

フォトニック結晶グレーティングからの散乱電磁波の数値解析

吉鶴 喜多郎^{a)} · 横田 光広^{b)}

Numerical Analysis on Scattered Electromagnetic Wave from Photonic Crystal Grating

Kitaro YOSHIKAZU, Mitsuhiko YOKOTA

Abstract

In this article, the scattered electromagnetic wave from two dimension photonic crystal grating (PCG) structure is analyzed by using Method of Moments (MoM). PCG is assumed to be formed into dielectric slab and dielectric cylinder. The scattered electromagnetic wave is expressed in terms of the integral form by infinite summation of the surface integral over the cross section of reference structure. The lattice sums technique is used to accelerate the calculation of infinite summation. Numerical results show the effect of depth of grating, relative permittivity, size and shape of dielectric slab and dielectric cylinder on reflectance as the changes of period of structure. We think that PCG proposed in this article is useful for the design of frequency filter.

Keywords: Method of moments, Photonic crystal grating, Scattered electromagnetic wave

1. まえがき

フォトニック結晶は、光の波長程度の長さの周期構造を有しており、結晶中では、ある波長範囲の光の存在が許されないフォトニックバンドギャップ (PBG: Photonic Band Gap) が生じる。このフォトニックバンドギャップは、フォトニック結晶の構造を変化させることにより、制御することが可能である。その特性から、無しき値レーザー、光分岐回路、周波数フィルター、光ファイバーなど様々な用途に用いることが期待され、盛んに研究が行われている^{1,2)}。

周期構造による電磁波の散乱問題は電磁界解析の分野における基礎問題の一つであり、古くから理論的、数値的に解析されている。解析のしやすさから、最も基本的な形状である円柱による2次元散乱問題がよく取り扱われている。最近では、計算機の性能が著しく向上し、シミュレーションによる電磁波解析が容易になったため、様々な手法を用いた研究成果が報告されている。代表的な解析法として、積分方程式による解析としては離散双極子近似法 (DDA: Discrete Dipole Approximation)、モーメント法 (MoM: Method of Moments)³⁾ や高速多重極法 (FMM: Fast Multipole Method)⁴⁾ などが、微分方程式による解析としては有限要素法 (FEM: Finite Element Method)、有限差分時間領域法 (FDTD: Finite-Difference Time-Domain Method)⁵⁾ などが挙げられる。この中でもモーメント法は電磁波の数値解析において、精度の良い結果を得られる手法の一つとして用いられてきた。

本稿では、モーメント法を用いて、フォトニック結晶グレー

ティング (PCG: Photonic Crystal Grating) による光波の散乱問題を数値的に検討を行っている。まず、散乱体を誘電体で形成した誘電体グレーティングからの散乱界を計算する。次に、誘電体円柱で形成したフォトニック結晶グレーティングの場合及び誘電体スラブ内にフォトニック結晶グレーティングが存在する場合、さらに、誘電体グレーティング内にフォトニック結晶グレーティングが存在する場合を取り扱い、周波数フィルター特性の観点から数値的検討を行っている。

2. 定式化

2.1 周期構造における電磁波散乱

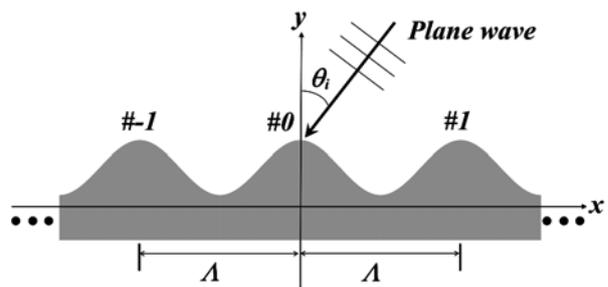


図1. 問題の座標系

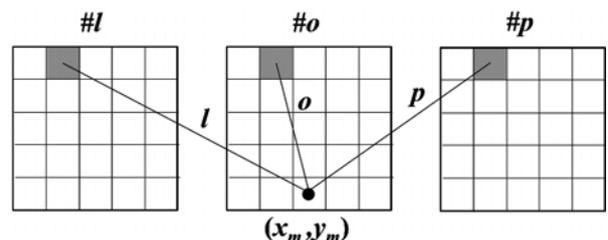


図2. 観測点と積分変数の関係

^{a)}電気電子工学専攻大学院生

^{b)}電気電子工学科教授

定式化の一例として、図1に示すような2次元誘電体グレーティングに平面波が入射する場合の反射特性について、モーメント法を用いて数値的に検討を行う。

入射する電界は

$$E^i = E_0 \exp(-jk_x y) \quad (1)$$

で表される平面波とし、y軸正方向から θ_i で入射する場合を考える。ここで E_0 は入射する電界の振幅、 $k_x = -k_0 \sin \theta_i$ である。

