

# 分割評価関数を用いた準最適LQG制御問題 における評価値劣化特性

平岡 豊<sup>1)</sup>・橋本 修輔<sup>2)</sup>

## Properties of the Performance Degradation in a Sub-Optimal LQG Control Problem with the Partitioned Performance Index Function

Yutaka HIRAOKA, Shusuke HASHIMOTO

### Abstract

In case the linear quadratic optimal control policy is applied to the large-scale systems that the dimensions of state vectors and control inputs are high order, we must take account of information costs necessary to synthesize the optimal control. Previously, we considered the sub-optimal control problem such that the total stage performance index function was partitioned and the optimal control of in the LQ control problem in each block was synthesized. The degradation of the performance index value caused by partitions was formulated as the quadratic form of the initial state vector.

In this paper, we consider the sub-optimal control problem for a LQG control problem such that the total stage performance index function is partitioned and the optimal control is synthesized in each block.

Key Word:

LQ Control Problem, LQG Control Problem, Sub-Optimal Control, Partitioned Performance Index Function, Performance Degradation

### 1. 序言

システムが線形 (Linear) モデルで表されるシステムに対して、その制御目的を二次形式 (Quadratic) 評価で規定し、これを最小化する最適制御問題を最適 LQ 制御問題と言う。

一般に取り扱う制御系では、システムへ混入する雑音等を考慮すると制御系を構成する変数の数値は確定的と言われるものではない。実際には、制御系の構成変数の数値は制御過程においてランダムに変動したり、予期せざる外乱によって確率的なものとなる。同様に、観測系においても直接観測でなく、確率要素によって乱された状態値を観測しなければならない場合がある。このような場合には、状態値を何らかの方法で観測しなければならない。この既知の観測値系列より状態値を推定する手法として、カルマンフィルタ理論 (Kalman filter) が確立している。

さらに、最適 LQ 制御問題に正規分布 (Gaussian) 型の雑音を付加した制御問題を最適 LQG 制御問題と言い、上記の最適 LQ 制御問題とカルマンフィルタと結合した最適制御方策が体系化されている。

確定系の最適 LQ 制御問題において、状態値の次元が大きくなった場合や、制御段数が長くなるほど操作量合成の際の計算量は増加すると考えられる。このような操作量合成の計算の単純化を目的とした設計理論として、本研究室では分割評価関数を用いた準最適制御則となる操作量合成法を考察してきた<sup>1),2)</sup>。しかし、操作量合成の単純化が出来るのに対し、準最適操作量を用いるため評価値劣化が生じる。

本論では、分割評価関数を用いた確定系の準最適 LQ 制御問題を確率系の準最適 LQG 制御問題に拡張して考え、制御段数の分割方法とその際的评价値劣化との関係について理論解析する。

### 2. LQG 制御システム

#### 2.1 最適 LQG 制御問題

1) 電気電子工学専攻大学院生

2) 電気電子工学科助教授

離散時間系の確率システムが次式で表される。

$$\text{遷移式 } x_{j+1} = A_j x_j + G_j u_j + \xi_j \quad (1)$$

$$\text{観測式 } y_j = H_j x_j + \eta_j \quad (2)$$

$$\text{制御評価 } I_N = E\{J_N^o/y(0)\} \quad (3)$$

ここで、

- $j$  : 制御段数 (サンプル時刻)
- $x_j$  :  $n$  次元状態値ベクトル
- $u_j$  :  $r$  次元操作量ベクトル
- $\xi_j$  :  $n$  次元正規性遷移系付加雑音  $N : (0, Q_j)$
- $y_j$  :  $m$  次元観測値ベクトル
- $\eta_j$  :  $m$  次元正規性観測系付加雑音  $N : (0, R_j)$
- $H_j$  :  $m \times n$  観測行列

初期状態値  $x_0 : N(\bar{x}_0, \Sigma_0)$  は、平均値が  $\bar{x}_0$ 、分散が  $\Sigma_0$  の正規分布関数と設定している。また、システムに付加する雑音  $\xi_j, \eta_j$  は互いに独立であり、平均値が 0、分散が  $Q_j, R_j$  の正規分布関数と設定している。

