宮崎大学教育学部紀要　教育科学　第72号（1992）65－73頁

図的表記の思考への影響について
── 大学生と中学生との比較を中心に ──

添　田　佳　伸・藤　井　良　宜

How Iconic Figures Influence Thinking ?
— Comparison of University and Lower Secondary Students —

Yoshinobu SOEDA, Yoshinori FUJII

要　旨

図形学習における文章題では，しばしば題意伝達のために図が用いられる。ところが，一旦題意伝達の役割を終えた図は今度は思考の対象に変わってしまう。子どもはかかれてあるその図を用いて思考するのである。図が思考に影響を与えるとすれば，かかれてある図の違いによって問題に対する正答率にも違いが出てくるはずである。

そこで，筆者らは図による思考への影響を調べるためにある調査を行った。同じ問題文に対して3種類の図を付して正答率の違いを調べた。被験者として，中学生と大学生を選んだので，本稿では両者の共通点や相違点について中心に考察を進めた。

結論としては，調査問題2問のうち，［問題2］に関して，中学生の下位群，総計，大学生において図による影響がみられた。また，中学生，大学生全般に言えることとして，正答よりも特殊な図（より外延の狭い図）がかかれてあると正答率が下がる傾向があった。中学生と大学生とを比較した場合，大学生も中学生同様図に左右されやすい傾向がみられた。中学生の指導性を議論する上では，さほど大学生の結果は有用ではなかった。しかし，今後の図形指導において，どのような図をかけばよいか配慮していく必要があることを示す結果にはなっていると思われる。

1．はじめに

図形指導において図を欠かすことはできない。つまり，図なくして図形指導は出来ない。このことは敢えてここで言うまでもないことであろう。ところが，そのように大切な図について十分に吟味しその使用の反省が十分になされているとは必ずしも言えない。教科書にかかれてある図にはいろいろな役割がある。その1つに，文章題において題意を正確に伝える，もしくはわかりやすく伝えるということがある。これについては，平林一榮・片山一法らの教科書における図の用いられ方の調査がある[1]。これは，図的表記の諸問題に言及する中でその1つと

して取り上げられ報告されているものであり，また20年以上も前のわずかなデータでしかないが，図の題意伝達という役割を明確に位置づけていることは注目に値する。

ところが，文章題においては，初めは題意伝達の手段として用いられた図が，一度その役目を果たし終えると今度は思考の対象となる。子どもはかかれてあるその図を見ながら，またいろいろな線や記号をかき加えながら思考をするのである。したがって，どのような図を用いれば題意を伝えるのに適切であるかという議論とは別に，どのような図を用いれば思考にとって都合がいいのかまた悪いのかというようにどのような影響があるのかを議論しなければならない。

そこで筆者らは，中学校3年生を対象に図の思考に対する影響を調べるために調査を行った。これの詳細については既に他で発表している[2]のでそれを見ていただくとして，ここでは概略だけを述べておこう。すなわち，かかれてある図が異なると正答率に違いがでてくるかどうかを，同じ問題文に対して図を3種用意して調査した。（本稿で以下議論を行っている調査も同じものを用いているので，末尾の資料を参照されたし。）結論をいえば，かかれてある図が異なると正答率が変わってくるということであった。特に，正解よりも外延の狭い図がかかれている場合（例えば，「台形」が正解であるのに「平行四辺形」がかかれている場合），その図に引っ張られる傾向が見受けられた。また，成績の上位群，中位群，下位群とに分けてみてみると，下位群の方が図に影響されやすいことがわかった。

さて，本稿では，先の調査研究を受けて，大学生との比較を中心に考察していきたい。中学生と大学生とを比較する最大の意図は，中学生という発達途上の時期での影響と大学生という一応完成された年代での影響とを比較することにより，今後の中学生に対する指導性の意義を確かめようとしたからである。また，両者に共通して言えることがあれば，それは，一般的に言えることとして確認することもできる。

