宮崎大学教育学部紀要　教育科学　第73号(1993)　125－142頁

素材としての正四面体

宇　田　廣　文

Regular Tetrahedrons as Instructional Materials

Hirohumi UDA

1．　研究のねらい

算数・数学教育も社会の急激な変動や予測のつかない未来に対応するために，生涯教育の観点から，新しい対応が必要になってきている。今回の学習指導要領（平成元年３月改訂）もそれを受けたものになっている。その中でも数学的な見方・考え方の育成と算数・数学のよさの感得や算数・数学を進んで活用するといったことが強調されている。特に中学校では，課題学習の位置づけとその素材の開発が求められている。また，高等学校では，数学Ⅰの中に「個数の処理」の単元が導入されようとしている。従って，これまで以上に素材の開発が算数・数学教育において重要な側面の１つになってきている。筆者は，数学的な考え方の育成，算数・数学の面白さの鑑賞，数学の内容の視覚化といったような観点から素材の開発を試みてきている。先行研究では，正三角形を用いた格子に着目して，ピックの定理が成り立つことや正三角形の構成さらにいろいろな数列の三角形による視覚的表現などを通して，素材としての可能性を探ってきた。(1) 本稿では，空間図形としての立体，特に正四面体に焦点を当てて，先述の観点で切断及び魔方陣の構成という視点から，素材としての可能性を探ることを目的とする。正四面体に焦点を当てたのは，これが最も基本的な立体（３次元空間における単体）であることと後述する学生への調査の結果，そして正四面体に内在する素材としての魅力などがその主たる理由である。さらに，正四面体の切断に対する学生の捉え方の調査結果や正四面体と関連の深い正多面体の切断なども合わせて考察していく。

2．　正四面体の切断

立方体や円錐の切断は中学校１年生の教材としてよく用いられ，そこでは切断面の形に着目した取り扱いが主としてなされている。一方，これから考察する正四面体も切断面の形としては，三角形と四角形があり，その形を調べることにも意味（意義）があるが，ここでは正四面体の切断によりできる立体（特に正四面体や正八面体）に的を絞り，素材としての可能性を探ることにする。

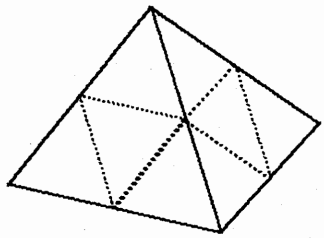
2−1　正四面体と正四角錐，正八面体の面の関係

1980年のPSAのテストで用いられた次の問題は専門家たちが承認した答が間違っていたということでよく知られている。[(2)(3)]

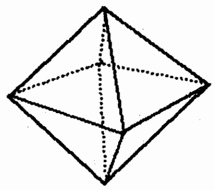
> 一辺Lの正四面体と，すべての辺の長さがLであるような正四角錐（ピラミッド）がある。この２つの立体を２つの合同な面（すなわち正三角形）でくっつけたら，でき上がった立体は何面体になるであろうか。

村上は，《もしも，ねじれ辺に着目させるような三角錐の構成による指導がなされていれば，1980年に行われたPSAのテストで，よもや専門家が正答を誤る事態は避けられたと考える。》[(4)]としている。構成活動による図形指導という視点からみると，確かにそれも有効であるがここでは視点を変えて，立体の切断という視点から考察してみる。

正四面体の４つの面において３辺の中点をそれぞれ図−１のように結ぶ。さらに，１つの頂点に集まる３辺の中点を通る平面で正四面体を切断したと考える。このようにして４回切断したとすると，後にできる立体は，正四面体４個と正八面体１個でこれらの辺の長さは皆等しい。[(5)]このことは，１辺の長さが等しい正四面体と正八面体の面（正三角形の面）を重ねると正四面体と正八面体のつながっている面は平面となることを示している。結局，七面体ができることになる。一方，すべての辺の長さが等しい正四角錐２個を正方形の面を重ねると正八面体ができることから，上記の問題は解決する（図−２）。逆に，正八面体の切断からすべての辺の長さが等しい正四角錐２個ができると考えてもよい。これを数学的(?)に扱おうとすると，三平方の定理，三垂線の定理，三角関数などが絡んできて，中学校の内容と離れてしまう。また，証明できたとしてもその感動も薄いであろう。立体をくっつけるということを，発想を逆転させて切断という目でみると問題解決ができる好例である。



図−１

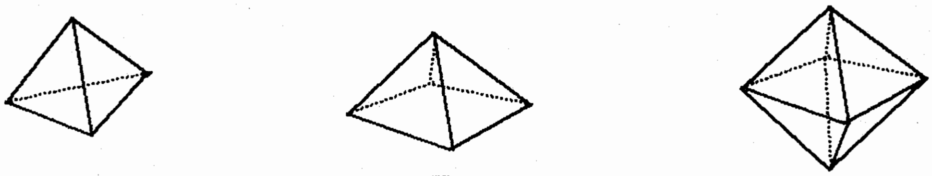


図−２

2−2　正四面体と正四角錐，正八面体の体積の関係

ここでは，１辺の長さが等しい正四面体と正四角錐，正八面体の体積の関係を，正四面体の切断という視点から考察する。最も素朴な方法は，１辺の長さを１としてそれぞれの体積を求めることである。実際計算で求めてみると，正四面体と正四角錐，正八面体の体積はそれぞれ$\frac{\sqrt{2}}{12}$，$\frac{\sqrt{2}}{6}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$となり，１：２：４の比になることが分かる。しかし，この計算には三平方の定理，三垂線の定理が厳密には必要である。一方，正四面体の切断という視点からみると以下のように非常にエレガントな解決が可能である。先の図−１のような切断を考える。そこで，できた小さな正四面体の体積を１と考えると，元の正四面体の体積は相似の考えを用いて，２×２×２の８となる。切断の結果できた立体は，正四面体４個と正八面体１個であるから，正八面体の体積が４であることは容易に分かる。従って，正八面体の半分である，辺の長さがすべて等しい正四角錐の体積は２となり，体積の比が１：２：４の比になることが分かる。

ここでは，体積比が相似比の３乗ということのみ用いている。普通，体積の比較はそれぞれの体積を実際に求めて，その後比較という方法が取られるが，このように，単位の考えを用いて切断を利用する方法も単位の考えのよさを感じ意味があろう。



