

多層周期構造における有効誘電率に関する数値的検討

松元 和正^{a)} · 溝口 大貴^{b)} · 横田 光広^{c)}

Numerical Examination on Effective Permittivity of Multilayered Periodic Structures by the FDTD Method

Kazumasa MATSUMOTO, Daiki MIZOGUCHI, Mitsuhiro YOKOTA

Abstract

The effective permittivity of the multilayered periodic structure is examined using the reflectance and transmissivity obtained by the FDTD method. By using the reflectance and transmissivity by the FDTD method, the effective permittivity of the dielectric slab, which has the same reflectance and transmissivity with that of periodic structure, is obtained by using the transcendental equation. Also, the range of application and the validity of the effective permittivity are shown. As the numerical examination, the two-layered periodic structure which consists of the circular cylinders is examined. It is shown that validity of the effective permittivity for the two-layered periodic structure verify.

Keywords: FDTD method, Effective permittivity, Periodic structure

1. はじめに

構造や誘電率などの電気特性が周期的に変化する周期構造による電磁波の散乱問題は、電磁界解析の分野における基礎問題の1つであり、有限要素法、モーメント法、FDTD法などの数値解析法を用いて数多くの研究成果が報告されている^{1,2)}。

周期構造は一般に、多数の物体から構成されている場合や複雑な構造の場合が多く、散乱特性などを厳密に解析する際、特殊関数などが用いられており必ずしも容易でない²⁾。近似的な散乱特性を把握するため、周期構造と同じ散乱特性を有する誘電体スラブに置き換える方法が提案されている³⁾。この手法において散乱特性が同じとなるスラブの誘電率を有効誘電率という。このモデルを用いることができれば、デバイス設計が簡易化され、電磁波の散乱解析や諸特性の再現などに貢献することができる。

本稿では、文献³⁾の手法を参考にして、2層の誘電体円柱周期構造における有効誘電率をFDTD法⁴⁾⁻⁶⁾を用いて数値的に検討する。周期構造における電磁波反射係数をFDTD法を用いて数値的に求め、その反射係数が単層スラブまたは多層スラブにおける反射係数と等しくなる有効誘電率を求める。単層スラブ近似または多層スラブ近似で求めた有効誘電率を比較することにより、近似の有効性及び範囲を検討する。なお、

多層スラブにおける反射係数は有効フレネル係数を用いた手法⁷⁾により計算している。

2. 2次元FDTD法

本研究では、 z 軸方向に変化のない2次元を考える。マクスウェル方程式において、 H_x 、 H_y 、 E_z 成分のみを持つ E 波に対してYeeのアルゴリズムを用いて差分化を行うと次式が得られる⁵⁾。

$$E_z^n(i, j) = E_z^{n-1}(i, j) + \frac{\Delta t}{\epsilon(i, j)\Delta x} \left\{ H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i - \frac{1}{2}, j\right) \right\} - \frac{\Delta t}{\epsilon(i, j)\Delta y} \left\{ H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j - \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (1)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) = H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, j + \frac{1}{2}\right) - \frac{\Delta t}{\mu_0\Delta y} \left\{ E_z^n(i, j+1) - E_z^n(i, j) \right\} \quad (2)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \frac{\Delta t}{\mu_0\Delta x} \left\{ E_z^n(i+1, j) - E_z^n(i, j) \right\} \quad (3)$$

ここで、 (i, j) は格子点の座標、 n は時間ステップを表している。

解析領域の外壁には開放領域を作り出すための吸収境界条件(ABC)及び周期問題を解くための周期的境界条件(PBC)が必要である⁴⁾。本稿では、吸収境界条件としてMurの2次吸収境界条件⁴⁾を使用している。

^{a)}電気電子工学専攻大学院生

^{b)}電気電子工学科学部生

^{c)}工学教育研究部教授

3. 単層スラブにおける反射率

(8)

今、屈折率 n_2 、厚み d の極めて並行度の高いスラブが屈折率 n_1 の媒質中に置かれており、平面波がこの媒質の中へ入射角 θ_i で入射したとすると、スラブからの反射率 R は次式で表わされる。

$$R = \frac{4R_m \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}{(1 - R_m)^2 + 4R_m \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \quad (4)$$

ここで、 δ はスラブ 1 往復だけ光路差のある 2 つの部分波の位相差を表し、また R_m は各境界面の反射率を表しており、それぞれ

$$\delta = \frac{4\pi n_1 d}{\lambda_0} \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i} \quad (5)$$

$$R_m = \left[\frac{\cos \theta_i - \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 \theta_i}} \right]^2 \quad (6)$$

となる。

FDTD 法を用いて多層周期構造に対する R を数値的に求め、式 (4)~(6) を用いて、 n_2 に関する超越方程式を解くことにより、多層周期構造を誘電体スラブに置き換えた際の有効誘電率 (n_2) を求めることができる。

