宮崎大学教育学部紀要　教育科学　第75号(1993)　43-52頁

数学的表記のレトリック認識
―― 帯分数の四則演算の場合 ――

添　田　佳　伸

Rhetorical Cognition of Mathematical Symbols
――In the Case of Calculation of Mixed Fraction――

Yoshinobu SOEDA

1.　はじめに

筆者は、ここ数年、数学教育におけるレトリックの研究の一環として数学的表記のレトリック性について取り組んでいるが、昨年は特に数式のレトリック性について研究を行った。数式のレトリック性を子どもたちはどのように認識しているかということを調査しながらその実態の解明を目指して行ってきた。その中で、特徴的な傾向をもつものとして注目されたのが帯分数であった。分数の四則演算それ自体難しいと感じている子どもが多い中で、帯分数の四則演算となると誤答の数は必然的に多く現れた。しかし、その誤答をよく分析してみると、子どもの思考の中にレトリックが介在していることがみてとれる。

今回は、視覚的類似性に基づくメタファーが，帯分数の四則演算の中でどのように子どもたちに影響しているかを示し、数学的表記のレトリック性の認識の解明の一助としたい。

なお、本研究は、平成4年度科学研究費補助金（奨励研究A)「数学的表記のレトリック性に関する研究－数式のレトリック性に関する実態調査を中心に－」（課題番号14780315）における研究の一環である。

2.　数式のレトリック性

はじめに､筆者の言っている｢レトリック性」について規定しておく必要があろう。レトリックというのは、本来言語学で問題とされる表現方法の一種である。比喩に代表される言葉のあやである。もちろん、アリストテレスの時代の弁論術、すなわち人を説得するための言葉巧みな言い回しや相手の意表をつく技術などもレトリックと呼ばれているし、中世から近世にかけての技巧的とも芸術的ともいわれるような言葉を飾る表現もレトリックと呼ばれているが、一般には、何らかの効果を期待して話者が意図的に創意した表現と捉えられている。数学教育における授業場面でもこのようなレトリックは見受けられる。例えば、方程式の意味をわからせるために、「方程式は天秤のようなものだ」と言ったり、あるいは関数の概念形成のために、

「関数とはブラックボックスのようなものだ」と言って実際に何か意味有りげな箱を見せたりすることなどである。しかし、このようなレトリックは、教授技術としての比喩使用の域を出ない。もちろん授業効果を高めるために用いられるこれらのレトリックの意義は十分認められるに価することではあるが、筆者の関心は別のところにある。

筆者が興味あるのは、レトリックを生成して発信する教師の側に立つのではなく、レトリックを受けとめる学習者の側に立つことである。子どもはレトリックを一体どのように受けとめているのかを問題にしている。ある表現がレトリックであるかどうかの判断は、ある程度客観的に判定できる基準に従って行うこともできるが、記号過程において受信者が異なると記号の解釈もまた変わってくるように、ある記号表現に対して必ずしもそれに接する人がみんなレトリック性を感じるとは限らない。感じるか感じないかは人によって異なる。また、記号過程において発信者の意図していないことまで受信者が読みとって解釈してしまうことがあるように、レトリックの場合でも、発信者が取り立ててレトリックを意図したわけでもないのに受信者が言うなれば勝手にレトリックを発生させて受け取ってしまう場合がある。佐藤信夫氏はこれを《レトリック現象》と呼んでいるが[1]、本稿で扱う数式のレトリック性も正しくこのレトリック現象に他ならない。このようなレトリック現象として考えられるレトリックは、《技術としてのレトリック》とは多少趣を異にするところがあるが、レトリック本来の性格はもっているので「レトリック性」という言い方を筆者はしている。

数式のレトリック性として最初に考察の対象としたのは、Skempの挙げている以下の３つの縮約の仕方の異なる記号であった[2]。

$$23 \qquad 2\tfrac{1}{2} \qquad 2a$$

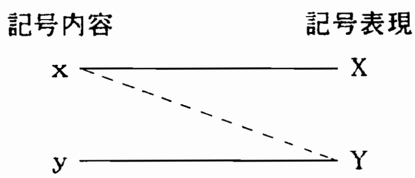
記号“２”は、３つの記号“３”、“$\frac{1}{2}$”、“a”の各々の左側にかかれてあるが、意味はすべて異なっている。

$$23 = 2 \times 10 + 3 \qquad 2\tfrac{1}{2} = 2 + \tfrac{1}{2} \qquad 2a = 2 \times a$$