1つの物体による散乱問題の結果を参考にして⁶⁾、1次元アレーによる散乱問題における全電界に対する積分表現を得る。 x 方向に周期 Λ で物体が配置されているので、電界についてプロッホの定理より

$$E(x_l + \Lambda, y_l) = E(x_l, y_l) \exp(-jk_x l \Lambda) \quad (2)$$

の関係が採用でき、次式を得る。

$$E_z^s(\mathbf{r}) = -j \frac{k^2}{4} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{s_l} H_0^{(2)}(k\rho_l) E(\mathbf{r}_0) \exp(-jk_x l \Lambda) (\varepsilon_{r0} - 1) ds_l + E_i(\mathbf{r}) \quad (3)$$

ここで、 $H_0^{(2)}(k\rho_l)$ は第2種0次ハンケル関数、 ε_{r0} は比誘電率、 ρ_l は観測点 r と積分領域の変数 r_l との距離である。式(2)をモーメント法により離散化(分割数は N とする)して解く。行列要素に含まれる積分をRichmondの方法により近似計算することで下記に示すような行列方程式に帰着できる[3]。

$$\sum_{n=1}^N C_{mn} E_n = E_m^i \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

式(3)は微少セル内での積分であるため、不均質媒質や非線形媒質の誘電体についても取り扱うことができる。式(4)を代数的に解くことにより周期アレーに関する散乱界を求めることができ、本稿では行列計算はGMRES法を用いて計算している⁷⁾。式(4)に含まれる係数 C_{mn} は、 $m \neq n$ のとき、

$$C_{mn} = j \frac{\pi}{2} [\varepsilon_{r0}(n) - 1] ka_n J_1(ka_n) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-jk_x l \Lambda) H_0^{(2)}(k\rho_{nm}^l) \quad (5)$$

であり、また $m = n$ の時は

$$C_{mm} = 1 + j \frac{\pi}{2} [\varepsilon_{r0}(n) - 1] \left[\left\{ ka_n H_1^{(2)}(ka_n) - \frac{2j}{\pi} \right\} + ka_n J_1(ka_n) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-jk_x l \Lambda) H_0^{(2)}(k\rho_{mm}^l) \right] \quad (6)$$

となる。ここで、 $\sum_{l=-\infty}^{\infty}$ は $l = 0$ を除いた総和を表している。また、 ρ_{mm}^l は図2に示すように m 番目のセルの

中心と l 番目の構造の n 番目のセルの中心間距離である($\rho_{mn}^l = \sqrt{(x_m - x_n^0 - l\Lambda)^2 + (y_m - y_n^0)^2}$)。さらに、式(5)、(6)において、ハンケル関数を含んだ無限級数を有限積分とする格子和⁸⁾を用いることで、モーメント法における行列の計算速度の高速化を図っている。

2.2 反射係数

周期構造では反射係数や透過係数を用いて特性評価を行うことが多い。この場合、ハンケル関数の積分表現を用いることにより、散乱電磁界を空間高調波で表現する。 l 次空間高調波の反射係数は

$$R_l = \frac{-j\pi}{d} \sum_{n=1}^N E_n [\varepsilon_{r0}(n) - 1] ka_n J_1(ka_n) \frac{1}{\kappa(k_{x,l})} \exp[+jk_{x,l} x_n^0 + j\kappa(k_{x,l}) y_n^0] \quad (7)$$

で与えられる。ここで、

$$k_{x,l} = k_x + l \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (8)$$

$$\kappa(k_{x,l}) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_{x,l}^2} & |k_{x,l}| \leq k \\ -j\sqrt{k_{x,l}^2 - k^2} & |k_{x,l}| > k \end{cases} \quad (9)$$

