最適原点到達 LQ 制御問題の最適 LQ 制御問題に対する評価値劣化

佐藤　寛太郎[1)]　・　橋本　修輔[2)]

Degradation of Performance Index Value to LQ Control Problem of Optimal Origin Reached LQ Control Problem

Abstract

In the optimal LQ control problem where the performance index value of quadratic form is minimized, the state value in final stage is not always reachable on the origin.

On the other hand, in the optimal origin reached control problem, an arbitrary initial state value is always reached to the origin subject to the performance index value of the quadratic form is minimized.

In adobe mentioned the optimal origin reached control problem,
Performance index value of system increases more than this value of the optimal LQ control problem.

When we analyze this value, there are two methods.

One is method of taking difference of value in each control method.

And another one is method by theory of suboptimal control problem that uses mechanism of making to pattern.

In this paper, we clarify degradation consistency in two methods theoretically and numerically.

Key Words:
LQ control problem, optimal origin reached LQ control problem, degradation of performance index value
suboptimal control problem, patternization

1.　はじめに

現代制御理論における最適 LQ(Linear Quadratic)制御問題は,システムが線形であり,評価関数を状態値と操作量の二次形式の和とし,これを最小とするような操作量を求めるものである。このように評価関数を設定することにより,任意の初期状態値を原点近傍に到達させ,かつ操作量の消費エネルギーを抑えることが可能となる。

しかし,この方法では,状態値の原点への不到達という問題が生じる。状態値を原点に確実に到達させるためには,原点到達制御を行えばよいが,その場合,制御段数により任意の選択できる操作量系列が生じるため,この選定の仕方によってはシステム全体においての消費エネルギーが膨大なものとなり,効率の悪い制御となる。

そこで消費エネルギーを抑えつつ,かつ状態値を確実に原点へ到達させる方策として,最適原点到達 LQ 制御がある。

これは,原点到達制御問題において,任意に選択できる操作量系列を最適 LQ 制御問題における二次形式の和で表した制御評価関数を最小にするという制約条件をつけて導出する制御法である。これにより,省エネルギーと原点到達の両面を考慮した最適な制御が可能になった。

1)　電気電子工学専攻大学院生
2)　電気電子工学助教授

一方,上記の「最適原点到達 LQ 制御」においては,システムの評価関数の値が「最適 LQ 制御」における制御評価値よりも大きくなってしまう。これを制御評価値の劣化と呼ぶ。

この評価値の劣化を解析するにあたって,２つの方法が考えられる。

一つはそれぞれの制御法で制御を行い,全制御段における制御評価値の差をとるものである。

もう一つは,制御系の操作量印加側に「パタン化機構」を組み入れることで,「準最適制御」における評価値劣化の理論を用いるものである。

最適原点到達 LQ 制御は最適 LQ 制御からみると,「準最適」であるといえる。ここでは,最適原点到達 LQ 制御に「パタン化機構を用いた準最適制御理論」を適用し,制御評価値の劣化を解析する。

2.　一括表示を用いた最適ＬＱ制御問題

2．1　問題の設定

遷移式　：$x_{j+1} = A_j x_j + G_j u_j$　(2.1)

制御評価　：$J_N = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\left\| x_{j+1} \right\|^2_{V_{j+1}} + \left\| u_j \right\|^2_{W_j} \right)$　(2.2)

この問題は、(2.2)式の制御評価を最小とする最適操作量系列を求めるものである。

２．２ 最適制御則

各段での状態値は,式(2.1)式より,

$$\begin{aligned} x_1 &= A_0 x_0 + G_0 u_0 \\ &= A(1,0)x_0 + G_0 u_0 \\ x_2 &= A_1 x_1 + G_1 u_1 \\ &= A(2,0)x_0 + A(2,1)G_0 u_0 + G_1 u_1 \\ &\ \ \vdots \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$x_N = A(N,0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A(N,i+1)G_i u_i \qquad (2.3)$$

であるので,任意のｊ＋１段の状態値は、

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= A(j+1,0)x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A(j+1,i+1)G_i u_i \qquad (2.4) \\ &= A(j+1,0)x_0 + C(j,0)U_N \end{aligned}$$

となる。ただし,

$$A(j,0) \equiv A_{j-1}A_{j-2}\cdots A_0 \qquad (.2.5)$$

$$C(j,0) \equiv \left[A(j+1,1)G_0 \,\vdots\, A(j+1,2)G_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, G_j \,\vdots\, 0 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, 0\right] \qquad (2.6)$$

Ｎｒ次元一括操作量ベクトルは,

$$U_N = \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

よって,１段からＮ段までの状態値は,

$$\begin{aligned} x_1 &= A(1,0)x_0 + C(0,0)U_N \\ x_2 &= A(2,0)x_0 + C(1,0)U_N \\ &\ \ \vdots \\ x_N &= A(N,0)x_0 + C(N,0)U_N \end{aligned}$$

となり,左辺の状態値を一括したＮｎ次元一括状態値ベクトルは,

$$X_N \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,0) \\ A(2,0) \\ \vdots \\ A(N,0) \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} C(0,0) \\ C(1,0) \\ \vdots \\ C(N-1,0) \end{bmatrix} U_N$$

$$= A_N x_0 + C_N U_N \qquad (2.8)$$

ただし,

$$A_N = \begin{bmatrix} A(1,0) \\ A(2,0) \\ \vdots \\ A(N,0) \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

$$C_N = \begin{bmatrix} C(0,0) \\ C(1,0) \\ \vdots \\ C(N-1,0) \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

制御評価関数を一括状態値ベクトル及び一括操作量ベクトルで考えると,

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x_{j+1}\|^2_{V_{j+1}} + \|u_j\|^2_{W_j}\right) \\ &= x_1^T V_1 x_1 + x_2^T V_2 x_2 + \cdots + x_N^T V_N x_N \\ &\quad + u_0^T W_0 u_0 + u_1^T W_1 u_1 + \cdots + u_{N-1}^T W_{N-1} u_{N-1} \end{aligned}$$

$$= \left[x_1^T \,\vdots\, x_2^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, x_N^T\right] \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$+ \left[u_0^T \,\vdots\, u_1^T \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, u_{N-1}^T\right] \begin{bmatrix} W_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= x_N^T V_N x_N + U_N^T W_N U_N \\ &= \|X_N\|^2_{V_N} + \|U_N\|^2_{W_N} \qquad (2.11) \end{aligned}$$

となる。ただし,

$$V_N \equiv \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_N \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

$$W_N \equiv \begin{bmatrix} W_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

である。

ここで,(2.8)式より,(2.2)式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} J_N &= \|A_N x_0 + C_N U_N\|^2_{V_N} + \|U_N\|^2_{W_N} \\ &= U_N^T (C_N^T V_N C_N + W_N) U_N \\ &\quad + 2U_N^T C_N^T V_N A_N x_0 + x_0^T A_N^T V_N A_N \qquad (2.14) \end{aligned}$$

極値条件より,

$$\frac{\partial J_N}{\partial U_N} = 2D_N U_N + 2C_N^T V_N A_N x_0 = 0 \qquad (2.15)$$

最適操作量 ： $U_N^{\circ} = -D_N^{-1} C_N^T V_N A_N x_0$ (2,16)

$= B_N x_0$ (2.17)

最適制御評価値 ： $J_N^{\circ} = J_N\left(U_N^{\circ}\right)$

$= \|x_0\|^2_{P_N}$ (2.18)