ところが、これらの記号は視覚的に類似しているため、それを見る者がしばしばレトリックを発生させる。それは、学習上では時として子どものつまずきとして現れる。もっとも子どものつまずく原因はそう簡単に割り切れるものではなく、そこにレトリックが介在しているかどうかを同定することも困難なことがある。しかし、ここでは、視覚的に類似している３種の縮約性をもった記号を用いた計算において、他の縮約性をもっていると解されたために誤答として現れたものについては、レトリック性によるつまずきと判断することができる。具体的には、例えば、$2\frac{1}{2}$を$2 \times \frac{1}{2}$と考えたり$2a$を$2+a$と考えたりしたために誤答に至った場合のことである。このような誤答をする子どもは、$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ということを知らないのではない。一応知ってはいるが、時として誤って$2\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2}$と解してしまうのである。ルールを知らない場合や一貫して誤答をし続ける場合の対処の仕方は割りと簡単であろうが、時として正規のルールに従い、時として他のルールを用いるという場合が始末に悪い。が、実はそういうつまずきをする方がむしろ多いのである。芝原宏治氏によれば、このようなつまずきは「関係強化型の錯誤」と呼ばれるものになろう[3]。氏はこのような錯誤が生じる原因として、《「xy間に直接

類似関係を認定したら、それをxy間の極大直接類似関係として再認せよ。」という指令になびきやすい性質をもっているからである》としている[4]。このような強迫力と個々人の抵抗力とのせめぎ合いによって行動が決定されるということである。このような考えは、レトリック性によって生じるつまずきの原因を説明するモデルとして妥当であると考えられる。

さて、ここで1つ注意しておきたいことは、レトリックの代表ともいえる比喩の構造と、ここでレトリックと呼んでいるものの構造とは見かけ上異なっているということである。比喩は次のような構造をもっている[5]。



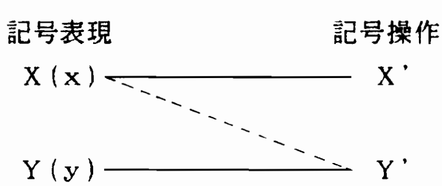
＜図1＞

「たとえられるものxとたとえるものyが何らかの点で類似性なり隣接性が認められたとき、yを表現するYでxのことを表す。」

というのが比喩の構造である。例えば、ある男性(x)がオオカミ(y)と性格的に類似性があると認められたときに、その男性(x)のことを「オオカミ」(Y)と呼ぶようなことである。この場合、2つの記号表現X,Yは見かけ上あるいは機能上は似ていない。

ところが、今議論している数式のレトリック性というのは、2つの記号内容x,yには特に類似性や隣接性はなく、記号表現X,Yに類似性がある場合である。子どもがよく起こすつまずきの原因の1つはX,Yが似ていることから、本来yに対して成り立つルールをxにも適用してしまうということであり、比喩と逆の構造をもっているように見える。果たしてこのような現象に対してもレトリックという言葉があてはまるのであろうか。

結論をいえば、筆者はこれもレトリックであると考えている。もちろん、記号表現までの問題、すなわち、記号表現と記号内容の関係に限定すればこのような解釈はできないかもしれないが、レトリックを広く、文法、論理を越える認識の問題と捉え、記号表現と記号操作を分けて考えるとレトリックと捉えることができる。以下の図で説明してみよう。



＜図2＞

記号操作X'は、記号内容xを表している記号表現Xに対して施されるものであり、記号操作Y'は、記号内容yを表している記号表現Yに対して施されるものである。2つの記号表現X,Yの間に類似性を認めた子どもが、本来Yに対して施される記号操作Y'をXに対して行った