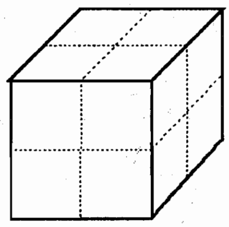
図－３

3.　正多面体の切断

第２節では，正多面体の１つである正四面体の切断を考えたが，ここではその他の正多面体，即ち，正六面体（立方体），正八面体，正十二面体，正二十面体の切断について，考察する。正四面体の切断は，各辺の中点を通る切断面が正四面体の１つの面と平行になるようにして行われた。そこで，それぞれの正多面体について同様の切断を実施したとき，できる立体の形とその個数について調べていくことにする。

3−1　正六面体（立方体）

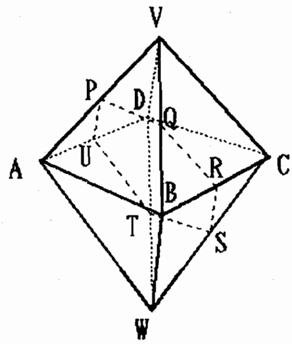
この場合，辺の中点を通り立方体の１つの面に平行な切断面は，図－４のように３つある。従って，できる立体は立方体でその個数は８というよく知られたものになる。



図－４

3−2　正八面体

正八面体のときは，図－５における辺の中点Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓ，Ｔ，Ｕを通る，面 WAB，VCD に平行な，切断面と同様な切断面が４つある。切断の方法からできる立体が，正八面体と正四面体であるということは分かる。一方，個数については正八面体は各頂点のところで１つずつはできるので６個以上であることが，また正四面体は各面の中央に１つずつはできるので８個以上であることがすぐに分かる。この場合は，隠れた部分がないことは切断の方法からも分かるが次のようにしても確認できる。できる正四面体の体積を１とすると，できる正八面体の体積は４であるから，元の正八面体の体積はその２×２×２倍で32になる。一方，正八面体６個と正四面体８個を合わせた体積は４×６＋８で丁度32となる。従って，それですべてであることが確認できる。



図－５

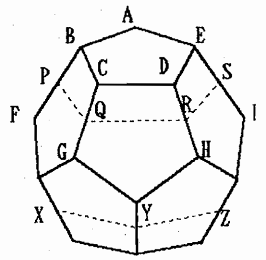
3−3　正十二面体

正十二面体については，図－６から分かるように面 ABCDEに平行な切断面は辺 BF，CG，DH，EI のそれぞれの中点Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓを通る平面と同様の中点Ｘ，Ｙ，Ｚを通る平面の２つがある。正十二面体はその１２個の面が２つずつ平行になっているので，全部で六組の

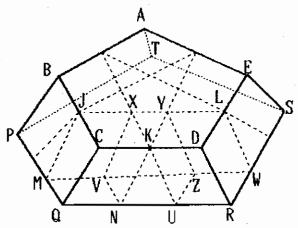
平行な面をもっている。従って，切断面は全部で合計2×6の12個ある。今，図－7のような切断の一部を取り出してみる。

この中にある立体の形は図－8に示すような3種類がある。即ち、図－7における平行六面体 JCKX−MQNV，六面体 KYX−NUZV [6] 及び中央にできる正五角錐台の三種類である。特に，平行六面体JCKX−MQNV は《太めの黄金菱面体》と呼ばれている多面体であり，《細めの黄金菱面体》とともにケプラー(J. Kepler)によって研究された多面体である。[7] [8] さらにアムマン（R. Ammann）は太めの黄金菱面体と細めの黄金菱面体を用いると，3次元空間の非周期的なタイル張りができるという興味深い事実を示している。[9]

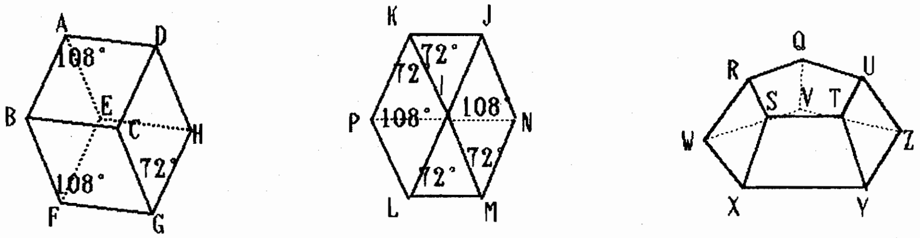
できる立体の辺の長さについては，元の正十二面体の1辺の長さを2としたときそれぞれの立体の辺の長さは図－8の記号を用いると次のようになっている。



図－6



図－7



図－8

i) 太めの黄金菱面体 ABCD−EFGH の各辺の長さは1

ii) ひし形 KILP，IMNJ の各辺の長さは1で

$$KJ=LM=\frac{\sqrt{5}-1}{2},PN=\sqrt{5}-1$$

iii) 五角錐台において，小さい正五角形の1辺の長さは$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

大きい正五角形の1辺の長さは $\sqrt{5}-1$ で

$$RW=SX=TY=UZ=QV=1$$

また，できる立体の個数については切断の方法と図－7から次のようになっている。太めの黄金菱面体は元の正十二面体の各頂点のところにできるので，正十二面体の頂点の数だけ，即ち20個あることが分かる。一方，図－8における六面体は元の正十二面体の各辺のところにできるので，正十二面体の辺の数だけ，即ち30個あることが分かる。さらに，正五角錐台は元の正十二面体の各面のところにできるので，正十二面体の面の数だけ，即ち12個あることが分かる。できる立体の位置と正十二面体の頂点，辺，面が見事に対応しており，先の三種類の正多面体に比較しておもしろい性質になっている。切断によってできる立体の内，表面に見えるも

のは上記のすべてで尽くされることは今までの考察から明らかである。一方，切断によってできる表面にでていない隠された部分の立体は，図－７のような部分をすべて取り除いた残りの部分にある。図－６におけるような平面 PQRST による切断は元の正十二面体全体で12ある。従って，切断の方法から，隠された部分は正十二面体１個であることが分かる。この正十二面体の１辺の長さが $\sqrt{5}-1$ であることは図－８における五角錐台の大きい正五角形の１辺の長さが $\sqrt{5}-1$ であることから分かる。