なお，本研究は数学教育におけるレトリック研究の一環であることを申し添えておこう。既に指摘しているように，図的表記には提喩性と呼ぶべき性質がある。すなわち，1つのかかれた図は，その図そのものを表すと同時に，あらゆる場合の一般の姿と見なさなければならない場合があるということである。本来図は一回性と呼ぶべき性質を持っているので，変数としては表現されない。ところが時として変数的に扱われる場合がある。それを図的表記の提喩性と呼んでいるのであるが，本稿における調査問題としての図はまさしくその変数的に扱われるべき図である。ところが，かかれてある図を純粋に変数としてあるいは一般の図形として見なしえないが故に，その図そのものに影響されてしまうわけである。図の変数的表記の問題は以前から全くなかったというわけではないが，レトリック研究の一端として捉える視点は新しいものであり，今後期待されるべき視点であると思われる。

2．調査の目的・方法

前節で述べたように，中学生と大学生のデータを比較することにより，両者の共通性や相違性を見いだし今後の指導の糧にすることが本研究の目的である。サンプルデータ数がさほど多くないことや，サンプリングされた被験者が一般の中学生や一般の大学生の写しだというわけではないので，今回の調査のみで結論めいたものを断言することは出来ないが，ある程度の傾向は見いだせるものと思われる。被験者実施時期等は以下の通りである。

【中学生】

＜対　象＞宮崎大学教育学部附属中学校３年生135名

＜調査日＞平成３年９月17日～21日

＜方　法＞Ⅰ．対象となる生徒の抽出

まず，宮崎大学教育学部附属中学校３年生173名を２年生の時の成績（特に図形に関する内容の）で１位-173位まで順位をつけ，成績の上位45名，中位45名，下位45名を抽出した。（上位群と中位群の間，中位群と下位群の間にはそれぞれ19名の調査の対象とならない生徒がいる。）

Ⅱ．問題の配布

それぞれの群において，９種類の問題を５人ずつに与えた。生徒にはテストとして答えさせた。

【大学生】

＜対　象＞宮崎大学教育学部における「算数教材研究」の受講生119名

（小学課程，幼稚園課程の３年生が大半）

＜調査日＞平成３年９月18日，19日

＜方　法＞Ⅰ．対象となる学生の抽出

大学生の場合は中学生と違って成績にあまり差はないという仮定のもと特に群分けしなかった。

Ⅱ．問題の配布

９種類の問題をランダムに与えた。

３．結果

調査結果は以下の通りである。問題１の正答は平行四辺形で問題２の正答は台形である。ただし，「平行四辺形，ひし形，長方形，正方形」のようにいくつかの図形を挙げて答えている場合は，その外延の最も広いもの（この場合は平行四辺形）を解答と見なした。また，誤答として扱われているものの中には，「長方形，正方形」のようにより特殊な図形を答えているものや無答のもの等さまざまであるが，正答でないものは一律誤答として扱った。

【中学生】

［問題１］

かかれた図	上位群		中位群		下位群		総計	
	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答
一般四角形	12	3	7	8	4	11	23	22
平行四辺形	13	2	10	5	7	8	30	15
長方形	13	2	8	7	4	11	25	20
合計	38	7	25	20	15	30	78	57

－表１－

［問題 2］

かかれた図	上位群		中位群		下位群		総計	
	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答
一般四角形	11	4	6	9	8	7	25	20
台形	13	2	7	8	6	9	26	19
平行四辺形	9	6	3	12	1	14	13	32
合計	33	12	16	29	15	30	64	71

－表2－

【大学生】

［問題 1］

かかれた図	正答	誤答	合計
一般四角形	23	15	38
平行四辺形	21	18	39
長方形	16	26	42
合計	60	59	119

－表3－

［問題 2］

かかれた図	正答	誤答	合計
一般四角形	16	24	40
台形	29	11	40
平行四辺形	8	31	39
合計	53	66	119

－表4－

［問題 1］と［問題 2］を合わせたもの

問題2＼問題1		一般四角形		平行四辺形		長方形		合計	
		正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答		
一般四角形	正答	4	5	4	6	2	1	22	40
	誤答	2	2	1	2	3	8	18	
台形	正答	6	2	4	2	4	0	18	40
	誤答	3	2	3	4	9	1	22	
平行四辺形	正答	2	4	1	4	3	6	20	39
	誤答	2	4	0	8	0	5	19	
合計		19	19	13	26	21	21	119	
		38		39		42			