ということがつまずきの原因である。もちろんX'を行うべきところを意図的にY'を行ったというわけではない。その辺は普通の比喩の用い方とは異なり現象としてのレトリック独特のところである。大事なことは、記号内容と記号表現の関係と記号表現と記号操作の関係は、異なるレベルの問題であるということである。言語学で問題とするのは、記号内容と記号表現の関係であるが、数学教育では、記号表現と記号操作の関係まで認識の問題として考察の対象にしていく必要がある。なぜなら、正しく記号表現ができても、記号操作が正しくできない子どもが現にいるので、分けて考えていく必要があるからである。このように考えるとつまずきの原因を数式のレトリック性と見ることは妥当といえよう。

以上のような考えに立ち、では子どもの実態は一体どうなっているのだろうかということで最初の調査を行った。次節で概要を述べておこう。

3.　最初の調査の概要

数式のレトリック性による子どものつまずきの実態を明らかにすることを目的とし、資料1の調査問題で調査を行った。中学校2年生109名に対しては平成4年9月21、22日に、大学生119名に対しては平成4年9月16、17日に調査を行った。中学生の調査結果については既に別の所で発表しているが[6]、大学生についても基本的に大差はなかった。「2 3群」「2 $\frac{1}{2}$群」「2 a群」に関していえば、「2 3群」はほとんど他群の影響を受けない、つまり、レトリック性による誤答はほとんど見られなかった。「2 $\frac{1}{2}$群」と「2 a群」については、お互いに影響を受けていた。特に、「2 $\frac{1}{2}$群」の問題は、誤答に至るケースが多かった。帯分数というのは小学校の算数では馴染みであっても、中学校以降ではほとんど出くわすことはないので、そのことが誤答の多さにつながっているのではないかと考えられる。また「2 a群」の影響を受けるというのは、中学校で文字式を学習したためかどうかというところが疑問に残る。これらのことを明らかにするためには、小学校の高学年から連続して子どもの状態を確認していかなければならない。同じ子どもの変化の様子を連続的に調べていくのがベストであるかも知れないが, 現在のところそれを行う用意が出来ていないので、違う子どもたちでその傾向を見ていくことから始めることにする。

4.　帯分数の四則演算に関する調査

先の調査では、「2 3群」「2 $\frac{1}{2}$群」「2 a群」の各群とも8題ずつ問題が用意さていたが、今回は、「2 3群」「2 $\frac{1}{2}$群」を調査問題とした（資料2）。なぜなら「2 a群」は、小学生にとっては未習内容だからである。今回の調査の目的が帯分数のレトリック性による誤答が学年によって異なるかどうか傾向を調べることにあるので、「2 $\frac{1}{2}$群」だけで十分と考えられるが、「2 3群」については参考として併せて調査を行った。（本稿ではその結果については触れないこととする。）調査対象、調査実施日等は以下の通りである。

調査対象		調査実施日
小学校5年生（宮崎市立S小学校）	166名	平成5年2月1日
小学校6年生（宮崎市立S小学校）	152名	平成5年2月1日

中学校１年生（高千穂町立Ｔ中学校）	127名	平成５年１月25日〜30日
中学校２年生（日向市立Ｈ中学校）	109名	平成４年９月21日，22日
大学生（宮崎大学教育学部３年生）	119名	平成４年９月16日，17日

中学生と大学生のデータは、前回のものを使用した。小学校５年生、６年生、及び中学校１年生のデータは後日追加調査したものである。上記５グループの対象については、調査実施日が４ヶ月あまり離れていることや、地域的な違いによる影響等も考えられるので、今回の調査から結論めいたものを引き出すことは困難であるが、一応の傾向を知る上では役立つものと思われる。以下に結果を示そう。