である。また、透過波についても同様に透過係数を求めることができる。

3. 数値計算結果

本稿では、上記の定式化を用いて、いくつかの解析モデルにおける散乱電界を求め、反射率(= R_l^2)を求めている。各々の解析モデルによる散乱電磁波の解析にはこの反射率を用いて議論し、誘電体グレーティングおよびPCGの周波数フィルターとしての特性を評価する。また、本稿で解析する構造において、グレーティングは周期 Λ 、深さ h を用いて、次式で与えられる。

$$y = t + h \cos Kx \quad (10)$$

ここで t はスラブ厚さもしくは誘電体円柱の層の厚さ、 $K = 2\pi/\Lambda$ である。また、解析モデルにおける空気の比誘電率で値は1であり、 ε_r は誘電体スラブもしくは誘電体円柱の比誘電率である。

また、各シミュレーションに共通の計算パラメータとして、入射する平面波の波長 λ を1.55[μm]、入射角 θ_i を0度、分割するセルのサイズは dx, dy ともに $\lambda/200$ とし、規格化周波数 Λ/λ の範囲を0.5~1.0で変化させている。

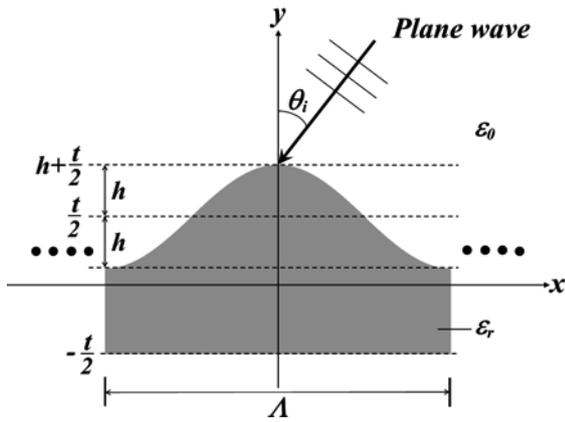


図 3. 解析モデル 1

3.1 誘電体グレーティングの場合

図 3 に誘電体グレーティング 1 周期分の解析モデルを示す。まず、解析モデル 1 において、 $t=0.4\Lambda$ 、 $\epsilon_r=2.0$ とし、グレーティング深さ h を $h=0.1t, 0.3t, 0.5t$ と変化させたときの規格化周波数に対する反射率の変化を図 4 に示す。図 4 より h が大きくなるにつれて規格化共振周波数が高くなり、共振時の反射率の半値幅が大きくなる傾向がみられた。特に $h=0.1t$ のときの反射率のピークはシャープな形をしており特定の周波数を取り出すのに有用であると考えられる。

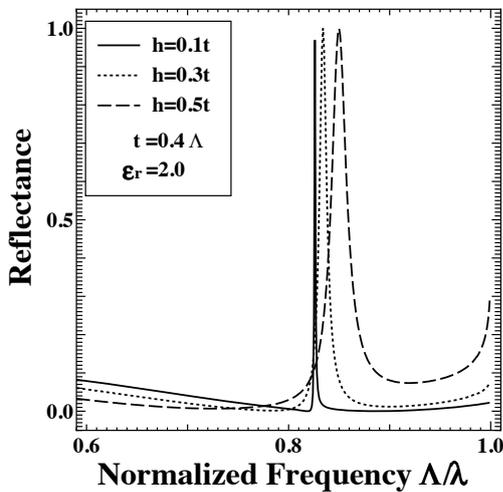


図 4. グレーティング深さを変化させた場合の反射特性

次に、解析モデル 1 において、 $h=0.2\Lambda$ 、 $\epsilon_r=2.0$ とし、スラブ厚さ t を $t=0.2\Lambda, 0.4\Lambda, 0.6\Lambda$ と変化させたときの規格化周波数に対する反射率の変化を図 5 に示す。図 5 より t が大きくなるにつれて規格化共振周波数が低くなり、共振時の半値幅が小さくなる傾向がみられた。また、 $t=0.6\Lambda$ のときには 2 つ目の共振点が見られた。これは、スラブ厚さに対し反射率は周期的に変化するため、スラブ厚さが厚くなったことで規格化周波数の変化範囲 $0.5 \sim 1.0$ の間での反射率の周期が増えた