問題は、(3) 式で表される制御評価を最小にする最適操作量を求めることである。

### 2.2 最適状態推定問題

確率システムにおける最適制御問題においては、観測が確率的付加雑音により直接完全観測ではなく、不完全な間接観測となる。このような場合に最適な制御を行うには、まず、システムの観測値情報からシステムの内部状態の最適な状態推定が行わなければならない。

そこで、最適状態推定問題をカルマンフィルタ推定アルゴリズムによって示し、最適状態推定則を導出する。

推定アルゴリズムの手順は、初期値の分散  $\Sigma_0$  を  $C_{0/-1}$  としてオフライン計算をする。次に各段での観測値情報  $y(j)$  を用いて推定値  $\hat{x}_{j/j}$  をオンライン計算で求めていく。

#### < オフライン計算 >

先験予測誤差分散行列

$$C_{0/-1} = \Sigma_0 \quad (4)$$

フィルタゲイン

$$K_j = C_{j/j-1} H_j^T (H_j C_{j/j-1} H_j^T + R_j)^{-1} \quad (5)$$

推定誤差分散行列

$$C_{j/j} = (I_n - K_j H_j) C_{j/j-1} \quad (6)$$

予測誤差分散行列

$$C_{j+1/j} = A_j C_{j/j} A_j^T + Q_j \quad (7)$$

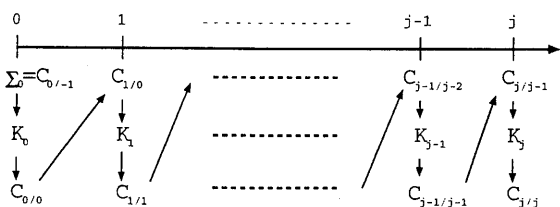


図 1: 推定のオフライン遷移図

#### < オンライン計算 >

$$\text{先験予測値} : \hat{x}_{0/-1} = \bar{x}_0 \quad (8)$$

$$\text{最適推定値} : \hat{x}_{j/j} = \hat{x}_{j/j-1} + K_j (y_j - H_j \hat{x}_{j/j-1}) \quad (9)$$

$$\text{最適予測値} : \hat{x}_{j+1/j} = A_j \hat{x}_{j/j} + G_j u_j \quad (10)$$

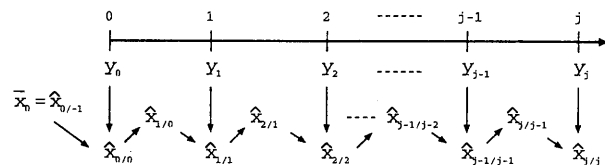


図 2: 推定のオンライン遷移図

### 2.3 最適制御則

カルマンフィルタ推定アルゴリズムと最適 LQ 制御則を結合させ最適制御則を導出した結果、最適操作量  $u_j^o$  は

$$\begin{aligned} u_j^o &= B_{N-j} E\{x_j/y(j)\} \\ &= B_{N-j} \hat{x}_{j/j} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。また、最適評価値  $I_N^o$  は

$$\begin{aligned} I_N^o &= E\{J_N/y(0)\} \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{P_N}^2 + \theta_N \end{aligned} \quad (12)$$

$\theta_N$  : 最適評価値定数

となる。

### 3. 分割評価関数を用いた準最適 LQG 制御問題

#### 3.1 制御評価値

分割評価関数を用いた準最適制御とは、準最適 LQ 制御問題 (付録参照) と同様に全制御段数をいくつかのブロックに分割し各ブロックで最適制御則を適用する方法である。