演算	No.	問題	小学校５年生			小学校６年生			中学校１年生			中学校２年生			大学生		
			誤答数（%）	レ誤数（%）	レ誤数割合	誤答数（%）	レ誤数（%）	レ誤数割合	誤答数（%）	レ誤数（%）	レ誤数割合	誤答数（%）	レ誤数（%）	レ誤数割合	誤答数（%）	レ誤数（%）	レ誤数割合
＋	⑦	$3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	24 14.46	1 0.60	4.17	35 23.03	0 0.00	0.00	30 23.62	0 0.00	0.00	28 25.69	3 2.75	10.71	4 3.36	1 0.84	25.00
	⑮	$2\frac{1}{2}+3$	35 21.08	7 4.22	20.00	54 35.53	7 4.61	12.96	46 36.22	17 13.39	36.96	31 28.44	11 10.09	35.48	4 3.36	1 0.84	25.00
−	②	$2\frac{1}{2}-1$	28 16.87	0 0.00	0.00	24 15.79	0 0.00	0.00	27 21.26	0 0.00	0.00	30 27.52	0 0.00	0.00	6 5.04	1 0.84	16.67
	⑩	$2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	25 15.06	4 2.41	16.00	26 17.11	3 1.97	11.54	14 11.02	0 0.00	0.00	21 19.27	4 3.67	19.05	7 5.88	3 2.52	42.86
×	⑤	$2\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	145 87.35	11 6.63	7.59	47 30.92	7 4.61	14.89	46 36.22	9 7.09	19.57	50 45.87	14 12.84	28.00	15 12.61	11 9.24	73.33
	⑬	$3\frac{1}{2}\times 2$	112 67.47	27 16.27	24.11	45 29.61	7 4.61	15.56	46 29.92	9 4.72	15.79	36 33.03	11 10.09	30.56	28 23.53	24 20.17	85.71
÷	⑧	$4\frac{1}{2}\div 2$	135 81.33	35 21.08	25.93	56 36.84	8 5.26	14.29	50 39.37	7 5.51	14.00	60 55.05	16 14.68	26.67	17 14.29	11 9.24	64.71
	⑯	$2\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$	143 86.14	14 8.43	9.79	32 21.05	6 3.95	18.75	30 23.62	9 7.09	30.00	46 40.20	21 19.27	45.65	16 13.45	12 10.08	75.00

＜表１＞

この表は、帯分数の問題に関する結果のみを取り出したものである。「誤答数」は、問題毎の誤答総数で、その下の数値は割合（誤答率）を表している。「レ誤答」というのは、誤答の中でもレトリック性による影響が見られるものの数である。「レ誤の割合」は、「レ誤答」を「誤答数」で割ったときの値(%)である。レトリック性による影響がみられる誤答の例としては、表２に挙げられている。（ ）内は人数を表している。

演算	No.	問題	小学校５年生	小学校６年生	中学校１年生	中学校２年生	大学生
＋	⑦	$3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$(1)			$4\frac{1}{2}$(2); 2(1)	2(1)
	⑮	$2\frac{1}{2}+3$	$\frac{8}{2}$, $\frac{4}{1}$(3); 4(1)	4(5); $\frac{8}{2}$(2)	4(13); $\frac{8}{2}$(3); $\frac{4}{1}$(1)	4(6); $\frac{8}{2}$(5)	4(1)
−	②	$2\frac{1}{2}-1$					0(1)
	⑩	$2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$(2)	$\frac{1}{2}$(3)		$\frac{1}{2}$(4)	$\frac{1}{2}$(2); $1\frac{1}{2}$(1)
×	⑤	$2\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$(10); $1\frac{1}{2}$(1)	$2\frac{1}{4}$(5); $\frac{1}{2}$(2)	$2\frac{1}{4}$(9)	$2\frac{1}{4}$(10); $\frac{1}{2}$(4)	$2\frac{1}{4}$(5); $\frac{1}{2}$(6)
	⑬	$3\frac{1}{2}\times 2$	$6\frac{1}{2}$(21); $3\frac{2}{4}$(4): $2\frac{7}{2}$, $3\frac{2}{2}$(1)	$3\frac{1}{4}$(3); 3(2); $3\frac{2}{4}$(1)	$3\frac{1}{4}$(3); 3(2); $3\frac{2}{2}$(1)	3(8); $6\frac{1}{2}$(2); $3\frac{1}{4}$(1)	3(23); $6\frac{1}{2}$(2)
÷	⑧	$4\frac{1}{2}+2$	$2\frac{1}{2}$(30); 1, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{1}$, $4\frac{1}{1}$, $4\frac{2}{2}$ (1)	$4\frac{1}{4}$(4); $2\frac{1}{2}$(3); $4\frac{2}{4}$(1)	$4\frac{1}{4}$(4); $2\frac{1}{2}$(3)	$4\frac{1}{4}$(10); 1(5); $2\frac{1}{2}$(1)	$4\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$; (4); 1(3)
	⑯	$2\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}$	2(9); $\frac{1}{2}$(3); $\frac{4}{2}$, $1\frac{1}{2}$(1)	2(4); $1\frac{1}{2}$(2)	2(7); $4\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$(1)	2(16); $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$(2); $\frac{4}{2}$(1)	2(12)