ただし,

$$D_N = C_N^T V_N C_N + W_N \qquad (2.19)$$

$$B_N = -D_N^{-1} C_N^T V_N A_N \qquad (2.20)$$

$$P_N = A_N^T V_N A_N + A_N^T V_N C_N B_N \qquad (2.21)$$

３． 最適原点到達ＬＱ制御問題

3．1　問題の設定

遷移式　：$x_{j+1}=A_j x_j+G_j u_j$ (3.1)

制御目的　：　$x_N=0$ (3.2)

制御評価　：　$J_N=\sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x_{j+1}\|^2_{V_{j+1}}+\|u_j\|^2_{W_j}\right)$ (3.3)

この問題は,式(3.3)式の二字形式評価を最小とし,かつ最終状態値を原点に到達させる最適操作量系列を求めるものである。

3．2　最適制御則

2 章と同様に,一括状態値ベクトル及び一括操作量ベクトルを用いて解析を行う。

$$x_{j+1}=A_{(j+1,0)}x_0+\sum_{i=0}^{j}A_{(j+1,i+1)}G_i u_i$$
$$=A_{(j+1,0)}x_0+C_{(j,0)}u_N \quad (3.4)$$

ここで、

$$u_N=\begin{bmatrix}u_0\\ \vdots\\ u_j\\ u_{j+1}\\ \vdots\\ u_{N-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u^e\\ u^a\end{bmatrix}：\quad \text{Ｎｒ次元ベクトル} \quad (3.5)$$

初段から最終段までの状態値を一括し,全段状態値を構成する。

$$X_N=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{(1,0)}\\ \vdots\\ A_{(N,0)}\end{bmatrix}x_0=\begin{bmatrix}C_{(0,0)}\\ \vdots\\ C_{(N-1,0)}\end{bmatrix}u_N$$
$$=A_N x_0+C_N u_N \quad (3.6)$$

また,(3.3)式での制御評価値は次式となる。

$$J_N=\sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x_{j+1}\|^2_{V_{j+1}}+\|u_j\|^2_{W_j}\right)$$
$$=\|X_N\|^2_{V_N}+\|u_N\|^2_{W_N}$$
$$=\|u_N\|^2_{D_N}+2u_N^T C_N^T V_N A_N x_0+\|x_0\|^2_{A_N^T V_N^T A_N} \quad (3.7)$$

ただし,

$$D_N=C_N^T V_N C_N+W_N \quad (3.8)$$

まず,原点到達操作量について考える。

$$x_{j+1}=A_{(j+1,0)}x_0+\sum_{i=0}^{j}A_{(j+1,i+1)}G_i u_i$$
$$=A_{(N,0)}x_0+\left[Q^e \mid Q^a\right]\begin{bmatrix}u^e\\ u^a\end{bmatrix}$$
$$=A_{(N,0)}x_0+Q_N u_N=\mathbf{0}\ \text{（原点）} \quad (3.9)$$

可制御性が成立している場合，Ｎｒ－ｎ次元ベクトルu^aを任意に選定すると,最終状態値を原点に到達させるｎ次元ベクトルu^eは一意に求まる。

$$u^e=-\left(Q^e\right)^{-1}\left(Q^a u^a+A_{(N,0)}x_0\right) \quad (3.10)$$

よって(3.5)式より、

$$u_N=\begin{bmatrix}u^e\\ \hline u^a\end{bmatrix}=L_N u^a+K_N A_{(N,0)}x_0$$
$$=L_N u^a+\bar{u}_N \quad (3.11)$$

ここで、

$$L_N=\begin{bmatrix}-\left(Q^e\right)^{-1}Q^a\\ \hline I\end{bmatrix},K_N=\begin{bmatrix}-\left(Q^e\right)^{-1}\\ \hline 0\end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\bar{u}_N=K_N A_{(N,0)}x_0 \quad (3.13)$$

(3.11)式を(3.7)式に代入して整理すると,

$$J_N=\left\|L_N u^a+\bar{u}_N\right\|^2_{D_N}$$
$$+2\left(L_N u^a+\bar{u}_N\right)^T C_N^T V_N A_N x_0+\|x_0\|^2 \quad (3.14)$$

極値条件$\partial J_N/\partial u^a=0$より、

$$u^{ao}=-\left(L_N^T D_N L_N\right)^{-1}L_N^T M_N x_0 \quad (3.15)$$

ここで、

$$M_N=D_N K_N A_{(N,0)}+C_N^T V_N A_N \quad (3.16)$$

よって,制御評価値を最小とする最適操作量系列ベクトルは次式のように表される。

$$u_N^*=L_N u^{ao}+\bar{u}_N$$
$$=\left\{K_N A_{(N,0)}-L_N\left(L_N^T D_N L_N\right)L_N^T M_N\right\}x_0$$
$$=B_N^* x_0 \quad (3.17)$$

また,最適制御評価値は次式で表される。

$$J_N^*=J_N\left(u_N^*\right)$$
$$=J_N\left(B_N^* x_0\right)=\|x_0\|^2_{P_N} \quad (3.18)$$

ここで,

$$B_N^*=K_N A_{(N,0)}-L_N\left(L_N^T D_N L_N\right)L_N^T M_N \quad (3.19)$$

$$P_N^*=A_N^T V_N A_N+2B_N^{*T}C_N^T V_N A_N+B_N^{T*}D_N B_N^* \quad (3.20)$$

3．3　評価値劣化

最適原点到達制御評価値(3.18)式と,最適ＬＱ制御問題における評価値(2.18)式との差を評価値劣化とすれば,その値は次式で表される。

$$\delta_N=J_N^*-J_N^{\circ}$$
$$=\|x_0\|^2_{P_N^*}-\|x_0\|^2_{P_N}$$
$$=\|x_0\|^2_{P_N^*-P_N} \quad \cdots(\mathrm{A}) \quad (3.21)$$

この式を評価値劣化式(A)とする。

4．　パタン化機構を用いた準最適ＬＱ制御問題 [1)]

4．1　問題の設定

遷移式　：$x_{j+1} = A_j x_j + G_j u_j$　(4.1)

制御評価　：　$J_N = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x_{j+1}\|^2_{V_{j+1}} + \|u_j\|^2_{W_j} \right)$　(4.2)

この問題は,最適ＬＱ制御での最適操作量の代わりに準最適操作量をシステムに印加し,解析を行うものである。

4．2　準最適制御則

操作量印加側にのみパタン化機構を組みいれた制御系を設定し,帰還状態値に最適帰還行列を直結して求めた準最適操作量をパタン化したパタン化操作量を系に印加したことによる制御評価値の劣化を解析する。

この場合,遷移式、評価値は次のように求められる。

遷移式　：　$x^s_{j+1} = A_j x^s_j + G_j u^p_j$　(4.3)

制御評価値　：　$J^s_N = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x^s_{j+1}\|^2_{V_{j+1}} + \|u^p_j\|^2_{W_j} \right)$　(4.4)

準最適操作量：　$u^s_j = B_{N-j} x^s_j$　(4.5)

ここで実際にシステムに印加された操作量u^p_jは,(4.5)式の準最適操作量をパタン化したパタン化操作量なので、この間には差が生じる。

これを操作量パタン化誤差と呼び,次式で表す。

操作量パタン化誤差　：　$\varepsilon_j = u^p_j - u^s_j$　(4.6)