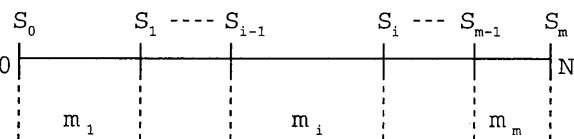


図 3:  $N$  段過程における  $m$  分割

最適制御を行った場合の制御評価値および初段観測値情報  $y(0)$  に基づく条件付期待値を取った最適評価値は次のようになる。

$$J_N = \sum_{j=0}^{N-1} \{ \|x_{j+1}\|_{V_{j+1}}^2 + \|u_j\|_{W_j}^2 \} \quad (13)$$

$$I_N^o = E\{J_N^o/y(0)\} \quad (14)$$

$$= \|\hat{x}_{0/0}\|_{P_N}^2 + \theta_N \quad (15)$$

分割評価関数を用いた準最適制御を行った場合の評価値は

$$J_N^s = \sum_{i=1}^m J_{m_i}^{so} \quad (16)$$

$$I_N^s = \sum_{i=1}^m E\{J_{m_i}^{so}/y_{(s_{i-1})}\} \quad (17)$$

$$= \sum_{i=1}^m I_{m_i}^{so} \quad (18)$$

となる。ここで、準最適制御の場合の条件付期待値を取る条件は各ブロックの初段観測値情報  $y_{(s_{i-1})}$  に基づく期待値となる。

### 3.2 評価値に関する関係式

確率系の準最適 LQG 制御問題において評価値は以下の関係が成立する。

$$J_N^o \leq \text{or} > J_N^s \quad (19)$$

$$I_N^o \leq \text{or} > I_N^s \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_N^o &\leq E\{I_N^s/y_{(0)}\} \\ &\leq I_{N_1}^{so} + E\{I_{N_2}^{so}/y_{(0)}\} \\ &\leq I_N^{s'} \end{aligned} \quad (21)$$

(19) 式の関係は、オンラインで得られる制御評価値は確定系の準最適 LQ 制御問題では準最適評価値の方が大きな値となり必ず劣化を生じていたのに対し、確率系の準最適 LQG 制御問題においては、システムの雑音の影響を受け一概に大小関係は定まらないという関係である。

(20) 式の関係は、制御評価値を各ブロックの初段観測値情報  $y_{(s_{i-1})}$  に基づく条件付期待値を取った場合にもシステムの雑音の影響を受け一概に大小関係は定まらないという関係である。(19), (20) 式の関係は 4 章の数値計算例により検証を行う。

(21) 式の関係では、さらに初段観測値情報  $y_{(0)}$  に基づく条件付期待値を取った場合には準最適評価値の方が大きな値となり劣化を生じるという関係である。この関係を全制御段数  $N$  を 2 分割した場合で証明を行う。

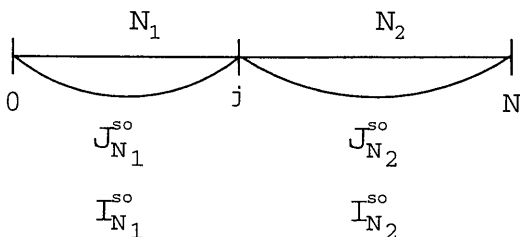


図 4: 全制御段数  $N$  を 2 分割

$$I_N^o = \min_{\{u_i\}_{i=0}^{N-1}} E\{J_N/y_{(0)}\} \quad (22)$$

$$I_N^{s'} = E\{J_{j,0}^o/y_{(0)}\} + E\{E\{J_{N-j,j}^o/y_{(j)}\}/y_{(0)}\} \quad (23)$$

$$= \min_{\{u_i\}_{i=0}^{j-1}} E\{J_{j,0}/y_{(0)}\} + E\{E\{\min_{\{u_i\}_{i=j}^{N-1}} J_{N-j,j}/y_{(j)}\}/y_{(0)}\}$$

$$= \min_{\{u_i\}_{i=0}^{j-1}} E\{J_{j,0}/y_{(0)}\} + E\{\min_{\{u_i\}_{i=j}^{N-1}} J_{N-j,j}/y_{(0)}\}$$

$$= E\{\min_{\{u_i\}_{i=0}^{j-1}} J_{j,0} + \min_{\{u_i\}_{i=j}^{N-1}} J_{N-j,j}/y_{(0)}\}$$

$$\geq E\{\min_{\{u_i\}_{i=0}^{N-1}} (J_{j,0} + J_{N-j,j})/y_{(0)}\} \quad (24)$$

$$= E\{\min_{\{u_i\}_{i=0}^{N-1}} J_N/y_{(0)}\}$$

$$= \min_{\{u_i\}_{i=0}^{N-1}} E\{J_N/y_{(0)}\}$$

$$= I_N^o \quad (25)$$

$$\therefore I_N^{s'} \geq I_N^o \quad (\text{証明終り})$$

全制御段数  $N$  を 2 分割した場合に (21) 式の関係が証明されたので、さらに  $j \sim N$  段において 2 分割を繰り返すと、 $m$  分割した場合でも (21) 式の関係は成立する。