3-4　正二十面体

この場合は，他の４つの正多面体とは違い，辺の中点を通る正二十面体の面に平行な切断は存在しない。しかし，中心に関して対称な２つの頂点を結ぶ直線に垂直で，中心と辺の中点を通る切断面は存在する。正二十面体の頂点は12個であるからそのような切断面は６ある。一方，このような切断は正四面体以外の残りの正多面体でも可能であるが，ここではこれ以上深入りはしないことにする。

3-5　まとめ

正多面体を１つの面に平行な辺の中点を通る平面で切断したときに，できる立体とその個数について考察してきたが，それらをまとめると次の表－１のようになる。

表－１

正多面体 できる立体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体
正四面体	4（頂点）		8（面）	
正六面体		8（頂点）		
正八面体	1		6（頂点）	
正十二面体				1
太めの黄金菱面体				20（頂点）
六面体				30（辺）
正五角錐台				12（面）

ただし，表中の頂点，辺，面は，その多面体におけるそれぞれの数と一致していることを示している。

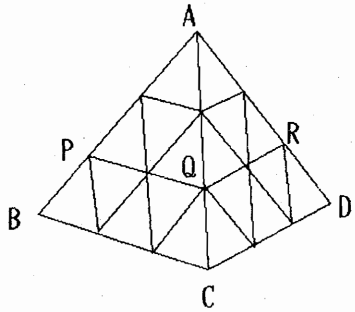
4.　正四面体の切断（続）－個数の処理－

先の第２節では，正四面体を各辺の中点で切断することを考察してきた。そこでこの節では，正四面体の各辺を３等分した場合についての学生への調査結果の分析を行い，各辺の等分を増やして切断していった場合，できる正四面体と正八面体の個数がどのように変化していくかをその解決の仕方を具体的に例示しながら調べていく。

4-1　１辺を３等分した場合

思考実験，単純化の考え，帰納の考えの実践例として，学生（58名）に講義の中で次の課題を示した。[10]

右の正四面体を，各線に沿ってすべて切ったときにできる立体の名称とその立体の個数を求めよ。



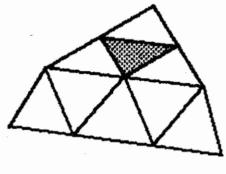
図－９

学生の解答の結果は，資料Ⅰに示したようにこちらが予想した以上にばらつきがあった。できる立体を間違っているものもおり，正四面体や正八面体という用語を知らないのではないかと疑えるものもいた。できる立体を正四面体（あるいは三角錐）のみとしたものが39名で全体の67.2％もいた。これはおそらく立方体の切断と同様に考えたと思われる。この場合，形については立方体の切断からの類推はきかないが，一方個数については後で分かるように関連はある。また個数となると，思考実験，単純化の考え，帰納の考えなどが充分活用できていないのか，いい加減な(?)解答が多かった。一方，これは先の形と同様予想されることではあるが，正四面体が27個という解答がいちばん多かった。その中には，体積から考察して27個と結論づけたものもかなりいた。正四面体が10個と正八面体が４個という正答に近い解答を示したものが４名いた。ただ，正四面体が11個と正八面体が４個という正答を出した学生が全くいなかったのは以外であった。また正三面体という不思議な立体を考えている学生もおり，空間図形に関する具体的な指導の必要性を感じる。

以下示すように，この課題は思考実験のよい素材であると同時に，思考実験のある意味の限界を示す素材にもなっている。

図－９において，平面 PQR で切断したと考えると，正四面体 APQR は先の図－１と同じになり，切断によってできる立体は，正四面体４個と正８面体１個である。このように複雑な場合にはより簡単な場合に戻って考える姿勢が大切になる。このことを４つの頂点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄ全部に関して実行したとすると，できる正八面体は少なくとも４個あることが分かる。一方，この切断の考えと元の正四面体の表面の観察から，できる正四面体は少なくとも10個あることが分かる。即ち，正四面体の頂点の数４と辺の数６を合わせた数10は少なくともある。そこで単純に考えると，正四面体が10個で正八面体が４個という解答になりそうである。[11]

しかし，実際は隠された部分があり，これでは充分でない。それを確かめるには，実際に構成してみるか，あるいはじゃがいもや粘土で正四面体を作り，切断するしかないようにみえるが，実は先に示した正四面体と正八面体の体積の関係がその確認を保証してくれるのである。切断してできる正四面体の体積を１とすると，元の正四面体の体積は３×３×３で27となる。ま


図－10

た先の2-2の考察より，できる正八面体の体積は4であるから，正四面体10個で正八面体4個を合わせた体積は26となり，1足りないことが分かる。即ち，あと正四面体1個分の体積が必要である。その形が正四面体になることは，切断の仕方や図－10などより分かる。結局，求める正四面体と正八面体の個数はそれぞれ11と4である。逆に，できる立体が正四面体と正八面体であるということを前提にすると，正八面体と正四面体の個数をそれぞれ x,y とおくと，$4x+y=27$ という関係式が成り立つ。この式から，$1 \leqq x \leqq 6$ はすぐ分かる。そこで表を作ると次の表－2のようになる。

表－2

x	1	2	3	4	5	6
y	23	19	15	11	7	3

従って，最初の考察から求める正四面体と正八面体の個数はそれぞれ11と4であることが分かる。

4-2　1辺をn等分した場合

1辺を等分する数を増やしていくと，上で考察したような思考実験による方法は当然有効でなくなる。そこで，帰納的な考えや構成していく考えなどが働くことになる。

正四面体の各辺をn等分して先の3等分の場合と同様に切断すると，できる立体の形は正四面体と正八面体である。できる正四面体の体積を1として，正四面体と正八面体の個数をそれぞれ f_n, g_n とおくと，体積の関係から