4．3　評価値劣化

このパタン化誤差を用いて,パタン化操作量、準最適状態値を表すと,

$$
\begin{aligned}
u^p_j &= B_{N-1} x^s_j + \varepsilon_j \\
x^s_{j+1} &= A_j x^s_j + G_j u^p_j = A_j x^s_j + G_j (B_{N-1} x^s_j + \varepsilon_j) \\
&= \phi_j x^s_j + G_j \varepsilon_j
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

ここで,

$$\phi_j = A_j + G_j B_{N-1} \tag{4.8}$$

これより,

$$x^s_{j+1} = x^\circ_{j+1} + f_1(j) \tag{4.9}$$

$$u^p_j = u^\circ_j + f_2(j) \tag{4.10}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
f_1(j) &= \sum_{j=0}^{j} \phi(j+1, i+1) G_i \varepsilon_i \\
&= \phi_j \sum_{i=0}^{j-1} \Phi(j, i+1) G_i \varepsilon_j + G_j \varepsilon_j
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

$$f_2(j) = B_{N-1} \sum_{i=0}^{j-1} \Phi(j, i+1) G_j \varepsilon_j + \varepsilon_j \tag{4.12}$$

(4.11)，(4.12）式は,それぞれ,ｊ＋１段状態値と最適状態値およびj段パタン化操作量と最適操作量とのずれを表しており,そのずれは,０段からｊ段までの操作量パタン化誤差の線形結合となることを示している。

(4.11)、(4.12）式を（4.4）の式に代入すると,N 段過程準最適制御評価値が与えられる。

$$
\begin{aligned}
J^s_N &= \sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x^s_{j+1}\|^2_{V_{j+1}} + \|u^p_j\|^2_{W_j} \right) \\
&= J^\circ_N + 2\sum_{j=0}^{N-1}\left(x^{\circ T}_j V_{j+1} f_1(j) + u^{\circ T}_j W_j f_2(j) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{N-1}\left(\| f_1(j) \|^2_{V_{j+1}} + \| f_2(j) \|^2_{W_j} \right)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

(4.13）式右辺第２項および第３項が,パタン化操作量印加による制御評価値の劣化であり,これをδ_Nとする。

よって,パタン化操作量を用いた準最適ＬＱ制御評価値と最適ＬＱ制御評価値との差を評価値劣化とすれば,その値は次式で表される。

評価値劣化　：　$\delta_N = J^s_N - J^\circ_N$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \|\varepsilon_j\|^2_{Q_{\varepsilon(j)}} \tag{4.14}$$

ただし,

$$Q_{\varepsilon(j)} = G^T_j \left(V_{j+1} + P_{N-(j+1)} \right) G_j + W_j \tag{4.15}$$

この劣化式の導出は付録Ａに示す。

4．4　最適原点到達ＬＱ制御問題への適用

最適原点到達制ＬＱ御問題は,制御評価値の観点からみると,最適 LQ 制御問題に対しては「準最適制御」であるといえる。

ここでは、最適原点到達ＬＱ制御問題に「パタン化機構を用いた準最適ＬＱ制御問題」を適用し,制御評価値劣化の式を導出する。

最適原点到達ＬＱ制御理論で導出された遷移式,制御評価値を次式に示す。

遷移式　：　$x^*_{j+1} = A_j x^*_j + G_j u^*_j$　(4.16)

制御評価値　：　$J^*_N = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\|x^*_{j+1}\|^2_{V_{j+1}} + \|u^*_j\|^2_{W_j} \right)$　(4.17)

最適原点到達操作量　：　u^*_j

最適原点到達状態値　：　x^*_j　(4.18)

ここで最適原点到達ＬＱ制御問題にパタン化機構を適用すると,変数は次式のようになる。

準最適操作量　：　$u^s_j = B_{N-j} x^*_j$　(4.19)

パタン化操作量：　$u^p_j = u^*_j$　(4.20)

パタン化誤差　：　$\varepsilon_j = B_{N-j} x^*_j - u^*_j$　(4.21)

最適原点到達ＬＱ制御問題にパタン化機構を適用した場合の最適原点到達ＬＱ制御評価値と最適ＬＱ制御評価値との差（評価値劣化）は,次式で求まる。

評価値劣化　：　$\delta_N = J^*_N - J^\circ_N$

$$= \sum_{j=o}^{N-1} \left\|\varepsilon_j\right\|^2_{Q_{\varepsilon(j)}} \quad \cdot\cdot(\mathrm{B}) \qquad (4.22)$$

この式を評価値劣化式(B)とする。

5．　２つの評価値劣化式の同一性

5．1　N段過程における劣化式

劣化式(A),(B)の理論的関連性について解明する。

劣化式（A）は,初期状態値の関数として表されていることから,(B)式を変形し,初期状態値の関数とすることで,(A)式との同一性を比較できるようにする。

２つの制御法での評価値の差を取った値

$$\delta_N = \left\|x_0\right\|^2_{P_N^* - P_N} \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{A}) \qquad (5.1)$$

パタン化誤差を用いた値

$$\delta_N = \sum_{j=o}^{N-1} \left\|\varepsilon_j\right\|^2_{Q_{\varepsilon(j)}} \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{B}) \qquad (5.2)$$

これらの式を初期状態値の二次形式で表し,劣化荷重式を定義する。

まず,(5.1)の(A)式について考察する。

(3.20)式を変形する。

$$\begin{aligned} P_N^* &= A_N^T V_N A_N + 2B_N^{*T} C_N^T V_N A_N + B_N^{T*} D_N B_N^* \\ &= M_N Q_N M_N + A_N R_N A_N \qquad (5.3) \end{aligned}$$

ここで,

$$Q_N = D_N^{-1} - L_N (L_N^T D_N L_N)^{-1} L_N^T \qquad (5.4)$$

$$R_N = V_N - V_N C_N D_N^{-1} C_N^T V_N \qquad (5.5)$$

一方,(2.21)式を変形すると,

$$\begin{aligned} P_N &= A_N^T V_N A_N + A_N^T V_N C_N B_N \\ &= A_N^T V_N A_N + A_N^T V_N C_N (-D_N^{-1} C_N^T V_N A_N) \\ &= A_N^T (V_N + V_N C_N (-D_N^{-1} C_N^T V_N)) A_N \\ &= A_N^T R_N A_N \qquad (5.6) \end{aligned}$$

$$\therefore P_N^* - P_N = M_N^T Q_N M_N \qquad \cdot\cdot\cdot(\mathrm{a}) \qquad (5.7)$$

この式を(a)式とする。

次に(5.2)の(B)式について考察する。

(5.2)式を変形すると,

$$\begin{aligned} \delta_N &= \sum_{j=o}^{N-1} \left\|\varepsilon_j\right\|^2_{Q_{\varepsilon(j)}} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \Lambda & \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{\varepsilon(0)} & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & Q_{\varepsilon(1)} & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & Q_{\varepsilon(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ M \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix} \\ &= \varepsilon_{(N)}^T Q_{\varepsilon(N)} \varepsilon_{(N)} \qquad (5.8) \end{aligned}$$

ここで,

$$\varepsilon_{(N)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ M \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (5.9)$$

$$Q_{\varepsilon(N)} = \begin{bmatrix} Q_{\varepsilon(0)} & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & Q_{\varepsilon(1)} & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & \Lambda & Q_{\varepsilon(N-1)} \end{bmatrix} \qquad (5.10)$$