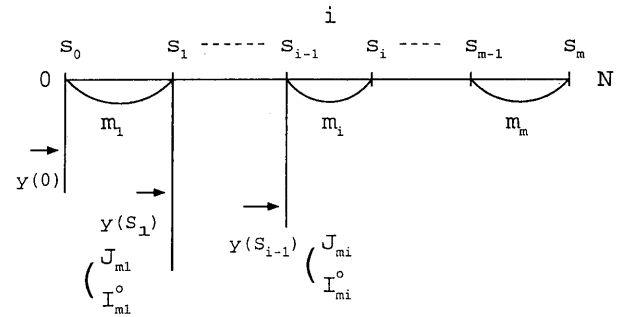


図 5: 全制御段数  $N$  を  $m$  分割

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \|x_{j+1}\|_{V_{j+1}}^2 + \|u_j\|_{W_j}^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m J_{m_i} \end{aligned} \quad (26)$$

$$I_{m_i}^o = \min_{\{u_k\}_{k=s_{i-1}}^{s_i-1}} E\{J_{m_i}/y_{(s_{i-1})}\}$$

$$I_N^o = \min_{\{u_k\}_{k=s_0=0}^{s_m-1=N-1}} E\{J_N/y_{(0)}\}$$

$$I_N^{s'} = \sum_{i=1}^m \min_{\{u_k\}_{k=s_{i-1}}^{s_i-1}} E\{J_{m_i}/y_{(0)}\} \quad (27)$$

ここで,  $\min \sum J(i) \leq \sum \min J(i)$  の関係より

$$\begin{aligned} I_N^o &\leq I_N^{s'} \\ &\leq \sum_{i=1}^m E\{E\{J_{m_i}/y_{(s_{i-1})}\}/y_{(0)}\} \\ &\leq \sum_{i=1}^m E\{I_{m_i}^o/y_{(0)}\} \\ &\leq I_{m_1}^o + \sum_{i=2}^m E\{I_{m_i}^o/y_{(0)}\} \end{aligned} \quad (28)$$

と表せる。

### 3.3 評価値劣化

本節では, (21) 式の関係で条件付期待値を取った場合の評価値劣化の定式化を行う。

$$I_N^{s'} = I_{m_1}^o + \sum_{i=2}^m E\{I_{m_i}^o/y_{(0)}\} \quad (29)$$

(29) 式の第1項は

$$I_{m_1}^o = \|\hat{x}_{0/0}\|_{P_{m_1}}^2 + \theta_{m_1} \quad (30)$$

(29) 式の第2項は

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^m E\{\|\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}\|_{P_{m_i}}^2 + \theta_{m_i}/y_{(0)}\} \\ &= \sum_{i=2}^m \left\{ \|E\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\}\|_{P_{m_i}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{tr}[P_{m_i} \text{Cov}\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\}] + \theta_{m_i} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで,  $E\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\}$  は条件付期待値演算公式により次のようになる。

$$\begin{aligned} E\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\} &= E\{E\{x_{s_{i-1}}/y_{(s_{i-1})}\}/y_{(0)}\} \\ &= E\{x_{s_{i-1}}/y_{(0)}\} \\ &= \Phi(s_{i-1})\hat{x}_{0/0} \end{aligned} \quad (32)$$

次に  $\text{Cov}\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\}$  は観測値に依存しないので

$$\text{Cov}\{\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}/y_{(0)}\} = C_{s_{i-1}/s_{i-1}} \quad (33)$$

となり, オフライン計算によって求まる。よって (31) 式は

$$\begin{aligned} &\sum_{i=2}^m E\{\|\hat{x}_{s_{i-1}/s_{i-1}}\|_{P_{m_i}}^2 + \theta_{m_i}/y_{(0)}\} \\ &= \sum_{i=2}^m \left\{ \|\Phi(s_{i-1})\hat{x}_{0/0}\|_{P_{m_i}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{tr}[P_{m_i} C_{s_{i-1}/s_{i-1}}] + \theta_{m_i} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