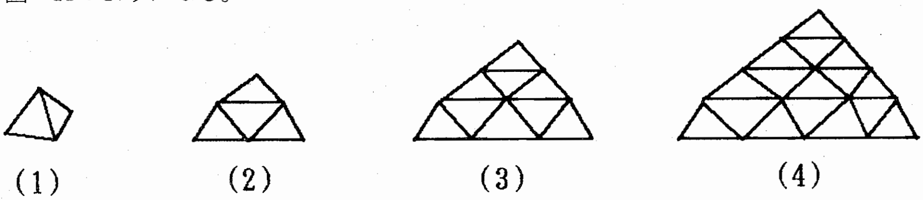
$$f_n + 4g_n = n^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。また，

$$f_1 = 1, g_1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

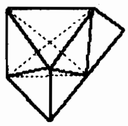
である。従って，f_n，g_nの一方が求められると，他方も①から求めることができる。そこでは，まず g_nの求め方を例示してみる。

今，正四面体を1つの底面に平行な面でn－1回切断したとし，上からk段目を(k)で表すと次の図－11のようになる。

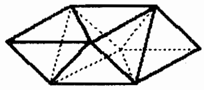


図－11

(2) は (1) に，正四面体2個と正八面体1個ならなる図－12の立体を合わせたものである。また，(3) は (2) に図－12の立体とさらに正四面体2個と正八面体1個からなるなる図－13の平行六面体を合わせたものになっている。さらに，(4) は (3) に図－12の立体と図－13の平行六面体2個を合わせたものであるというように，合わせる図－12の平行六面体の数が1個ずつ増えて入っている。



図－12



図－13

即ち，k≧2 のとき，(k) は (k−1) に図－12の立体と図－13の平行六面体k−2個を合わせたものである。要するに，(k) における正八面体の個数は (k−1) における正八面体の個数にk−1個加えたものになっている。従って，(n) における正八面体の個数は

$$0+1+2+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2} \qquad \cdots\cdots\cdots ③$$

となる。そこで全体における正八面体の総数 g_nは，各段における正八面体の個数を合わせたものであるから，

$$g_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n-1)n(n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots\cdots ④$$

となる。また, f_nは①から

$$f_n=n^3-4g_n=\frac{n(n^2+2)}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

である。いくつかの例を示すと，次の表－3のようになる。

表－3

n	1	2	3	4	5	6
f_n	1	4	11	24	45	76
g_n	1	1	4	10	20	35

nが1，2，3の場合を見ると, $g_n=f_{n-1}$となっているので，(特に，具体的に構成して個数を調べた場合など）一般にこの関係がありそうに思えるが, nが4の場合から分かるように実際はそうなっていない。それは，隠された部分の正四面体の個数が影響しているからである。[12] また，$6g_n$は連続3数の積であり，さらに f_nと関連した $n(n^2+2)$ は3の倍数という性質を満たしており，数論的にも興味深い素材である。

一方，先の考察において考える立体を正四面体にすると，それは f_nの直接的な求め方を示している。即ち, (k) における正四面体の個数は (k−1) における正四面体の個数に2(k−1)個加えたものになっている。従って，(n) における正四面体の個数は

$$1+2\times 1+\cdots\cdots+2(n-1)=n^2-n+1 \qquad \cdots\cdots\cdots ⑥$$

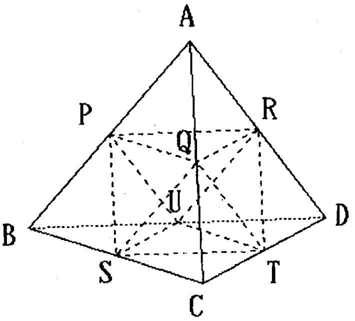
となる。そこで全体の正四面体の総数 f_n は，各段の正四面体の個数を合わせたものだから，

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k+1)=\frac{n(n^2+2)}{3} \qquad \cdots\cdots\cdots ⑦$$

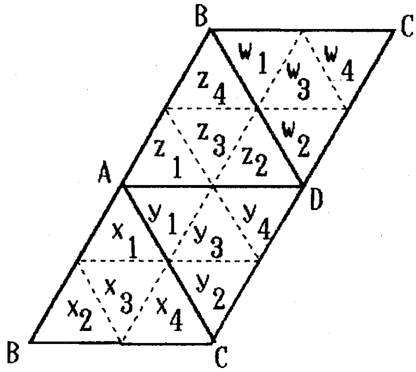
となる。

5.　正四面体魔方陣

魔方陣が，算数・数学教育において興味ある素材の１つであることはよく知られている。筆者は，これまでは切断という視点から正四面体を考察してきたが，ここで正四面体の各面が図－14のような４つの正三角形の分割されている場合に着目して，各面の正三角形のマスに１から16までの整数を１つずつ配列することを試みて，魔方陣としての可能性を探ることにする。そこで図－15のような展開図をつくり，それぞれの正三角形のマスに図－15に示したような符号をつけておく。



図－14



図－15

5-1　各面の和が同じ

正四面体の各面の和がすべて同じになるように１から16を配列することをまず考えよう。すると１から16までの整数の和は136だから，各面に配列された４つの整数の和はすべて34でなくてはならない。即ち，図－15において次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_4&=34\\
y_1+y_2+y_3+y_4&=34\\
z_1+z_2+z_3+z_4&=34\\
w_1+w_2+w_3+w_4&=34
\end{aligned}
\qquad (5-①)
$$

そこで最初の問題は，１から16までの整数の中で和が34になる４つの整数を求めることである。それらは具体的には資料Ⅱのようになる。その中で，１から16までの整数がすべて１回ずつ使われている四組を選べば，正四面体の各面の和が全て同じになるように１から16を配列することができることになる。例えば次のような例が見つかる。

{1, 2, 15, 16}　{3, 5, 12, 14}　{4, 7, 10, 13}　{6, 8, 9, 11}　(5-①-1)
{1, 2, 15, 16}　{3, 7, 10, 14}　{4, 6, 11, 13}　{5, 8, 9, 12}　(5-①-2)
{1, 3, 14, 16}　{2, 4, 13, 15}　{5, 6, 11, 12}　{7, 8, 9, 10}　(5-①-3)
{1, 4, 13, 16}　{2, 3, 14, 15}　{5, 6, 11, 12}　{7, 8, 9, 10}　(5-①-4)
{1, 10, 11, 12}　{2, 5, 13, 14}　{3, 6, 9, 16}　{4, 7, 8, 15}　(5-①-5)
{1, 8, 12, 13}　{2, 7, 11, 14}　{3, 6, 10, 15}　{4, 5, 9, 16}　(5-①-6)