ことが要因であると考えられる。

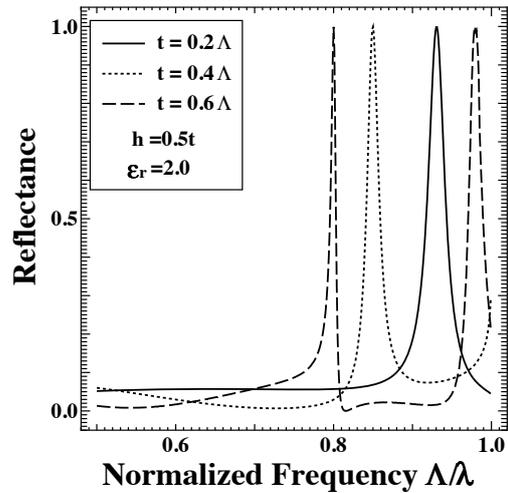


図 5. スラブ厚さを変化させた場合の反射特性

最後に、解析モデル 1 において、 $t=0.4\Lambda$ 、 $h=0.5t$ とした時に、スラブの誘電率 ϵ_r を $\epsilon_r=1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ と変化させたときの規格化周波数に対する反射率の変化を図 6 に示す。図 6 より t が大きくなるにつれて規格化共振周波数が低くなり、共振時の半値幅が小さくなる傾向がみられた。また、 $\epsilon_r > 2.5$ のときには 2 つ目の共振周波数が見られた。これは、スラブの厚さを変化させた時と同様に比誘電率により反射率の周期性が変化するため、比誘電率が大きくなったことで規格化周波数の変化範囲 $0.5 \sim 1.0$ の間での反射率の周期が増えたことが要因であると考えられる。

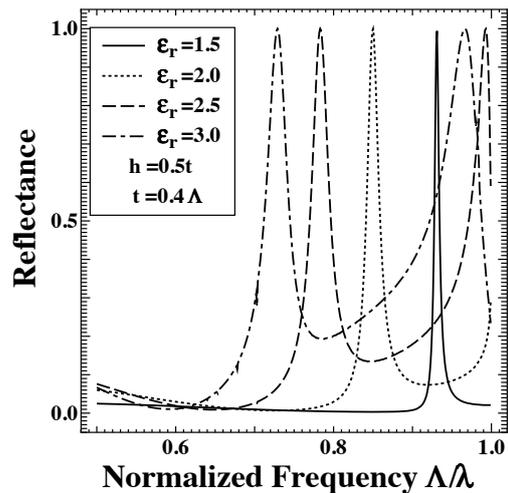


図 6. スラブの誘電率を変化させた場合の反射特性

3.2 PCG の場合

図 7 に PCG の場合の解析モデル 2 を示す。まず、解析モデル 2 において $t=4.0d$ 、 $h=2.0d$ 、 $\epsilon_r=2.0$ とし、誘電体円柱の

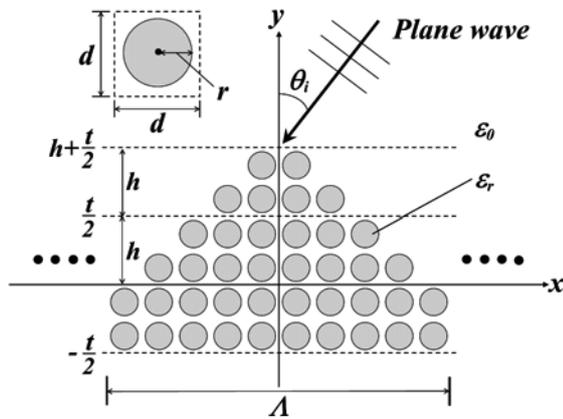


図7. 解析モデル2

半径 r を $r=0.1d, 0.2d, 0.3d, 0.4d$ と変化させたときの規格化周波数の変化に対する反射率の変化を図8に示す。図8より $r=0.1d$ においては規格化周波数の変化範囲 $0.5 \sim 0.1$ の全てにおいて反射率は0となった。このことから $r=0.1d$ のときには、この構造による電磁波の散乱は生じないと考えられる。 $r > 0.2d$ では規格化共振周波数が生じ、円柱の半径が大きくなるにつれて規格化共振周波数が低くなり、共振時の半値幅が大きくなる傾向がみられた。