と表され, 全ブロックにわたってまとめると

$$\begin{aligned} I_N^{s'} &= I_{m_1}^o + \sum_{i=2}^m E\{I_{m_i}^o/y_{(0)}\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \|\Phi(s_{i-1})\hat{x}_{0/0}\|_{P_{m_i}}^2 + \theta_{m_i} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=2}^m \text{tr}[P_{m_i} C_{s_{i-1}/s_{i-1}}] \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_N}^2 + \sum_{i=1}^m \theta_{m_i} + C \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{ここで, } Q_N = \sum_{i=1}^m \Phi^T(s_{i-1})P_{m_i}\Phi(s_{i-1})$$

$$C = \sum_{i=2}^m \text{tr}[P_{m_i} C_{s_{i-1}/s_{i-1}}]$$

以上より評価値劣化は, 準最適評価値  $I_N^{s'}$  と最適評価値  $I_N^o$  の差  $\delta_N^s$  とすると

$$\begin{aligned} \delta_N^s &= I_N^{s'} - I_N^o \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_N}^2 + \sum_{i=1}^m \theta_{m_i} + C - \{\|\hat{x}_{0/0}\|_{P_N}^2 + \theta_N\} \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_N - P_N}^2 + \sum_{i=1}^m \theta_{m_i} - \theta_N + C \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_N - P_N}^2 + \theta_N^s + C \end{aligned} \quad (36)$$

評価値劣化を初期推定値  $\hat{x}_{0/0}$  で定式化することができた。また, (36) 式は確定系の劣化公式を包含した式となっており, より一般化された式として導出できた。

## 4. 数値計算例

### 4.1 1次元4段階過程

システムを1次元4段階過程とした場合で (19), (20) 式の関係を検証する。各パラメータは次のように設定する。試行回数は1000回で標本平均を求める。

$$\begin{aligned} A &= G = V = W = H = 1 \\ Q &= R = 1, \quad x_0 : N(10, 1) \end{aligned}$$

表 1: 1次元4段階過程の評価値

| 分割数 | 分割方法    | $J_4$ | $I_4$ |
|-----|---------|-------|-------|
| 0   | (最適)    | 72.5  | 72.6  |
| 2   | 3-1     | 72.3  | 72.5  |
|     | 2-2     | 73.1  | 77.3  |
|     | 1-3     | 76.7  | 78.8  |
| 3   | 2-1-1   | 73.1  | 77.1  |
|     | 1-2-1   | 73.1  | 78.9  |
|     | 1-1-2   | 79.8  | 80.4  |
| 4   | 1-1-1-1 | 81.6  | 82.2  |

数値計算結果より, 確定系の場合では, 分割を行うことにより評価値劣化が  $\delta > 0$  となっていたのに対し,

確率系の場合には、最適評価値に比べ、必ずしも準最適評価値の方が大きくなるはず劣化を生じないことがわかる。

#### 4.2 1次元2段階過程

次にシステムを1次元2段階過程とした場合で(21)式の関係の数値例を示す。

最適評価値  $I_2^s = 63.0$   
準最適評価値

$$\begin{aligned} I_2^s &= E\{I_2^s/y(0)\} \\ &= I_{1,0}^{s0} + E\{I_{1,1}^{s0}/y(0)\} \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_2}^2 + tr(P_1 C_{1/1}) + 2\theta_1 \end{aligned}$$

劣化公式を用いた値

$$\begin{aligned} \delta_2^s &= I_2^s - I_2^o \\ &= \|\hat{x}_{0/0}\|_{Q_2 - P_2}^2 + \theta_2 - 2\theta_1 + tr(P_1 L_1) \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

モンテカルロ法による  $\delta_2^s$  の値 (1000 回試行)

$$\delta_2^s = 2.5$$

表 2: 評価値劣化の関係

| 準最適評価値  | 分割方法 |
|---------|------|
| $I_2^s$ | 1-1  |
| $I_2^o$ | 62.6 |
| $I_2^s$ | 65.5 |