5-2　各頂点の周りの正四面体

2-1 で考察したような切断を考えると，各頂点のところで小さな正四面体ができる。表面に

でていない面（例えば，図－14の頂点Aで考えると面PQR）があるが，この面は表面にでていない面に平行な面の中央の正三角形（例えば，図－14の正三角形STU）と考えると，切断によってできた正四面体の4つの面に整数を配列できることになる。そのような正四面体は4つできるが，その各正四面体に配列された整数の和がすべて等しくなるようにしよう。即ち，図－15において次の式が成り立つようにする。

$$\begin{aligned} x_1+y_1+z_1+w_3&=34 \\ x_2+y_3+z_4+w_1&=34 \\ x_3+y_4+z_2+w_2&=34 \\ x_4+y_2+z_3+w_4&=34 \end{aligned} \qquad (5-②)$$

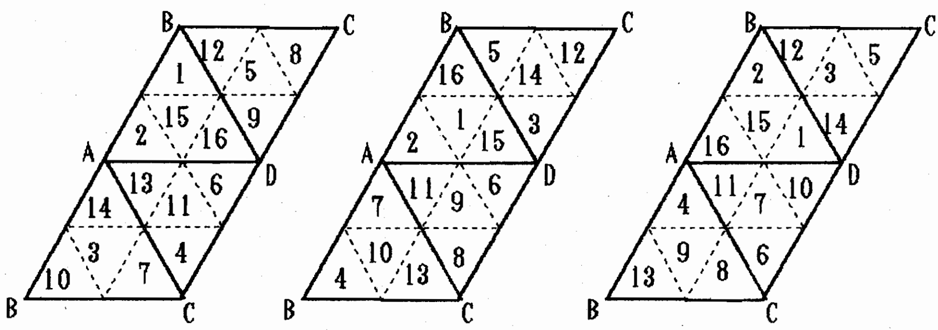
この条件を満たす整数の組は，先と同じであることはいうまでもない。

5-3　正四面体魔方陣

正方形を利用した魔方陣は，古くよりよく知られており，その求め方とともに人々に親しまれてきている。[13] 筆者は，正四面体魔方陣なるものが古くから存在してきているものか知らない。[14] そこで，ここでは正四面体魔方陣を次のように定義する。図－14において自然に考えられる正三角形の4つ組は，5-1，5-2で考察したものと各面の中央の正三角形4つを組にしたもの，即ち，次の式（5－③）を満たす組の九組であろう。

$$x_3+y_3+z_3+w_3=34 \qquad (5-③)$$

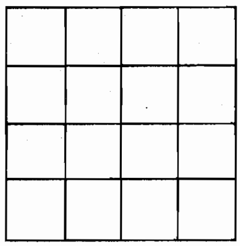
まとめると，1から16までの整数を図－14の正四面体の正三角形のマスに1つずつ配列したとき，図－15において関係式（5－①），（5－②）及び（5－③）が成り立つとき，その配列を正四面体魔方陣ということにする。勿論，条件を（5－①）と（5－②）だけにして考えることも可能であるが，ここでは上のようにしておく。例としては次のものがある。



図－16

5-4　4次魔方陣との関係

4次の魔方陣は，図－17の正方形のマスに1から16まで整数を1つずつ配列して，縦，横，対角線上にある4つの整数の和がすべて等しくなるように配列したものである。我々の正四面体魔方陣も1から16まで整数を1つずつ配列したもであるから，この4次の魔方陣との対応を考えることができる。その対応は，例えば図－18のようになり，この場合（5－①）は横に，（5－②）は



図－17

縦に，そして（5－③）は左下がりの対角線に対応していることが分かる。即ち，4次の魔方陣から我々の正四面体魔方陣は作れることになる。しかし，その逆は一般にだめである。例えば，図－16の左の正四面体魔方陣を図－18の対応で配列すると図－19のようになり，右下がり対角線の和はこの場合34ではない。従って，4次の魔方陣ではない。

x_1	x_4	x_2	x_3
y_1	y_2	y_3	y_4
z_1	z_3	z_4	z_2
w_3	w_4	w_1	w_2

図－18

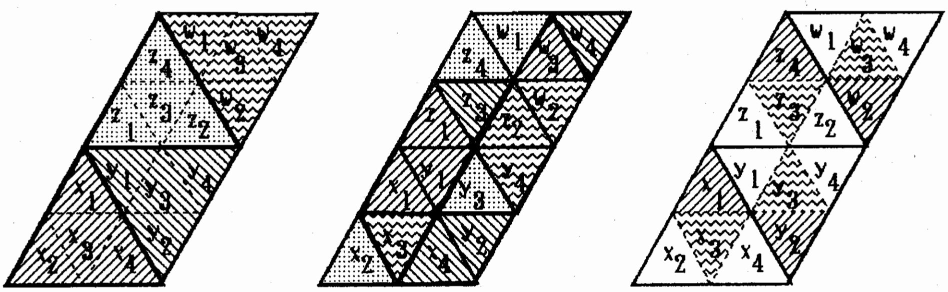
14	7	10	3
13	4	11	6
2	15	1	16
5	8	12	9

図－19

一方，4次の魔方陣に対応する正四面体での配列を図－15と図－18の対応でで考えると，正四面体魔方陣の配列に次の条件を追加したものになる。

$$x_1+y_2+z_4+w_2=34 \qquad (5-④)$$

これらを図－15を用いて図的に表現すると次の図－20のようになる。この図－20を見ると正四面体魔方陣としては，対角線の部分に相当するところが条件不足のように見える。即ち，図－20を正四面体の表面の正三角形を4つずつ塗りつぶすパターンとしてみると，対角線の部分に相当するところも前2つと同様に塗りつぶしができそうである。次にそれを考察していく。



縦　　横　　対角線

図－20

5-5　完全正四面体魔方陣

図－20の対角線の配列パターンをよく観察してみると，図－21のような配列パターンが自然に構成できる。即ち，

$$\begin{aligned} x_4+y_1+z_2+w_1&=34 \\ x_2+y_4+z_1+w_4&=34 \end{aligned} \qquad (5-⑤)$$