4. 多層スラブにおける反射率

多層スラブの反射係数や透過係数などの光学計算の代表的な方法として、電気回路理論の手法を用いたマトリックス法などの計算手法、図形的な思考による図式解法、有効フレネル係数を用いた方法などがある。本研究では有効フレネル係数を用いる方法⁷⁾で反射係数を求める。

スラブを N 層に並べた場合の反射係数は、次式で与えられる。

$$\mathcal{R}_i = \frac{r_{j+1} + \mathcal{R}_{j-1} e^{-2i\delta_j}}{1 + r_{j+1} \mathcal{R}_{j-1} e^{-2i\delta_j}} \quad (7)$$

と表せる。ここで、 \mathcal{R}_i は第 i 層からの反射係数、 r_{j+1} は第 $j+1$ 層上面でのフレネル反射係数を表し、位相 δ_j 、初期反射係数 \mathcal{R}_0 は、それぞれ、次式で与えられる⁷⁾。

$$\mathcal{R}_0 = r_1 = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_0 \cos \theta_0}{n_1 \cos \theta_1 + n_0 \cos \theta_0}, \quad \delta_j = \frac{2\pi}{\lambda} n_j d_j \cos \theta_j$$

$j=1$ から N まで繰り返すことにより反射係数を求めていくことができる。反射率は上記で求めた反射係数を二乗することにより得られる。

単層スラブの場合と同様に、FDTD 法を用いて多層周期構造に対する R を数値的に求め、式 (7)、(8) を用いて、 n_j に関する超越方程式を解くことにより、多層周期構造を誘電体多層スラブに置き換えた際の有効誘電率を求めることができる。

5. 数値計算結果

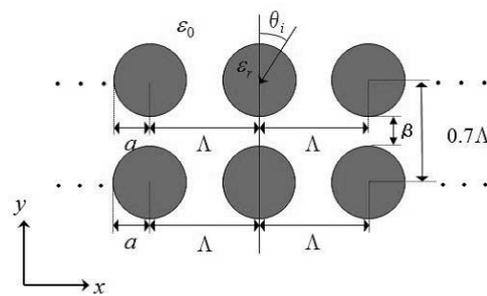


図 1. 2 層の誘電体円柱周期構造

本稿での解析対象は、図 1 に示す 2 層の誘電体円柱周期構造である。x 軸方向に周期 Λ で円柱を無限個、y 軸方向に周期 $2a + \beta$ で円柱を 2 層配置することにより構成する。本稿では、円柱の半径を $a = 0.3\Lambda$ 、比誘電率を $\epsilon_r = 2.0$ とし、2 層の円柱間の空気層 β は 0.1Λ としている。入射波の波長を $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ に設定し、入射角 $\theta_i = 0$ のガウスパルス波としている。

5.1 単層スラブによる近似

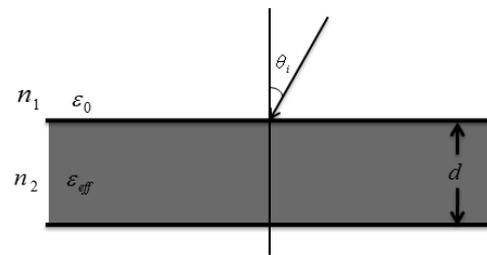


図 2. 2 層円柱を近似する単層スラブ構造

図 2 は 2 層誘電体円柱を単層スラブで近似する場合の構造を示している。背景媒質は空気とし、また、単層スラブの厚さ d は $4a + \beta$ で 2 層誘電体円柱全体の厚さと同じにしている。

図 3 は規格化周期 Λ/λ_0 に対する反射率を示している。反射率は FDTD 法を用いて時間領域で反射波を求

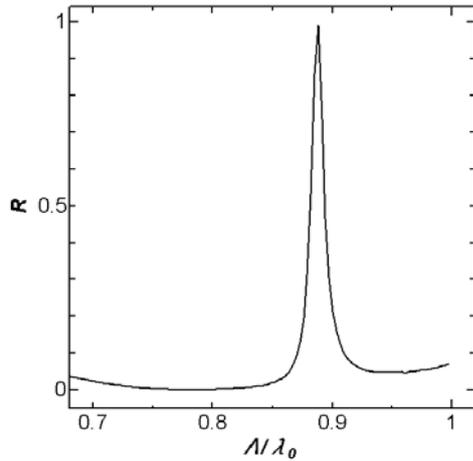


図 3. FDTD 法で求めた反射率

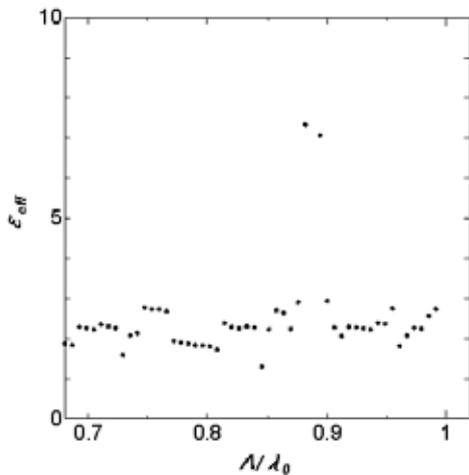


図 4. 単層スラブで近似した場合の有効誘電率 (Y 軸最大 10)