各ブロックの初段までの観測値情報に基づく条件付期待値を取った  $I_2^s$  では、評価値の大小関係が一概に定まらないのに対し、さらに初段観測値情報  $y(0)$  に基づく条件付期待値を取った  $I_2^o$  では、最適評価値より大きな値が得られ劣化を生じた。

また、劣化公式の評価値劣化はオンラインで得られる評価値劣化の期待値となっている。試行回数を増やすことにより劣化公式の理論値に近い値となることがわかる。

#### 4. 結言

本論では、分割評価関数を用いた準最適 LQG 制御問題において、評価値の考察と評価値劣化の定式化を行った。その結果、条件として初段観測値情報  $y(0)$  に基づく条件付期待値を取ることで、準最適評価値の方が大きな値となり劣化を生じるという関係を導出した。この評価値劣化式は、確定系の準最適 LQ 制御問題における劣化公式を包含する式となっており、より一般的な式になっている。数値計算例からもこの関係式の正当性が確認された。

#### 付録 分割評価関数を用いた準最適 LQ 制御問題

分割評価関数を用いた準最適制御とは、全制御段数をいくつかのブロックに分割し各ブロックで最適制御

則を適用する方法である。(図 6 参照)

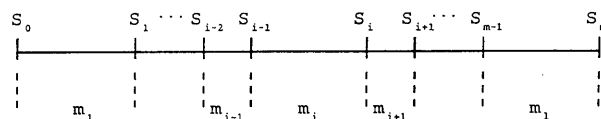


図 6: N 段階過程における  $m$  分割

- $x_{s_{i-1}}$  : 各ブロックにおける初期状態値
- $J_{m_i}^{s0}$  : 各ブロックにおける最適評価値
- $m$  : 分割数
- $i$  : ブロック番号
- $m_i$  :  $i$  番目ブロックの制御段数
- $s_i$  :  $i$  番目ブロックの初期段数

ここで、 $S_i = m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1} + m_i$  とする。この場合、各ブロックにおける評価値を  $J(m_i)$ , ( $i = 1 \sim m$ ) とし、 $m_i$  段階最適 LQ 制御を行う。このとき初期状態値は前ブロックでの最終状態値に等しくなり、 $m_i$  ブロックでの最適制御評価値  $J_{m_i}^{s0}$  は次のように表せる。

$$J_{m_i}^{s0} = \|x_{s_{i-1}}\|_{P_{m_i}}^2 \quad (37)$$

また、このときの  $N$  段階全体の制御評価値  $J_N^s$  は

$$J_N^s = \sum_{i=1}^m J_{m_i}^{s0} \quad (38)$$

$$= \sum_{i=1}^m \|x_{i-1}\|_{P_{m_i}}^2 \quad (39)$$

と表せる。

分割評価関数を用いた準最適制御を行うと操作量合成の際の計算が簡単化できるが、準最適操作量を用いるため評価値の劣化が生じる。この問題に対し、著者らは初期状態値の二次形式の式として劣化公式を導出した。評価値劣化を  $\delta$  で表すと

$$\delta = J_N^s - J_N^o > 0 \quad (40)$$

$$= \|x_0\|_{Q_N - P_N}^2 \quad (41)$$

$$\text{ここで } Q_N = \sum_{i=0}^{m-1} \Phi^T(s_i) P_{m_{i+1}} \Phi(s_i)$$

#### 参考文献

- 1) 橋本修輔:分割評価関数を用いた準最適 LQ,LQD 制御問題-分割評価による制御評価値劣化-, 宮崎大学工学部紀要, 第 28 号, sept.1999
- 2) 橋本修輔, 野村穰:分割評価関数を用いた次元可変準最適 LQ 制御問題, 第 20 回計測自動制御学会九州支部 学術講演会予稿集 pp.147-148 (2001)
- 3) 橋本修輔, 平岡豊:分割評価関数を用いた準最適 LQG 制御問題における評価値劣化, 第 21 回計測自動制御学会九州支部 学術講演会予稿集 pp.21-22 (2002)