ここで,(5.9)式の成分を変形していくと,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= u_0^P - u_0^s = u_0^* - B_N x_0 \\ &= B_{1,1}^* x_0 - B_{1,1} x_0 = (B_{1,1}^* - B_{1,1}) x_0 = \Delta B_0 x_0 \qquad (5.11) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = u_1^P - u_1^s = u_1^* - B_{N-1} x_1^s$$

$$x_1^s = \phi_0 x_0 + G_0 \varepsilon_0 \qquad (5.12)$$

ε_1に(5.12)式を代入すると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= B_{2,1}^* x_0 - B_{N-1}(\phi_0 x_0 + G_0 \varepsilon_0) \\ &= (B_{1,1}^* - B_{N-1}\phi_0) x_0 - B_{N-1} G_0 \varepsilon_0 \\ &= \Delta B_1 x_0 - B_{N-1} G_0 \varepsilon_0 \\ &= \Delta B_1 x_0 - B_{N-1} \begin{bmatrix} G_0 & 0 & \Lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ M \\ \varepsilon_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (5.13) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_j = u_j^P - u_j^s = u_j^* - B_{N-j} x_j^s$$

$$\begin{aligned} x_{j+1}^s &= A_j x_j + G_j u_j^p \\ &= A_j x_j + G_j (u_j^s + \varepsilon_j) = (A_j + G_j B_{N-j}) x_0 + G_j \varepsilon_j \\ &= \phi_j x_j^s + G_j \varepsilon_j \end{aligned}$$

$$x_j^s = \phi(j,0) x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \Phi(j,i+1) G_i \varepsilon_i \qquad (5.14)$$

(5.12)式を(5.13)に代入すると,

$$x_{j+1}^s = \phi(j+1,0) x_0 + \sum_{i=0}^{j} \phi(j+1,i+1) G_i \varepsilon_i \qquad (5.15)$$

ε_jに(5.15)式を代入すると,

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= B_{j+1,1}^* x_0 + B_{N-j} (\phi(j+1,0) x_0 + \sum_{i=0}^{j} \phi(j+1,i+1) G_i \varepsilon_i) \\ &= (B_{j+1,1}^* - B_{N-j} \phi(j,o)) x_0 - B_{N-j} \sum_{i=0}^{j-1} \phi(j,i+1) G_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

$$= \left(B^{*}_{j+1,1} - B_{N-j}\phi(j,0)\right)x_0$$

$$- B_{N-j}\left[\phi(j,1)G_0 \mid \phi(j,2)G_1 \mid \cdots \mid G_{j-1} \mid 0 \mid \cdots \mid 0\right]\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_{j-1}\\ \varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_{N-1}\end{bmatrix}$$

$$= \Delta B_j x_0 - B_{N-j}\Phi(j)\varepsilon_{(N)} \tag{5.16}$$

(5.11),(5.13),(5.16)式より,

$$\varepsilon'_N = \begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_j\\ \vdots\\ \varepsilon_{N-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta B_0 x_0 - B_N\Phi(0)\varepsilon_{(N)}\\ \Delta B_1 x_0 - B_{N-1}\Phi(1)\varepsilon_{(N)}\\ \vdots\\ \Delta B_j x_0 - B_{N-j}\Phi(j)\varepsilon_{(N)}\\ \vdots\\ \Delta B_{N-1}x_0 - B_{N-j}\Phi(N-1)\varepsilon_{(N)}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\Delta B_0\\ \Delta B_1\\ \vdots\\ \Delta B_j\\ \vdots\\ \Delta B_{N-1}\end{bmatrix}x_0 - \begin{bmatrix}B_N\Phi(0)\\ B_{N-1}\Phi(1)\\ \vdots\\ B_{N-j}\Phi(j)\\ \vdots\\ B_1\Phi(N-1)\end{bmatrix}\varepsilon_{(N)}$$

$$= \Delta B_N - E_N\varepsilon_{(N)} \tag{5.17}$$

ここで,

$$\Delta B_N = \begin{bmatrix}\Delta B_0\\ \Delta B_1\\ \vdots\\ \Delta B_j\\ \vdots\\ \Delta B_{N-1}\end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$E_N = \begin{bmatrix}B_N\Phi(0)\\ B_{N-1}\Phi(1)\\ \vdots\\ B_{N-j}\Phi(j)\\ \vdots\\ B_1\Phi(N-1)\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

(5.17)式より,

$$\varepsilon_{(N)} = \left(I_n + E_N\right)^{-1}\Delta B_N x_0$$

(5.8)式に代入すると,

$$\begin{aligned}\delta_N &= \varepsilon^{T}_{(N)}Q_{\varepsilon(N)}\varepsilon_{(N)}\\ &= x_0^{T}\left[\Delta B_N\left(I_n + E_N\right)^{-T}Q_{\varepsilon(N)}\left(I_n + E_N\right)^{-1}\Delta B_N\right]x_0\\ &= \left\|x_0\right\|^2_{F_N}\end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで,

$$F_N = \Delta B_N\left(I_n + E_N\right)^{-T}Q_{\varepsilon(N)}\left(I_n + E_N\right)^{-1}\Delta B_N \tag{5.21}$$

この式を(b)式とする。

結局,評価値劣化式の同一性即ち(A)=(B)より,劣化荷重式の同一性即ち(a)=(b)が解明される。

5．2　数値例

演算ソフトＭＡＴＬＡＢによって作成したプログラムを用いて,数値計算を行う。以下にパラメータを設定する。

$$x_{j+1} = Ax_j + Gu_j\ ,\quad x_0 = \begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix}\ \text{（初期状態値）} \tag{5.22}$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{5.23}$$

2次元5段過程

最適操作量u°_j,最適原点到達操作量u^{*}_j,操作量パタン化誤差ε_jの値を示す。

表1．それぞれの値の比較

j	u°_j	u^{*}_j	ε_j
0	-6.216	-6.250	-0.034
1	-0.592	-0.625	-0.075
2	0.658	0.625	-0.130
3	0.590	0.625	-0.125
4	0.285	0.625	0.208

最適ＬＱ制御評価値

$$J^{\circ}_5 = \left\|x_0\right\|^2_{P_5} = 65.287 \tag{5.24}$$

最適原点到達ＬＱ制御評価値

$$J^{*}_5 = \left\|x_0\right\|^2_{P^*_5} = 65.625 \tag{5.25}$$

(5.1)式(A)と,(5.2)式(B)について,2次元5段過程での数値例を示す。

表2.(A)と(B)の制御評価劣化値の比較

制御段数	$J^{*}_N - J^{\circ}_N$	$\sum_{j=0}^{4}\left\|\varepsilon_j\right\|^2_{Q_{\varepsilon(j)}}$
5	0.338	0.338

(5.7)式(a)と(5.21)式(b)の数値例を示す。

表 3. (a)と(b)の劣化荷重値の比較

制御段数	$P_N^* - P_N^\circ$	F_N
5	$\begin{bmatrix} 0.0035 & 0.0033 \\ 0.0033 & 0.0034 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0035 & 0.0033 \\ 0.0033 & 0.0034 \end{bmatrix}$