がさらに満足されるような配列になっている。この（5－⑤）を対応する4次の魔方陣でみると，図－22の網掛けの部分に対応している。

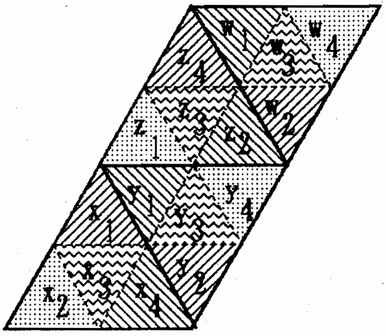


図 − 21

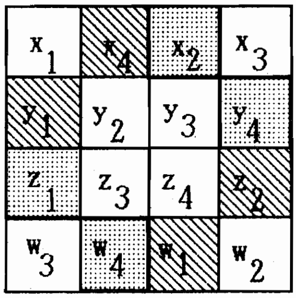


図 − 22

一方，４次の魔方陣の中には“Diabolic”と呼ばれるすばらしい魔方陣があることはよく知られている。[15] それは魔方陣という条件に加え，図−23のような６つの“broken”な対角線の和もすべて等しく34になっているような魔方陣のことである。即ち，考えられるすべての対角線上の４つの数の和もみな等しい。

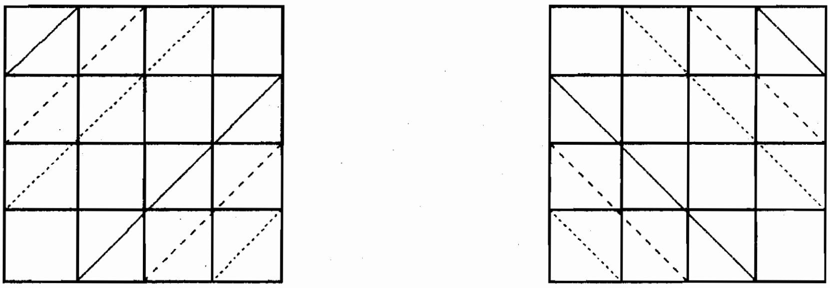


図 − 23

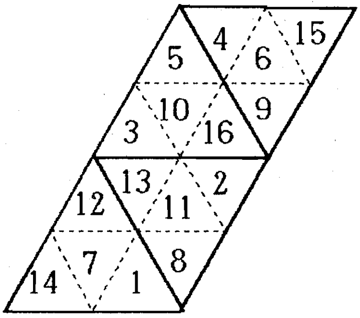
（５−⑤）の条件はこの“Diabolic”の性質に含まれることになる。そこで，この対角線に関する性質を右下がりと左下がりに分けてまとめると，それぞれ次の（５−⑥），（５−⑦）のようになる。

$$
\begin{aligned}
x_1+y_2+z_4+w_2&=34\\
x_4+y_3+z_2+w_3&=34\\
x_2+y_4+z_1+w_4&=34\\
x_3+y_1+z_3+w_1&=34
\end{aligned}
\qquad (5-⑥)
$$

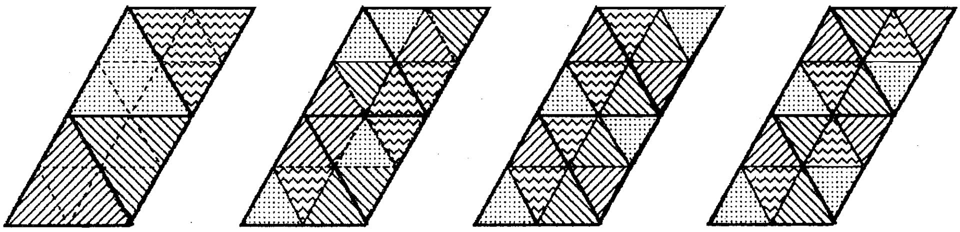
$$
\begin{aligned}
x_3+y_3+z_3+w_3&=34\\
x_2+y_2+z_1+w_2&=34\\
x_4+y_1+z_2+w_1&=34\\
x_1+y_4+z_4+w_4&=34
\end{aligned}
\qquad (5-⑦)
$$

我々は，この“Diabolic”な４次の魔方陣に対応する正四面体魔方陣を，即ち（５−①），（５−②），（５−⑥），（５−⑦）を満たす正四面体における配列を，完全正四面体魔方陣と呼ぶことにする。図−24はその１つの例である。[16]

完全正四面体魔方陣を条件（5－①），（5－②），（5－⑥），（5－⑦）に対応するように図－19と同様に表すと図－25のようになる。しかしこの図－25には図－20の対角線部分や図－21は含まれていない。そこで，“Diabolic”な4次の魔方陣の対角線部分の捉え方を図－26のようにすると，図－21を含む完全正四面体魔方陣の配列図がつくれる。

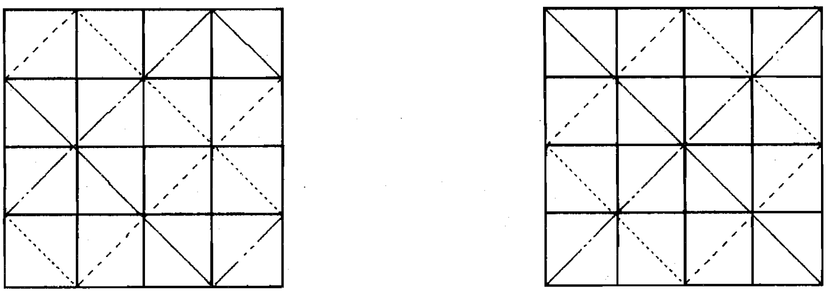


図－24



縦　横　右下がり　左下がり

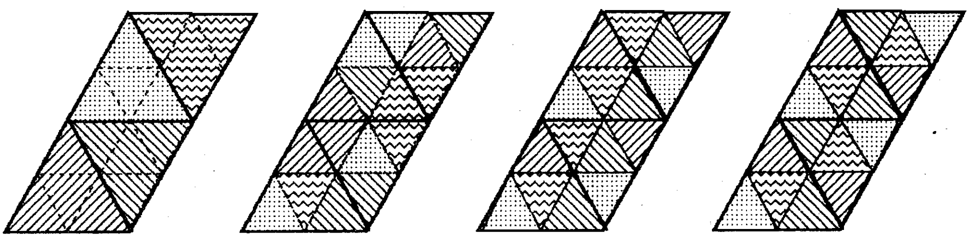
図－25



(i)　(ii)