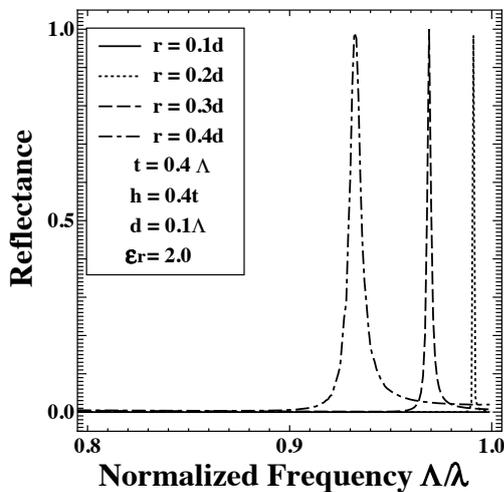


図8. 円柱の半径を変化させた場合の反射特性

次に、解析モデル2において $r=0.4d, t=4.0d, \epsilon_r=2.0$ とし、PCGのグレーティングの深さ h を $h=0.5d, 1.5d, 2.0d$ と変化させたときの規格化周波数の変化に対する反射率の変化を図9に示す。図9より h が大きくなるにつれて規格化共振周波数が高くなり、共振時の半値幅が大きくなる傾向がみられた。これは解析モデル1でグレーティング深さを変化させたときと同様の傾向であり、解析モデル1と解析モデル2では共振時の反射率は同様のふるまいをするものと推測される。ただし解析モデル2では、規格化共振周波数ではない規

格化周波数での反射率がほぼ0であることから周波数フィルタとしての特性はこちらの解析モデルの方がよいと考えられる。また、規格化共振周波数は h の値に関わらず解析モデル1と比較して高くなっており、例えば $h=2.0d$ のときに規格化共振周波数は、解析モデル2では $\Lambda/\lambda=0.932$ であり解析モデル1では $\Lambda/\lambda=0.850$ であった。

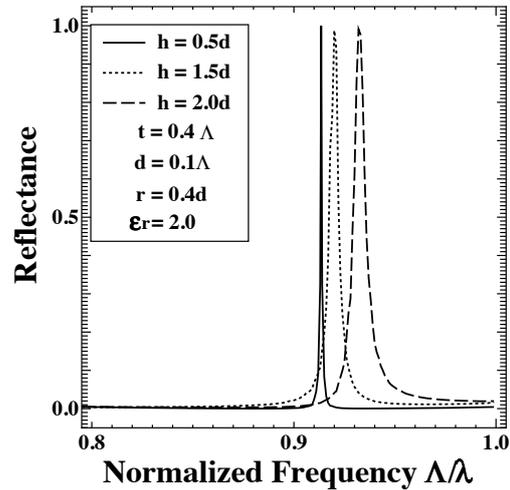


図9. グレーティング深さを変化させた場合の反射特性

解析モデル2において $r=0.4d, h=2.0d, \epsilon_r=2.0$ とし、誘電体円柱の層の厚さ t を $t=2.0d, 4.0d, 6.0d$ と変化させたときの規格化周波数の変化に対する反射率の変化を図10に示す。図10より t が大きくなるにつれて規格化共振周波数が低くなり、共振時の半値幅が小さくなる傾向がみられた。これは解析モデル1でスラブ厚さを変化させたときと同様の傾向である。ただしPCGでは、共振周波数ではない規格化周波数での反射率がほぼ0であることからグレーティング深さを変化させたときと同様に周波数フィルタとしての特性はこちらの構造の方がよいと考えられる。また、 t が大きくなると解析モデル1では規格化周波数の変化範囲 $0.5 \sim 1.0$ の間に2つの共振点が見られたが、解析モデル2では1つしか見られなかった。これはグレーティング深さを変化させたときに述べたように解析モデル2では解析モデル1よりも高い規格化周波数のときに共振が生じることに起因するものと考えられる。

最後に解析モデル2において $r=0.4d, t=4.0d, h=2.0d$ とし、誘電体円柱の比誘電率を ϵ_r を $\epsilon_r=1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ と変化させたときの規格化周波数の変化に対する反射率の変化を図11に示す。図11より t が大きくなるにつれて規格化共振周波数が低くなり、共振時の半値幅が大きくなる傾向がみられた。これは解析モデル1で誘電体スラブの比誘電率を変化させたときと同様の傾向である。この事より先に立てた推測が正しかったと考えられる。誘電体円柱でグレーティングを形成した場合では、規格化共振周波数ではない規格化周波数で