６. まとめ

本研究では,最適原点到達ＬＱ制御問題の最適ＬＱ制御問題に対する制御評価値劣化について２つの手法を用いてその特性を解明した。

２つの制御法での最適制御評価値の関連性を,評価劣化値と劣化荷重行列の視点から考察した。

すなわち，評価値劣化式(A),(B)と劣化荷重式(a),(b)との理論関連性について解明した。

付録Ｂでは,１次元２段過程におけるこれらの同一性を,理論的に証明した。

参考文献

(1) 橋本：パタン化状態値及びパタン化操作量を用いた準最適 LQ 制御問題，九大工学集報，第５１巻第４号 (1998)

(2) 橋本、樋口：最適原点到達制御問題における最適解の特性，宮崎大学工学部紀要，第 33 号(2004)

(3) 金城：最適ＬＱＤ制御問題における評価値劣化特性,平成１７年度修士論文(2006)

(4) 佐藤：ＭＡＴＬＡＢを用いた最適原点到達制御問題，平成１６年度卒業論文(2005)

(5) 橋本,佐藤：最適原点到達ＬＱ制御問題における制御評価値の劣化特性,電気関係学会九州支部第 59 回連合大会 (2006)

付録

付録Ａ　評価値劣化公式

$$\delta_N = 2\sum_{j=0}^{N-1}\left(x^{\circ\,T}_{j+1} V_{j+!} f_1(j) + u^{\circ\,T}_j W_j f_2(j)\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{N-1}\left(\| f_1(j)\|^2_{V_{j+1}} + \| f_2(j)\|^2_{W_j}\right) \tag{A.1}$$

$$= 2x^{\circ\,T}_0 \sum_{j=0}^{N-1}\left[\Psi^T(j,0)\left\{\left(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j + B^T_{N-j} W_j B_{N-j}\right)\varepsilon_j\right\}\right]$$

$$\sum_{j=0}^{N-1}\left\{\left\|\sum_{i=o}^{N-1}\Phi(j,i+1)G_j\varepsilon_j\right\|^2_{\left(\Phi_j^T V_{j+1}\Phi_j + B^T_{N-j} W_j B_{N-j}\right)}\right. \tag{A.2}$$

$$+\left\|\varepsilon_j\right\|^2_{\left(G_j^T V_{j+1} G_j + W_j\right)}$$

$$\left. + 2\left(\sum_{i=0}^{j-1}\Phi(j,i+1)G_j\varepsilon_j)^T\right)\left(\phi_j^T V_{j+1} G_j + B^T_{N-j} W_j\right)\varepsilon_j\right\}$$

$$= \|y\|^2_{Q_{\varepsilon(N)}} \tag{A.3}$$

ここで, $y \equiv \left(x^\circ T_0, \varepsilon_0^T, \Lambda, \varepsilon^T_{N-1}\right)^T$ は, n+Nr次元ベクトルとし, $Q_{\varepsilon(N)}$ は行列 $Q_{\varepsilon(i,j)}$ を要素とし, n+Nr次元対象行列とする。

$Q_{\varepsilon(N)} =$

$$\begin{bmatrix} Q_{\varepsilon(-1,-1)} & Q_{\varepsilon(-1,0)} & \Lambda\Lambda\Lambda & Q_{\varepsilon(-1,N-1)} \\ Q_{\varepsilon(0,-1)} & Q_{\varepsilon(0,0)} & \Lambda\Lambda\Lambda & Q_{\varepsilon(0,N-1)} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ Q_{\varepsilon(N-1,-1)} & Q_{\varepsilon(N-1,0)} & \Lambda\Lambda\Lambda & Q_{\varepsilon(N-1,N-1)} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

(A.2)式右辺と(A.4)式の要素行列を対応させると,次の諸式が得られる。

(i) $Q_{\varepsilon(-1,-1)} = 0$ (A.5)

(ii) $Q_{\varepsilon(-1,i)} = Q^T_{\varepsilon(i,-1)}$

$$= \sum_{j=0}^{N=1}\Phi^T(j,0)\left(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j + B^T_{N-j} W_j B_{N-j}\right)\Phi(j,i+1)G_i$$

$$+\Phi^T(i,0)\left(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j + B^T_{N-i} W_i\right)$$

$$= \Phi^T(i,0)\{\phi_i^T \sum_{j=i+1}^{N-1}\Phi^T(j,i+1)(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j$$

$$+ B^T_{N-j} W_j B_{N-j})\Phi(j,i+1)G_j + \phi_j^T V_{j+1} G_j + B^T_{N-1} W_j\}$$

$$= \Phi^T(i,0)\left\{\phi_i^T\left(V_{j+1} + P_{N-(j+1)}\right)G_j + B^T_{N-i} W_j\right\}$$

$$= 0 \quad , \quad 0 \le i \le N-2 \tag{A.6}$$

(iii) $Q_{\varepsilon(-1,N-1)} = Q^T_{\varepsilon(N-1,-1)}$

$$= \Phi(N-1,0)\left(\phi^T_{N-1} V_N G_{N-1} + B_1^T W_{N-1}\right) \tag{A.7}$$

$$= 0$$

(iv) $Q_{\varepsilon(i,i)} = \sum_{j=0}^{N-1}\{G_i^T \Phi^T(j,i+1)$

$$\times\left(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j + B^T_{N-j} W_j B_{N-j}\right)\Phi(j,i+!)G_i\}$$

$$+ G_i^T V_{j+1} G_i + W_i$$

$$= G_i^T\left(V_{j+1} + P_{N-(i+1)}\right)G_i + W_i$$

$$0 \le i \le N-1 \tag{A.8}$$

(v) $Q_{\varepsilon(i,l)} = Q_{\varepsilon(l,i)}$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\{G_j^T \Phi^T(j,i+1)(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j$$

$$+ B^T_{N-j} W_j B_{N-j})\Phi(j,l+1)G_l\}$$

$$= G_i^T \Phi^T(l,i+1)\{\phi_l^T \sum_{j=l+1}^{N-1}\Phi^T(j,l+1)G_l$$

$$\times\left(\phi_j^T V_{j+1}\phi_j + B^T_{N-j} W_j B_{N-j}\right)\Phi^T(j,l+1)G_l$$

$$+ \phi_j^T V_{l+1} G_l + B^T_{N-l} W_l\}$$

$$= G_i^T \Phi^T(l,i+1)\left\{\phi_l^T\left(V_{l+1} + P - N - (l+1)G_l + B^T_{N-l} W_l\right)\right\}$$

$$= 0 \quad , \quad 0 \le i \le N-2 \tag{A.9}$$

(vi) $Q_{\varepsilon(i,N-1)} = Q^T_{\varepsilon(N-1,i)}$

$$= G_j^T \Phi^T(N-1,i+1)\left(\phi^T_{N-1} V_N G_{N-1} + B_1^T W_{N-1}\right)$$

$$=0 \quad , \quad 0 \le i \le N-2 \tag{A.10}$$

(i)~(vi)より,(A.3)式は次式となる。

$$\delta_N = \sum_{j=0}^{N-1} \|\varepsilon_j\|^2_{Q_\varepsilon(j,j)} \tag{A.11}$$