図－26

図－26に対応するように，完全正四面体の配列図を構成すると図－27のようになる。



縦　横　(i)　(ii)

図－27

5-6　正四面体魔方陣の求め方

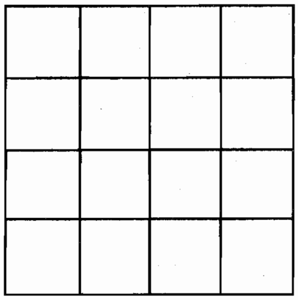


図 − 28

ここで，正四面体魔方陣の具体的な求め方の１例を示す。とてもエレガントな方法とはいえないが，順序よく筋道だてて考えていく例としては，即ち問題解決の１つの方法としては，価値があるといえる。４次の魔方陣の作り方を利用すれば，正四面体への対応によってつくれることはいうまでもない。(17) しかし，ここでは４次の魔方陣の作り方も込めて考察していく。

資料②から 5−1 と同様に，１から16までの整数がすべて１回ずつ使われている四組をまず選ぶ。それを今（5−①−1）とする。即ち，

{1, 2, 15, 16}　{3, 5, 12, 14}　{4, 7, 10, 13}　{6, 8, 9, 11}　(i)

が選ばれたとする。この四組が図−28において横の行に配列されるものとする。次に縦の列に相当する四組を選ぶために，上の四組の中から１つずつ整数を取り出し，その和が３４になっているものを探す。即ち，選んだ４つの整数が資料Ⅱにあるものを選んでいく。今の場合，それらは次のようになっている。

{1, 14, 13, 6}　{1, 12, 13, 8}　{1, 14, 10, 9}　{1, 12, 10, 11}
{2, 14, 7, 11}　{2, 14, 10, 8}　{15, 3, 10, 6}　{15, 3, 7, 9}　(ii)
{16, 3, 4, 11}　{16, 3, 7, 8}　{16, 5, 4, 9}　{16, 5, 7, 6}

ここで大切なことは，並べる整数の順序は (i)での四組の順序と同じ順序にしておくことである。

この十二組の中から，１から16までの整数がすべて１回ずつでてくるような四組を選び出す。そこで１と２に着目すると，この場合は {1, 12, 13, 8} と {2, 14, 7, 11} を含む組しかないことが分かる。すると結局，次の組

{1, 12, 13, 8}　{2, 14, 7, 11}　{15, 3, 10, 6}　{16, 5, 4, 9}　(iii)

しかないことが分かる。

最後に対角線部分に相当する組は，(ii)の中から(iii)の各組の中に１つずつ含まれている組を選び出せばよい。この場合は，次の二組しかない。

{1, 14, 10, 9}　{16, 3, 7, 8}　(iv)

従って，{1, 14, 10, 9} または {16, 3, 7, 8} が図−28において右下がりの対角線上にくるように配列すれば，正四面体魔方陣は作れることになる。その個数については，対角線の一組に対して図−28では12個の異なる配列が作れるが，正四面体魔方陣としては２個しか異なるものは作れないことが分かる。このことは，空間における立体の回転の自由性が平面よりも高いところからきていることはいうまでもない。結局この例の場合，次の図−29のような異なる４個の正四面体魔方陣が作れることになる。(18) (19)

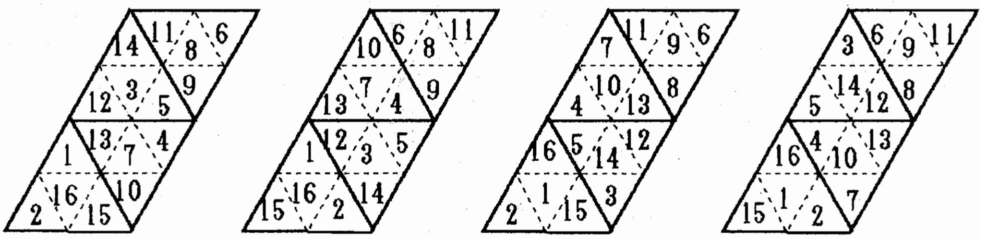


図 − 29

尚，これらは(iv)の二組を図－28における“broken”でない対角線上に配列したもの，即ち4次の魔方陣に対応している。またこの場合は，(iv)が二組しかないので“Diabolic”な魔方陣，従って完全正四面対魔方陣は構成できないことも分かる。

6. 結語

数学的な考え方の育成，算数・数学の面白さの鑑賞，数学の内容の視覚化といったような観点から，正四面体に焦点を当てて素材としての可能性を探ってきた。特に今回は，切断と魔方陣に関して考察したが，その結果，以下のことを提示することができた。

(1) 正四面体の切断により，正四面体と正八面体及び各辺の長さが等しい正四角錐との面の間の関係が容易に把握できる。
(2) 正四面体の切断により，正四面体と正八面体及び各辺の長さが等しい正四角錐との体積の間の関係が容易に把握できる。
(3) 各正多面体について，辺の中点を通るその正多面体の面に平行な切断を考えると，構成できる立体と頂点，辺，面との間に個数に関して興味深い関係がある。
(4) 正四面体の切断は，数列の和を視覚化して求める素材として，またその求め方に多くの数学的な考え方を含んでおり，魅力あるものである。
(5) 魔方陣としての正四面体は，4次の魔方陣と密接に関係がある。一方，以下の点で4次の魔方陣よりも素材としては魅力がある。
  i) 4次の魔方陣も横だけの和が同じとか，あるいは横の和と縦の和が同じとか考えることもできるが，正四面体の方が視覚的な意味づけを伴っており，より説得力がある。従って，魔方陣としての捉え方に多様性があり，素材としての有効性が高い。
  ii) 注（18）でも述べたように，我々の正四面体魔方陣から4次の魔方陣が構成できることがある。即ち，横の和と縦の和がみな34で1つの対角線上の和が34になるようにすれば，それから作られる正四面体魔方陣から4次の魔方陣が構成できることがある。もしそのとき，構成できなければこの場合は4次の魔方陣は構成できない。少ない条件の方が構成しやすいわけであるから，4次の魔方陣の構成という側面からみても，正四面体魔方陣は有効である。
  iii) 正四面体魔方陣は，5-6で示したように，その視覚的イメージを伴って，4つの整数を順列としてではなく集合として扱って，篩にかけていくことができるので，扱いやすい。
(6) 学生に対する調査からは，問題解決力を含めた数学的な考え方の育成が必要であるということがいえる。