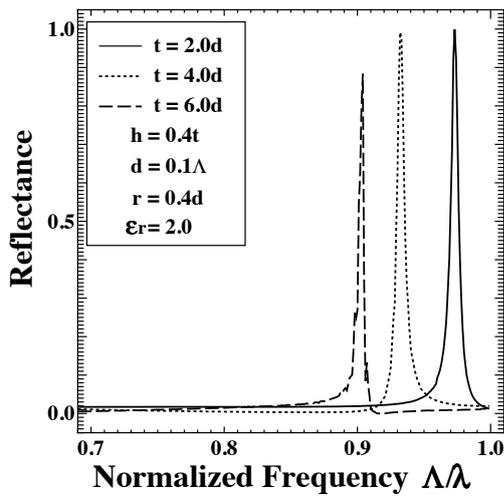


図 10. スラブ厚さを変化させた場合の反射特性

の反射率が解析モデル 1 と比較すると低く、グレーティングの深さや誘電体円柱の層の厚さを変化させたときと同様に周波数フィルタとしての特性はこちらの構造の方がよいと考えられる。また、 t が大きくなると解析モデル 1 では規格化周波数の変化範囲 0.5~1.0 の間に 2 つの共振点がみられたが、解析モデル 2 では 1 つしか見られなかった。これはグレーティング深さや誘電体円柱の層の厚さを変化させたときに述べたように解析モデル 2 では解析モデル 1 よりも高周波数のときに共振が生じることに起因するものと考えられる。

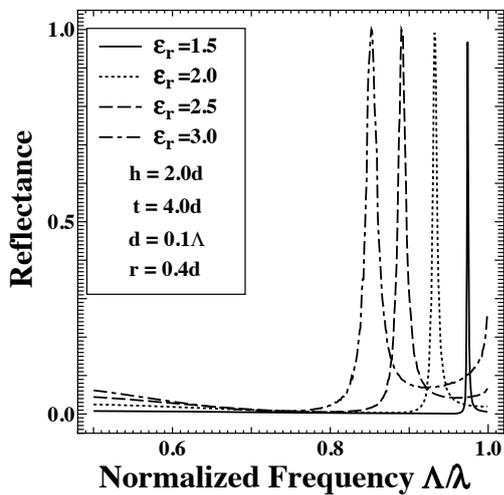


図 11. スラブの誘電率を変化させた場合の反射特性

3.3 誘電体スラブ内に PCG を形成した場合

図 12 に誘電体スラブ内に PCG を形成した場合の解析モデルを示す。解析モデル 3 において $r=0.4d$ 、 $t_2=0.4\Lambda$ 、 $h=2.0d$ 、 $\epsilon_{r1}=2.0$ 、 $\epsilon_{r2}=3.0$ としたときに、スラブ厚さ t_1 を 0.6 Λ 、0.8 Λ 、1.0 Λ と変化させたときの規格化周波数の変化に対する反射率の変化を図 13 に示す。図 13 より、誘電体スラブ内に PCG

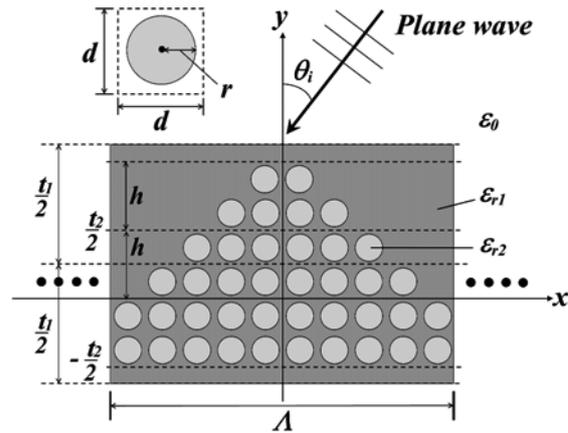


図 12. 解析モデル 3

を形成した場合、共振時にシャープな反射率のピークがみられた。スラブ内に誘電体円柱の周期構造を配置した場合、誘電体円柱の周期構造のみの場合と比較し低周波数側に鋭い反射率のピークを持つことが報告されており [6]、今回のシミュレーションでも同様の傾向が得られたと考えられる。また、 t_1 が大きくなるにつれて共振周波数は低くなる傾向がみられた。