付録B　1次元2段過程での数値的証明

B1　最適LQ制御

状態値,遷移式を次のように与える。

$$x_{j+1} = ax_j + gu_j$$

$$J_2 = \sum_{j=0}^{1} (x_{j+1}^2 v + u_j^2 w)$$

B1．1　D.P法

$$P_0 = 0$$

$$s_1 = g^2 (v + P_0) + w$$

$$B_1 = -s_1^{-1} gva = -\frac{gva}{g^2 v + w}$$

$$P_1 = av(a + gB_1) = av(a - \frac{g^2 va}{g^2 v + w}) = \frac{a^2 wv}{g^2 v + w}$$

$$s_2 = g^2 (v + P_1) + w = \frac{g^4 v^2 + g^2 (2 + a^2) vw + w^2}{g^2 v + w}$$

$$B_2 = -s_2^{-1} g(v + P)a$$

$$= -\frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{v^2 g^4 + (2 + a^2) vwg^2 + w^2} ag$$

$$= -\frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{\Delta B} ag$$

$$P_2 = a(v + P_1)(a + gB_2)$$

$$= a\frac{\{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw\}(g^2 v + w)wa}{(g^2 v + w)\Delta B}$$

$$= \frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{\Delta B} wa^2$$

$$\Delta B = v^2 g^4 + (2 + a^2) vwg^2 + w^2$$

$$u_0^\circ = B_2 x_0 = -\frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{\Delta B} agx_0$$

$$x_1^0 = ax_0 + gu_0^\circ = -\frac{(g^2 v + w)wa}{\Delta B} x_0$$

$$u_1^\circ = B_1 x_1^\circ = -\frac{vwga^2}{\Delta B} x_0$$

$$x_2^\circ = ax_1^\circ + gu_1^\circ = \frac{w^2 a^2}{\Delta B} x_0$$

$$J_2^\circ = \sum_{j=0}^{1} (x_{j+1}^{\circ 2} v + u_j^{\circ 2} w)$$

$$\frac{(g^2 v + w)^2 w^2 a^2}{(\Delta B)^2} x_0^{\ 2} +$$

$$\frac{\{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw\}^2}{(\Delta B)^2} a^2 g^2 w x_0^{\ 2}$$

$$+ \frac{w^4 a^4}{(\Delta B)^2} vx_0^{\ 2} + \frac{(vwga^2)^2}{(\Delta B)^2} wx_0^{\ 2}$$

$$= \frac{\Delta B\{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw\}}{(\Delta B)^2} wa^2 x_0^2 = \frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{\Delta B} wa^2 x_0^2 = P_2 x_0^2$$

$$P_2 = \frac{v^2 g^2 + (1 + a^2) vw}{\Delta B} wa^2$$

B1．2　一括法

一括操作量　：　$u_2 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}$

$$x_1 = ax_0 + gu_0 = A(1,0)x_0 + C(0,0)u_2$$

$$x_2 = ax_1 + gu_1 = a^2 x_0 + agu_0 + gu_1 = A(2,0)x_0 + C(1,0)u_2$$

一括状態値　：

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(1,0) \\ A(2,0) \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} C(0,0) \\ C(1,0) \end{bmatrix} u_2 = A_2 x_0 + C_2 u_2$$

ここで,

$$A_2 = \begin{bmatrix} A(1,0) \\ A(2,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ a^2 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} C(0,0) \\ C(1,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ ag & g \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = v\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , W_2 = w\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \|A_2 x_0 + C_2 u_2\|^2_{V_2} + \|u_2\|^2_{W_2}$$

$$u_2^\circ = \begin{bmatrix} u_0^\circ \\ u_1^\circ \end{bmatrix} = B_2 x_0 = \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix} x_0$$

ここで,

$$D_2 = C_2^T V_2 C_2 + W_2 = vg^2 \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= vg^2 \begin{bmatrix} 1 + a^2 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vg^2 + w + vg^2 a^2 & vg^2 a \\ vg^2 a & vg^2 + w \end{bmatrix}$$

$$D_2^{-1} = \frac{1}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + w & -vg^2 a \\ -vg^2 a & vg^2 + w + vg^2 a^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta D = (vg^2 + w)^2 + vg^2 a^2 w = v^2 g^4 + (2 + a^2) vwg^2 + w^2 = \Delta B$$

$$B_2 = -D_2^{-1} C_2^T V_2 A_2$$

$$= \frac{-gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + w & -vg^2 a \\ -vg^2 a & vg^2 + w + vg^2 a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + w & -vg^2 a \\ -vg^2 a & vg^2 + w + vg^2 a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 + a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} (vg^2 + w)(1 + a^2) - vg^2 a^2 \\ -vg^2 a(1 + a^2) + (vg^2 + w)a + vg^2 a^3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + (1 + a^2) w \\ wa \end{bmatrix}$$

$$u_2^\circ = \begin{bmatrix} u_0^\circ \\ u_1^\circ \end{bmatrix} = B_2 x_0 = \frac{-ga}{\Delta B}\begin{bmatrix} v^2 g^2 + (1 + a^2) wv \\ vwa \end{bmatrix} x_0$$

$$P_2 = A_2^T (V_2 - V_2 C_2 D_2^{-1} C_2^T V_2) A_2 = A_2^T R_2 A_2$$

$$= a^2 v[1 \quad a]\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} - avg[1 \quad a]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\frac{gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + (1 + a^2) w \\ wa \end{bmatrix}$$

$$= a^2 v(1 + a^2) - [1 \quad a]\frac{g^2 v^2 a^2}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2 + (1 + a^2) w \\ vg^2 a + (1 + a^2) aw + wa \end{bmatrix}$$

$$= a^2 v(1+a^2) - \frac{g^2v^2a^2}{\Delta D}\{vg^2 + (1+a^2)w + vg^2a^2 + (1+a^2)wa^2 + wa^2\}$$

$$= \frac{1}{\Delta D}\{a^2v(1+a^2)\Delta D - a^2g^2v^2\{(1+a^2)(vg^2+w) + (2+a^2)wa^2\}$$

$$= \frac{a^2vw\{(1+a^2)w+vg^2\}}{\Delta D} = \frac{(1+a^2)vw+v^2g^2}{\Delta B}wa^2 = P_2$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1\phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_1(a+gB_2) \end{bmatrix}$$

Ｂ２　最適原点到達ＬＱ制御

$$x_2 = ax_1 + gu_1 = a^2x_0 + agu_0 + gu_1 = A(2,0)x_0 + A(2,1)gu_0 + gu_1$$

$$x = x_2 - A(2,0)x_0 = \begin{bmatrix} A(2,1)g & g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^e \\ u^a \end{bmatrix} = Q^eu^e + Q^au^a$$

$$u^e = -Q^{e-1}(Q^au^a + A(2,0)x_0)$$

一括状態値　：

$$x_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_2x_0 + C_2u_2$$

$$A_2 = a\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, C_2 = g\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

制御評価値　：

$$J_2 = \|u_2\|^2_{D_2} + 2x_0A_2^TV_2C_2u_2 + x_0^2A_2^TV_2A_2$$

$$V_2 = v\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, W_2 = w\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_2 = C_2^TV_2C_2 + W_2$$

一括操作量　：

$$u_2 = \begin{bmatrix} u^e \\ u^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q^{e-1}(Q^au^a + A(2,0)x_0) \\ u^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q^{e-1}Q^a \\ 1 \end{bmatrix}u^a + \begin{bmatrix} -Q^{e-1}A(2,0)x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_2 \\ 1 \end{bmatrix}u^a + \bar{u}_2 \equiv L_2u^a + \bar{u}_2$$