＜表２＞

5. 考　　察

表1からわかることで代表的なものを列挙すると以下のようになろう。

(1) 小学校5年生は、分数の乗除で誤答が極端に多い。

(2) 小学校6年生から中学校2年生までの3学年は、加減は概ね2割～3割、乗除は概ね3割～4割の誤答があり、乗除の方がやや多いという程度であるが、レトリック性による誤答となると、明らかに乗除の方が多い。

(3) 大学生は、全体的に誤答は少ないが、レトリック性による誤答となると、特に乗除においてはその割合が大きい。

これらについて若干コメントしよう。(1)の小学5年生は分数の乗除で誤答が多いということであるが、5年生にとっては分数の乗除はまだ学習していない内容なので必然的といえば必然的な結果といえる。取り立てて驚くほどのことではない。しかし、まだ学習していない内容の計算を子どもたちがどのように考えたかについては興味ある問題である。未習の内容に対しての処理の仕方がわからないとき、既知のもので使えそうなものを使うという方法がとられるのではないかと考えられるが実際はどうなのだろうか。もしそうだとすれば、メタファーが用いられる可能性が高くなると考えられる。表1を見ると、実際、多くの子どもたちがレトリック性による誤答をしているが、誤答全体の中での割合となると、他学年（大学生を除く）と比較して特に高いとは言えない。しかし、何人かの子どもたちがメタファーを用いているという事実は、押さえておくべきことであろう。

次に(2)及び(3)についてであるが、なぜ加減に比べて乗除の方がレトリック性による誤答が多いのかについてであるが、これは数値を眺めただけでは何も言えない。表2を考察する中で考えたいと思う。ただ言えることは、帯分数の構造がもともと加法を基盤においているため、加減は異質な演算ではないが、乗除の方は構造的に対立するからであろうと想像することはできる。

そこで、表2の考察に移るが、この表を見るといろいろと特徴的なことが言えそうである。いくつか列挙してみよう。

(1) 乗除のレトリック性による誤答は、加減に比べて数が多いだけでなく種類も多い。

(2) 1つの問題に対する誤答の中には、典型的なもの（代表的なもの）がある。

(3) 小学校5年生は、整数同士、分数同士の乗除を行う傾向があるが、小学生6年生から大学生は演算子のすぐ両隣の記号同士で乗除を行う傾向がある。

これらのうち(1)は、ある意味では当たり前のことかも知れない。加減の仕方はあれ以上方法がないという感じであるが、乗除となると整数部分に演算を施すのか分数部分に施すのかというだけでも2種類に分かれるし、分母に施すのか分子に施すのか、あるいは両方に施すのかと考えていくと多様な答が出てきそうである。

その中でもやはり特徴的なものはありそうである。⑤では$2\frac{1}{4}$、⑬では3、⑧では$4\frac{1}{4}$、⑯では2がそうである。小学校5年生を除いてはほぼ同じ傾向にあるといえる。

(3)のような傾向が出たのは、小学校6年生から大学生は一応計算したことのある式（見たことのある式）なので、とにかく計算しようと思ったら、$\frac{1}{2}$と$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$と2というかにも関連しそうな記号が近くにあったので計算したというところであろう。一方、小学校5年生は、やり方がよくわからないので、整数は整数同士、分数は分数同士で計算をしたためと思われる。