めた後、FFT をかけ周波数領域での反射波を計算し、周波数領域での入射波で除して求めている。また、図 4 は単層スラブによって近似した場合の有効誘電率を示している。有効誘電率は反射率に対応して増減し、反射率及び有効誘電率ともに規格化周期が 0.89 付近で最大値を生じていることが分かる。

5.2 多層スラブによる近似

図 5 は図 1 の 2 層誘電体円柱を多層スラブで近似する場合の構造を示している。背景媒質は空気と仮定し、各スラブの厚さは円柱の直径 $2a$ に設定している。また、スラブ間の空気層厚も $\beta = 0.1\Lambda$ としている。図 6 に多層スラブで近似した場合の有効誘電率を示す。図 3 と図 4 のグラフから反射率に対応して有効誘電率が増減していることや、反射率及び有効誘電率ともに横軸 Λ/λ_0 が 0.89 付近で最大値を生じていることが分かる。

図 4 のグラフと図 6 のグラフを比較すると、規格周

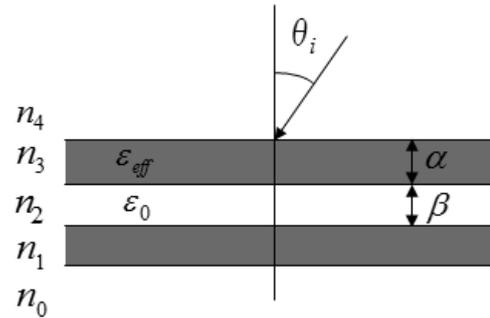


図 5. 2 層円柱を近似する多層スラブ構造

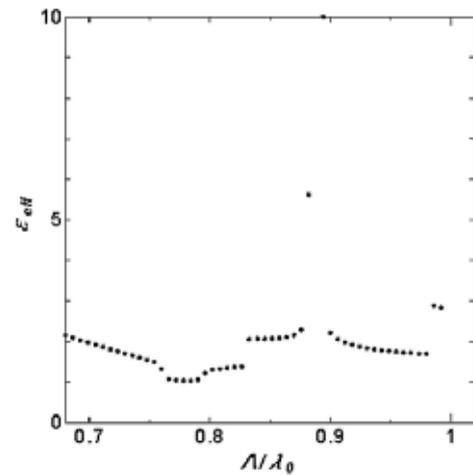


図 6. 多層スラブで近似した場合の有効誘電率 (Y 軸最大 10)

期 Λ/λ_0 が 0.781 の付近で反射率が最小値の 2.5×10^{-8} になっており、物理的にはこの付近で有効誘電率はほぼ 1 になる考えられる。しかし、単層スラブによる近似では、1.50 であり、一方、多層スラブによる近似では 1.02 であることから、単層スラブによる近似より多層スラブによる近似の方が精度よく近似できていると考える。本稿のモデルにおいて、単層スラブによる近似と多層スラブによる近似は計算時間はほぼ同じであるため、多層スラブによる近似の方が良い近似になっていると考える。

6. まとめ

本稿では、2 層の円柱周期構造における有効誘電率についての数値的検討を行った。

2 層誘電体円柱周期構造を単層スラブまたは多層スラブで近似した場合の有効誘電率を数値的に求め、反射率の変化に応じて有効誘電率が増減することが確認できた。単層スラブによる近似では、1.50 であり、一方、多層スラブによる近似では 1.02 であることから、単層スラブによる近似より多層スラブによる近似の方が精度よく近似できていることを示した。

今後の課題としては、層数を増やした場合において単層スラブや多層スラブで近似できる範囲や精度などについて検討する予定である。

参考文献

- 1) A. Ishimaru: “Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering”, Prentice Hall, 1991.
- 2) K. Yasumoto (Ed.): “Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals”, CRC Press, 2006.
- 3) K. K. Karkkainen, A. H. Sihvola, and K. I. Nikoskinen, “Effective Permittivity of Mixtures: Numerical Validation by the FDTD Method”, IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, vol.38, no.3, pp.1303-1308, 2000.
- 4) A. Taflové (Ed.): “Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method”, Norwood, MA, Artech House, 1995.
- 5) 宇野 亨: “FDTD 法による電磁界及びアンテナ解析”、コロナ社, 1998.
- 6) 橋本 修: “実践 FDTD 時間領域差分法”、森北出版, 2006.
- 7) 吉田 貞史、矢島 弘義: “薄膜・光デバイス”、東京大学出版会, 1994.