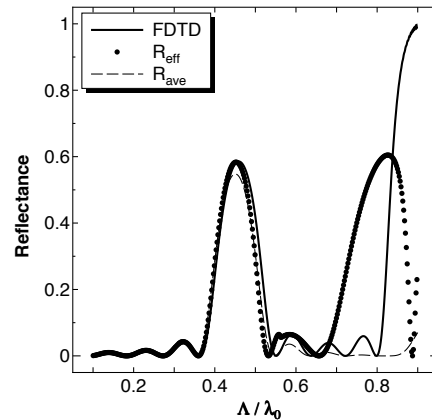


図13 5層円柱周期構造に対する単層膜近似モデルの反射率比較

$N = 5$ の5層円柱周期構造を単層膜モデル及び3層膜モデルで近似した場合の反射率比較を、それぞれ図13及び図14に示す。単層膜近似モデルにおける不連続点までの有効誘電率の平均値は $\epsilon_{effa} = 1.4701$ である。図13から単層近似モデルでは、 R_{eff} は不連続点 $\Lambda/\lambda_0 = 0.57$ まで、 R_{ave} は $\Lambda/\lambda_0 = 0.6$ 付近まで近似可能であることが確認できる。また図14から3層近似モデル R_{eff3} は $\Lambda/\lambda_0 = 0.8$ 付近まで近似可能であり、円柱周期構造においても最も良い近似モデルであることが確認できる。

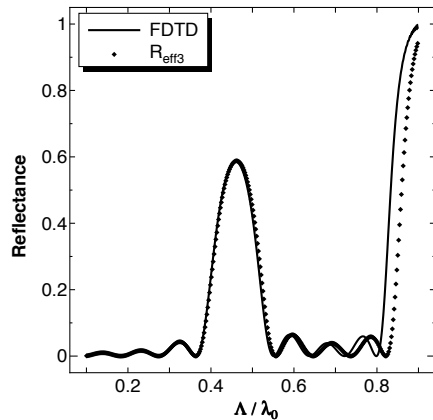


図 14 5 層円柱周期構造に対する 3 層膜近似モデルの反射率比較

4. まとめ

本論文では多層周期構造における有効誘電率の数値的検討を行った。本研究で用いた多層周期構造は正方柱周期構造と円柱周期構造である。また 1 次元周期構造を有効誘電膜に置き換える際の近似モデルとして、単層膜近似モデルと 3 層膜近似モデルを用いた。単層膜近似モデルでは高周波域において不連続が発生し、不連続以降の近似精度が悪くなることが確認できた。これは有効誘電率を求める際の超越方程式の振動により、低周波域において得られていた比誘電率の範囲では、高周波域での解が存在しなくなってしまったためと考えられる。不連続点までの有効誘電率の平均値を用いた近似手法では、不連続性は解消され近似可能な範囲が広がることが確認できた。これは低周波域における有効誘電率が、周波数によらずほぼ一定と見なせるためと考えられる。3 層膜近似モデルでは膜厚が薄くなることによって不連続が解消され、単層膜近似モデルよりも近似可能な範囲が拡大することが確認できた。これは 3 層膜により近似することで、より複雑な散乱にも対応できるようになったためと考えられる。本研究では垂直入射のみを取り扱ったため、入射角の変化が近似特性に与える影響の検討や、より近似精度を向上させるための手法を検討することが今後の課題である。

参考文献

- 1) A. Ishimaru, "Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering," Prentice Hall, 1991.
- 2) P. Lalanne, "Effective medium theory applied to photonic crystal composed of cubic or square cylinders," *Appl. Opt.*, vol.35, pp.5369–5380, 1996.
- 3) K.K. Karkkainen, A.H. Sihvola, and K.I. Nikoskinen, "Effective permittivity of mixtures: Numerical validation by the FDTD method," *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sensing*, vol.38, no.3, pp.1303–1308, 2000.
- 4) S.T. Thurman and G.M. Morris, "Controlling the spectral

response in guided-mode resonance filter design," *Optical Society of America*, 2003.

- 5) P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media*, Wiley-Interscience, 2005.