ここで,

$$L_2 = \begin{bmatrix} T_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q^{e-1}Q^a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -Q^{e-1}A(2,0)x_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q^{e-1} \\ 0 \end{bmatrix}A(2,0)x_0 = K_2A(2,0)x_0$$

$$= \begin{bmatrix} -(ag)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}a^2x_0$$

$$u^{ao} = -(L_2^TD_2L_2)^{-1}L_2^TM_2x_0$$

$$D_2 = C_2^TV_2C_2 + W_2 = \begin{bmatrix} vg^2 + w + vg^2a^2 & vg^2a \\ vg^2a & vg^2 + w \end{bmatrix}$$

$$M_2 = D_2K_2A(2.0) + C_2^TV_2A_2$$

$$= \begin{bmatrix} vg^2 + w + vg^2a^2 & vg^2a \\ vg^2a & vg^2 + w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -(ag)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}a^2 + gva\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -ag^{-1}(vg^2 + w + vg^2a^2) \\ -vg^2a \end{bmatrix} + gav\begin{bmatrix} 1+a^2 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -ag^{-1}(vg^2 + w + vg^2a^2) + (1+a^2)gva \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_2^TD_2L_2 = \begin{bmatrix} -a^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vg^2 + w + vg^2a^2 & vg^2a \\ vg^2a & vg^2 + w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{a^2}(vg^2 + w + vg^2a^2) - 2vg^2 + vg^2 + w = \frac{1}{a^2}(vg^2 + w) + w = \frac{vg^2 + (1+a^2)w}{a^2}$$

$$(L_2^TD_2L_2)^{-1} = \frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}$$

$$u^{ao} = -\frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}\begin{bmatrix} -a^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}x_0$$

$$= -\frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}\frac{w}{g}x_0 = u_1^*$$

$$u^{eo} = -\frac{1}{ag}\{-\frac{a^2w}{vg^2 + (1+a^2)w} + a^2\}x_2 = -\frac{a}{g}\frac{(-w + vg^2 + (1+a^2)w}{(vg^2 + (1+a^2)w}x^2$$

$$= \frac{-a(vg^2 + a^2w)}{g\{vg^2 + (1+a^2)w\}}x_0 = u_o^*$$

$$x_1^* = ax_0 + gu_0^* = \{a - \frac{-a(vg^2 + a^2w)}{\{vg^2 + (1+a^2)w\}}\}x_0$$

$$= \frac{aw}{vg^2 + (1+a^2)w}x_0$$

$$x_2^* = ax_1 + gu_1^* = \{\frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w} - \frac{a^2w}{vg^2 + (1+a^2)w}\}x_0 = 0$$

$$J_2^* = \sum_{j=0}^{1}(x_{j+1}^{*2}v + u_j^{*2}w)$$

$$= \frac{a^2w^2v + a^2(vg^2 + a^2w)^2w + a^4(wg^{-1})^2w}{\{vg^2 + (1+a^2)w\}^2}x_0^2$$

$$= a^2w\frac{w^2vg^2 + (vg^2 + a^2w)^2g^2 + a^2w^2}{g^2\{vg^2 + (1+a^2)w\}^2}x_0^2$$

$$u_2^* = \begin{bmatrix} u_0^* \\ u_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{eo} \\ u^{ao} \end{bmatrix} = B_2^*x_0$$

$$B_2^* = K_2A(2,0) - L_2(L_2^*D_2L_2)^{-1}L_2^TM_2$$

$$= \begin{bmatrix} -ag^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}\begin{bmatrix} -a^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -a^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -ag^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}\begin{bmatrix} a^{-2} & -a^{-1} \\ -a^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -ag^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w}\begin{bmatrix} -wa^{-1}g^{-1} \\ wg^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ag^{-1}\{1 - \frac{w}{vg^2 + (1+a^2)w}\} \\ -\frac{a^2w}{\{vg^2 + (1+a^2)w\}g} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a(vg^2 + a^2w)}{-g\{vg^2 + (1+a^2)w\}} \\ \frac{-a^2w}{g\{vg^2 + (1+a^2)w\}} \end{bmatrix} = -\frac{a}{g\Delta L}\begin{bmatrix} vg^2 + a^2w \\ aw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^*_{1,1} \\ B^*_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$u_2^* = \begin{bmatrix} u_0^* \\ u_1^* \end{bmatrix} = B_2^*x_0$$

$$J_2^* = x_0^2P_2^*$$

$$P_2^* = M_2^TQ_2M_2 + A_2^TR_2A_2$$

$$Q_2 = D_2^{-1} - L_2(L_2^TD_2L_2)^{-1}L_2^T$$

$$R_2 = V_2 - V_2C_2D_2^{-1}C_2^TV_2$$

$$M_2 = D_2K_2A(2,0) + C_2^TV_2A_2 = \begin{bmatrix} -awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(L_2^T D_2 L_2)^{-1} = \frac{a^2}{vg^2 + (1+a^2)w} = \frac{a^2}{\Delta L}$$

ここで，$\Delta L = vg^2 + (1+a^2)w$

$$Q_2 = \frac{1}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2+w & -vg^2a \\ -vg^2a & vg^2+w+vg^2a^2 \end{bmatrix} - \frac{a^2}{vg^2+(1+a^2)w}\begin{bmatrix} a^{-2} & a^{-1} \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2+w & -vg^2a \\ -vg^2a & vg^2+w+vg^2a^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta L}\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & a^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta D \Delta L}\begin{bmatrix} \Delta L(vg^2+w)-\Delta D & -\Delta L vg^2a+\Delta D a \\ -\Delta L vg^2 a+\Delta D a & \Delta L(vg^2+w+vg^2a^2)-\Delta D a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$M_2^T Q_2 M_2 = \begin{bmatrix} -awg^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} awg^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = a^2w^2g^{-2}Q_{1,1}$$

$$Q_{1,1} = \frac{1}{\Delta D \Delta L}\{\Delta L(vg^2+w)-\Delta D\}$$

$$\Delta L(vg^2+w)-\Delta D = \{vg^2+(1+a^2)w\}(vg^2+w)-(vg^2+w)^2-vg^2a^2w$$
$$= (vg^2+w)^2 + a^2w(vg^2+w)-(vg^2+w)^2-vg^2a^2w$$
$$= a^2w^2$$

$$\therefore Q_{1,1} = \frac{a^2w^2}{\Delta D \Delta L} = \frac{a^2w^2}{\{(vg^2+w)^2+vg^2a^2w\}\{vg^2+(1+a^2)w\}}$$

$$\therefore M_2^T Q_2 M_2 = \frac{a^4w^4}{g^2 \Delta D \Delta L}$$

$$R_2 = vI_2 - v^2g^2\frac{1}{\Delta D}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vg^2+w & -vg^2a \\ -vg^2a & vg^2+w+vg^2a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= vI_2 - \frac{v^2g^2}{\Delta D}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vg^2+w & wa \\ -vg^2a & vg^2+w \end{bmatrix}$$

$$= vI_2 - \frac{v^2g^2}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2+w & wa \\ wa & vg^2+w+wa^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{v}{\Delta D}\begin{bmatrix} \Delta D - vg^2(vg^2+w) & -vg^2wa \\ -vg^2wa & \Delta D - vg^2(vg^2+w+wa^2) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{vw}{\Delta D}\begin{bmatrix} vg^2(1+a^2)+w & -vg^2a \\ -vg^2a & vg^2+w \end{bmatrix}$$