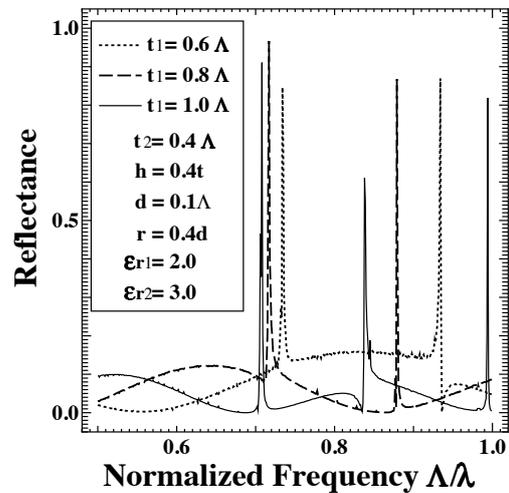


図 13. スラブ厚さを変化させた場合の反射特性

4. まとめ

本稿では、モーメント法を用いて、誘電体グレーティング、フォトニック結晶グレーティング (PCG: Photonic crystal grating) を誘電体円柱で形成した場合や誘電体スラブ内に形成した場合について散乱電磁波の解析し、周波数フィルタとしての特性を評価を行った。

まず、誘電体グレーティング構造における電磁波の反射特性のシミュレーションを行った。シミュレーションは、グレーティングの深さを変化させた場合、スラブ厚さを変化さ

せた場合、スラブの比誘電率を変化させた場合を行った。これにより、誘電体グレーティングにおいても、誘電体円柱の周期構造と同様に反射率が1となる共振が生じる周波数を持つことが分かった。また、グレーティングの深さ、スラブ厚さ、スラブの比誘電率を変化させることで反射率の規格化共振周波数を変化させることが可能であることが分かった。

次に、PCG構造における電磁波の反射特性のシミュレーションを行った。シミュレーションは誘電体円柱の半径を変化させた場合、グレーティングの深さを変化させた場合、誘電体円柱の層数を変化させた場合、円柱の誘電率を変化させた場合を行った。これにより、規格化周波数の変化範囲において共振時以外の反射率がほぼ0である周波数フィルタとして良い特性が得られた。

最後に、誘電体スラブ内にPCGを形成した構造における電磁波の反射特性のシミュレーションを行った。シミュレーションはスラブの厚さを変化させた場合、誘電体スラブの誘電率を変化させた場合、誘電体円柱の誘電率を変化させた場合を行った。この結果より誘電体スラブ内にPCGを形成した構造では、共振時にシャープな反射率のピークがみられる事がわかった。また、シャープな反射率のピークを持つ2つもしくは3つの共振点を得ることができるので複数の周波数を取り出す周波数フィルタとして用いることができるのではないかと考えられる。ただし、共振時の反射率が1よりも小さくなっている共振周波数があり、これはシミュレーション時の規格化周波数の変化の刻み幅が十分に細くないことが原因として考えられるので、シミュレーション時のパラメータを見直す必要があるものと考えられる。

今後は、この構造を積層させた場合の解析を行う予定である。

参考文献

- 1) 迫田 和彰, "フォトニック結晶入門", 森北出版, 2004.
- 2) 吉野 勝美, 武田 寛之, "フォトニック結晶の基礎と応用", コロナ社, 2004.
- 3) A.Ishimaru: "Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering", Prentice-Hall, 1991.
- 4) W. C. Chew, J-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song, Ed: "Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics", Artech House, 2001.
- 5) A. Taflov and S. C. Hagness: "Computational Electromagnetics: the Finite-Difference Time-Domain Method (Second Edition)", Artech House, 2000.
- 6) M. Yokota: "Application of multigrid moment method to scattering of a Gaussian beam by a dielectric cylinder", Trans. IEEJ, Trans. FM, vol.124, no.12, pp.1135-1140, 2004.
- 7) Y. Saad and M. H. Schultz: "GMRES: A generalized minimum residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems", SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol.7, pp.856-869, 1986.
- 8) K.Yasumoto, Ed.: "Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystal Ch.8", Taylor & Francis, 2006.