今後の課題としては，ここで考察した素材としての可能性を実証的に検証していくことがまずあろう。さらに，正四面体を含む立体の素材としてのさらなる可能性を探っていくことも必要である。

注及び引用・参考文献

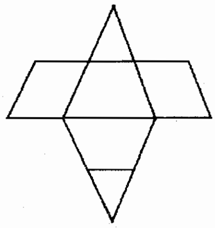
(1) 拙稿,「素材としての三角格子」, 日本数学教育学会誌, 数学教育, 第74巻, 第11号,1992,pp.19−27.

(2) R.B.デーヴィス, 『数学理解の認知科学』, 厚徳社, 1987, p.219.

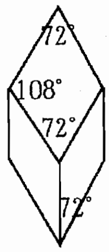
(3) 村上一三, 「現在の空間指導における問題点」, 日数教第22回数学教育論文発表会論文集, pp.85−90.

(4) 前掲書（2）, p89（傍点筆者）.

(5) この事実は,実際に切断しなくても思考実験で可能である。即ち, 「表面に４つの面があり, ４回切断するので全部で８つの面ができる。面の形は全て正三角形だから, できる立体は正八面体である。」となる。



(6) この六面体は, 右図上のように鳥が翼を広げてとんでいるような形をしており, しかも合同な平面図形３組を２枚ずつ用いてできる形であり, 興味深い。



(7) 一松信訳, M. Gardner,『ペンローズ・タイルと数学パズル』, 丸善, 1992, p.34.

(8) 黄金菱面体は１つの内角が72°であるひし形６枚を用いて作られる平行六面体で２種類あり, その中で《細目の黄金菱面体》は右図下のようになっている。

(9) 前掲書（7）, pp.33 − 36.

(10) 平成４年５月21日実施。学生に提示したものとは, 図中の頂点に名称を与えたことなど若干の違いはある。

(11) 実際, 正四面体が11個で正八面体が４個という予想もできるが, 本当にそうかとなると隠された部分の話になり, 確信が難しい。事実, 学生の解答からはそれはうかがえなかった。

(12) 実際,g_n はf_{n-1} からそのときの隠された部分の正四面体の個数を引いたもの, 即ち, １辺をn−１等分したときの見える部分の正四面体の個数を表している。

(13) 大森清美, 『新編魔方陣』, 富山房, 1992.

(14) 名前は『Magic Tetrahedron』とすべきである。その意味からすると『摩四面体』が適当かもしれない。

(15) L. Mottershead, Sources of Mathematical Discovery, Basil Blackwell・Oxford, 1978, pp. 5−6.

(16) 前掲書（15）の４次の“Diabolic”魔方陣の例を参照

(17) ４次の魔方陣の作り方については, 例えば次の文献にその１例がある。宮崎勝弐, 『数学科でのゲーム・パズル』, 共立出版, 1985, p.98.

(18) 図−17において, 一方のみが“broken”でない対角線上くるように配列すると４次の魔方陣にならないものものも構成できるが, その場合でも右図のように図−２３のどれかの“broken”な対角線上の和が34になっている。従って, 正四面体の展開図の描き方を工夫すれば, 図−29のどれかと一致する展開図を描くことができ, 結局４次の魔方陣に対応させることができる。

2	1	15	16
14	12	3	5
11	8	6	9
7	13	10	4

(19) 図−19は“broken”でない右下がりの対角線上以外は, どの対角線上の４個の整数の和をとっても34とはならない。従って, これから構成できる正四面体魔方陣から図−15のような展開図をどのように作って, 図−18のように対応させても, ４次の魔方陣は構成できない。

資　料　I

	正四面体	正八面体	四角錘	三角錘	正三面体	正六面体	人数
できる立体の個数	12						1
	13						1
	19						3
	20						1
	22						1
	23						2
	24						7
	27						20
	28						1
				19			1
				36			1
	11		8				1
	10		8	1			1
	10					4	1
	10	4					4
	7	5					1
	10	2					1
			7	15			1
	13	7					1
	11						1
	10	1		3			1
挫折							4
不明							2
計							58

資料 II

1	2	15	16
1	3	14	16
1	4	14	15
1	4	13	16
1	5	13	15
1	5	12	16
1	6	13	14
1	6	12	15
1	6	11	16
1	7	12	14
1	7	11	15
1	7	10	16
1	8	12	13
1	8	11	14
1	8	10	15
1	8	9	16
1	9	11	13
1	9	10	14
1	10	11	12
2	3	14	15
2	3	13	16
2	4	13	15
2	4	12	16
2	5	13	14
2	5	12	15
2	5	11	16
2	6	12	14
2	6	11	15
2	6	10	16
2	7	12	13
2	7	11	14
2	7	10	15
2	7	9	16
2	8	11	13
2	8	10	14
2	8	9	15
2	9	11	12
2	9	10	13
3	4	13	14
3	4	12	15
3	4	11	16
3	5	12	14
3	5	11	15
3	5	10	16
3	6	12	13
3	6	11	14
3	6	10	15
3	6	9	16
3	7	11	13
3	7	10	14
3	7	9	15
3	7	8	16
3	8	11	12
3	8	10	13
3	8	9	14
3	9	10	12
4	5	12	13
4	5	11	14
4	5	10	15
4	5	9	16
4	6	11	13
4	6	10	14
4	6	9	15
4	6	8	16
4	7	11	12
4	7	10	13
4	7	9	14
4	7	8	15
4	8	10	12
4	8	9	13
4	9	10	11
5	6	11	12
5	6	10	13
5	6	9	14
5	6	8	15
5	6	7	16
5	7	10	12
5	7	9	13
5	7	8	14
5	8	10	11
5	8	9	12
6	7	10	11
6	7	9	12
6	7	8	13
6	8	9	11
7	8	9	10