$$A_2^T R_2 A_2 = \frac{a^2vw}{\Delta D}\begin{bmatrix} 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} vg^2(1+a^2)+w & -vg^2a \\ -vg^2a & vg^2+w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a^2vw}{\Delta D}\{vg^2+(1+a^2)w\} = \frac{a^2vw}{\Delta D}\Delta L = P_2$$

$$P_2^* = \frac{a^4w^4}{g^2\Delta D \Delta L} + \frac{a^2vw}{\Delta D}\Delta L = \frac{a^4w^4}{g^2\Delta D\Delta L} + P_2$$

$$P_2^* - P_2 = \frac{a^4w^4}{g^2\Delta D\Delta L} \qquad \text{(B.1)}$$

B３　パタン化機構を用いた最適原点到達ＬＱ制御

パタン化評価値劣化　：　$\delta_2 = \sum_{j=0}^{1} \varepsilon_j Q_{\varepsilon(j)}$

$$\delta_2 = \sum_{j=0}^{1}\varepsilon_j Q_{\varepsilon(j)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{\varepsilon(0)} & 0 \\ 0 & Q_{\varepsilon(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \varepsilon_2'^T Q_{\varepsilon(2)}\varepsilon_2'$$

$$Q_{\varepsilon(0)} = v^2(v+P_1)+w = s_2 = \frac{\Delta D}{g^2v+w}$$

$$Q_{\varepsilon(1)} = g^2(v+P_0)+w = s_1 = g^2v+w$$

$$\varepsilon_2 = u_0^P - u_0^s = u_0^* - B_2x_0 = B_{1,1}^*x_0 - B_{1,1}x_0 = (B_{1,1}^* - B_{1,1})x_0$$

$$\varepsilon_1 = u_1^P - u_1^s = u_1^* - B_1x_1^s$$

$$x_1^s = ax_0 + gu_0^p = ax_0 + g(u_0^s + \varepsilon_0) = (a+gB_2)x_0 + g\varepsilon_0$$
$$= \phi_0x_0 + g\varepsilon_0$$

$$\therefore \varepsilon_1 = u_1^P - u_1^s = B_{2,1}^*x_0 - B_1(\phi_0x_0 + g\varepsilon_0)$$
$$= B_{2,1}^*x_0 - B_{2,1}x_0 - B_1g\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_2' = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1,1}^* - B_{1,1} \\ B_{2,1}^* - B_{2,1} \end{bmatrix}x_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_1g \end{bmatrix}\varepsilon_0$$

$$= (B_2^* - B_2)x_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_1g & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \Delta B_2x_0 + E_2\varepsilon_2'$$

$$\therefore \varepsilon_2' = (I-E_2)^{-1}\Delta B_2x_0$$

$$\delta_2 = \varepsilon_2'^T Q_{\varepsilon(2)}\varepsilon_2' = \Delta B_2^T(I-E_2)^{-T}Q_{\varepsilon(2)}(I-E_2)^{-1}\Delta B_2x_0^2 \equiv F_2x_0^2$$

ここで，$F_2 = \Delta B_2^T(I-E_2)^{-T}Q_{\varepsilon(2)}(I-E_2)^{-1}\Delta B_2$

$$\Delta B_2 = B_2^* - B_2$$

$$= -\frac{a}{g\Delta L}\begin{bmatrix} vg^2+a^2w \\ aw \end{bmatrix} + \frac{gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} \Delta L \\ aw \end{bmatrix} = -\frac{a}{g\Delta L}\begin{bmatrix} \Delta L - w \\ aw \end{bmatrix} + \frac{gva}{\Delta D}\begin{bmatrix} \Delta L \\ aw \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a}{a\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} g^2v\Delta L^2 - \Delta D(\Delta L - w) \\ aw(g^2v\Delta L - \Delta D) \end{bmatrix} = \frac{a}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} *_{1,1} \\ aw *_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$*_{1,1} = g^2v\{vg^2+(1+a^2)w\}^2 - \{v^2g^4+(2+a^2)vwg^2+w^2\}(vg^2+a^2w)$$
$$= v^3g^6 + 2(1+a^2)v^2g^4w + (1+a^2)g^2vw^2 - v^3g^6 - a^2v^2g^4w$$
$$- (2+a^2)v^2g^4w - (2+a^2)a^2vg^2w^2 - vg^2w^2 - a^2w^3$$
$$= -a^2w^3$$

$$*_{1,2} = g^2v\{vg^2+(1+a^2)w\} - \{v^2g^4+(2+a^2)vwg^2+w^2\}$$
$$= v^2g^4 + (1+a^2)g^2vw - v^2g^4 - (2+a^2)vwg^2 - w^2$$
$$= -w(vg^2+w)$$

$$\therefore \Delta B_2 = \frac{a}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} -a^2w^3 \\ -aw^2(vg^2+w) \end{bmatrix} = \frac{-a^2w^2}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} aw \\ vg^2+w \end{bmatrix}$$

$$I-E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B_1g & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I-E_2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B_1g & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I-E_2)^{-1}\Delta B_2 = \frac{-a^2w^2}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -B_1g & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} aw \\ vg^2+w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-a^2w^2}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} aw \\ -B_1agw + vg^2 + w \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-a^2w^2}{g\Delta L\Delta D}\begin{bmatrix} aw \\ (**) \end{bmatrix}$$

$$(**) = -B_1agw + vg^2 + w = \frac{gvaagw}{vg^2+w} + vg^2 + w$$
$$= \frac{a^2g^2vw + (vg^2+w)^2}{vg^2+w}$$

$$\therefore F_2 = \frac{a^4w^4}{g^2(\Delta L\Delta D)^2}\begin{bmatrix} aw & (**) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{\varepsilon(0)} & 0 \\ 0 & Q_{\varepsilon(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} aw \\ (**) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{a^4w^4}{g^2(\Delta L\Delta D)^2}(a^2w^2Q_{\varepsilon(0)} + (**)^2Q_{\varepsilon(1)})$$

$$= \frac{a^4 w^4}{g^2 (\Delta L \Delta D)^2} (***)$$

$$(***) = (a^2 w^2 Q_{\varepsilon(0)} + (**)^2 Q_{\varepsilon(1)})$$

$$= \frac{a^2 w^2 \Delta D}{g^2 v + w} + \frac{\{a^2 g^2 vw + (vg^2 + w)^2\}^2}{(vg^2 + w)^2} (vg^2 + w)$$

$$= \frac{a^2 w^2 \Delta D + \Delta D^2}{g^2 v + w}$$

$$= \frac{\Delta D \{a^2 w^2 + v^2 g^4 + (2 + a^2) vwg^2 + w^2\}}{g^2 v + w}$$

$$= \frac{\Delta D \{vg^2 + (1 + a^2) w\} (vg^2 + w)}{g^2 v + w} = \Delta D \Delta L$$

$$\therefore F_2 = \frac{a^4 w^4}{g^2 (\Delta L \Delta D)^2} \Delta D \Delta L = \frac{a^4 w^4}{g^2 \Delta D \Delta L} \tag{B.2}$$

(B.1)式及び(B.2)式より,

$$P_2^* - P_2 = F_2 \tag{B.3}$$

となる。

従って,制御評価値劣化の同一性が証明された。