しかし、これについては想像の域を出ない。面接調査でもして確認してみる必要がある。

6. 結　　語

本研究の目的の1つに、学年が進むにつれて帯分数はだんだんと目に触れなくなってくるので、帯分数の誤答は増えてくるのではないか、ということに答えることがあった。得られたデータからはそれに答えられるだけのものは出てこなかった。ただ、誤答の中のレトリック性によるものの割合は、学年進行と共に徐々に増してきているように見受けられるし、大学生ともなればそれがもっとはっきりしている。しかし、これもそれを裏付けるだけの根拠があるとまでは言い切れない。

もう1つの目的てあった、文字式の学習がレトリック性による誤答へ影響してくるかを見ることは、特に顕著な影響が現れている訳ではないので、文字式の学習と $2\frac{1}{2}=2\times\frac{1}{2}$ と考えることとの関連はなんとも言えないという状況である。

ただ、今回の調査を通してわかったことは、どの学年に対しても共通に典型的なレトリック性による誤答があるということと、学年が進むにつれて誤答の中のレトリック性の影響によるものの割合が高くなっていく傾向がありそうだという予想が立てられたことである。

参考文献・引用文献

1）佐藤信夫「記号人間」大修館書店 1977 p.154
2）Skemp R.R. "Symbolic Understanding" Mathematics Teaching. №99 1982 p.60
3）芝原宏治「錯誤のレトリック」海鳴社 1992 p.199
4）ibid　p.212
5）この図は、平林一栄氏がかかれたものを参考にしている。
平林一栄「数学教育とレトリック」近畿数学教育学会発表資料 1988 p.6
6）拙稿「数学的表記のレトリック認識－数式に関する生徒の実態を中心に－」第25回数学教育論文発表会論文集 日本数学教育学会 1992 pp.77−82

Rhetorical Cognition of Mathematical Symbols
——In the Case of Calculation of Mixed Fraction——

Yoshinobu SOEDA

Abstract

Recent research findings of mine which have to do with rhetorical property on mathematical expression suggest that many children calculate mixed fractions in fail owing to their rhetorical property. So we research to clear the real state of children's rhetorical errors by investigating their calculation. We selected 5−8th grade students and undergraduates as our subjects for the perpose of seeing if learning letters in junior high school (in the 7th grade) influence to the children's rhetorical cognition.

By the investigation to the children, some results were concluded. We show some of them as follows:

1) The number of rhetorical errors on multiplication/division are more than that on addition/subtraction in each grade.

2) A typical rhetorical error is found to each grade and to each problem.

3) A rate of rhetorical errors to whole errors to each problem tends to increase with developping up the grades.

資料1

調　査　問　題

名　前［　　　　　　　　　　　　　］

次の計算をしなさい。

① $32\times3=$

② $2\frac{1}{2}-1=$

③ $4a+a=$

④ $40\div4=$

⑤ $2\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=$

⑥ $3a-3=$

⑦ $30+3=$

⑧ $4\frac{1}{2}\div2=$

⑨ $2a\times a=$

⑩ $23-3=$

⑪ $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$

⑫ $4a^2\div2=$

⑬ $10\times4=$

⑭ $2\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=$

⑮ $3a+3a=$

⑯ $56\div2=$

⑰ $3\frac{1}{2}\times2=$

⑱ $2a-a=$

⑲ $55+5=$

⑳ $2\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}=$

㉑ $3a\times3=$

㉒ $20-2=$

㉓ $2\frac{1}{2}+3=$

㉔ $2a\div a=$

資料２

調　査　問　題

名　前［　　　　　　　　　　　　　］

次の計算をしなさい。

① $32 \times 3 =$

② $2\frac{1}{2} - 1 =$

③ $30 + 3 =$

④ $40 \div 4 =$

⑤ $2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$

⑥ $23 - 3 =$

⑦ $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} =$

⑧ $4\frac{1}{2} \div 2 =$

⑨ $10 \times 4 =$

⑩ $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} =$

⑪ $55 + 5 =$

⑫ $56 \div 2 =$

⑬ $3\frac{1}{2} \times 2 =$

⑭ $20 - 2 =$

⑮ $2\frac{1}{2} + 3 =$

⑯ $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} =$