－表5－

4．考察

本稿の目的は，かかれた図が思考に影響を与えるかどうかについて，中学生と大学生の比較を中心にその実態を明らかにすることにあるわけであるが，それを正答率から求めようとしている。したがって，ここでは次のような帰無仮説が立てられる。

仮説
かかれた図は，正答率に影響を与えない。

この仮説のもと以下考察を続けていこう。

まず，[問題1]，[問題2] のそれぞれについて，独立という仮定のもと各群の各セルの期待度数を求めると次のようになる[3)]。

[問題1]

かかれた図	上位群		中位群		下位群		総合		大学生	
	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答
一般四角形	12.67	2.33	8.33	6.67	5.00	10.00	26.00	19.00	19.16	18.84
平行四辺形	12.67	2.33	8.33	6.67	5.00	10.00	26.00	19.00	19.66	19.34
長方形	12.67	2.33	8.33	6.67	5.00	10.00	26.00	19.00	21.18	20.82

－表6－

[問題2]

かかれた図	上位群		中位群		下位群		総合		大学生	
	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答	正答	誤答
一般四角形	11.00	4.00	5.33	9.67	5.00	10.00	21.33	23.67	17.82	22.18
平行四辺形	11.00	4.00	5.33	9.67	5.00	10.00	21.33	23.67	17.82	22.18
長方形	11.00	4.00	5.33	9.67	5.00	10.00	21.33	23.67	17.37	21.63

－表7－

ここで，カイ2乗測定総計量を求めると，各々次のようになる[4)]。

[問題1]

上位群（T_{J1}）＝0.34
中位群（T_{C1}）＝1.26
下位群（T_{K1}）＝1.80
総　計（T_{S1}）＝2.37
大学生（T_{D1}）＝4.25

[問題2]

上位群（T_{J2}）＝2.73
中位群（T_{C2}）＝2.52
下位群（T_{K2}）＝7.80
総　計（T_{S2}）＝9.33
大学生（T_{D2}）＝21.92

このとき，Tは漸近的に自由度2のカイ2乗分布にしたがう。自由度2のカイ2乗分布のαポイントは，5.99(5%)，9.21(1%)であり，次のような結論を得る。

[問題1] に関しては，どの群も5%の有意水準では独立性の仮説は棄却されない。つまり，

図が正答率に影響を与えたとはいえない。

［問題２］に関しては，中学生の下位群，総計，大学生について有意水準５％で独立性の仮説が棄却される。特に，中学生の総計，大学生については有意水準１％でも十分棄却される。つまり，中学生の下位群は図によって正答率が影響を受けているといえるし，中学生全体としてみた場合，あるいは大学生についても図に左右されていることがわかる。

これらからいえることは，図が思考に影響を与える可能性は極めて大きいということである。問題によってはあまり図による影響を考慮しなくても構わない場合もあるであろうが，十分に図について配慮しなければならない場合もあることがわかった。

さて，中学生と大学生の数値を比較してみると，大学生の方が数値が大きいことがわかる。これは一体何を意味しているのであろうか。これは，大学生の方が中学生よりも図に影響される傾向が強いことを意味している。当初の予想では，中学生を上位群・中位群・下位群と分けると，下位群の方が図に影響されやすいという傾向が出るであろう，そして大学生は中学生の上位群もしくは中位群と同じくらいの結果になるであろうということであった。ところが，確かに中学生の上位群・中位群・下位群の比較においてはほぼ予想通りの傾向がみられたが，大学生の結果は意外であった。これは憂うべき事実である。しかし，よく考えてみれば頷けないわけでもない。中学生といっても今回の被験者は，県内でも優秀な成績を修めている附属学校の生徒であり平均的な中学生ではないといえるし，大学生の方は学校数学からしばらく遠ざかっていたといえるからである。とすると，データの取り方自体に問題があったといえるかも知れない。そのように考えると，大学生の方が平均的な中学生の姿に近いといえるかも知れない。それを検証することは今後へ譲ることとし，とりあえずここでは大学生のデータを用いてさらに次の分析を試みることにしよう。

これまでの考察は，［問題１］と［問題２］を独立して考えてきた。ここでは両問とも同じものを計ろうとしていたという立場からまとめた形で解析を行うことにする。表５は以下のような２×２分割表９つの組み合わせた形になっている。

		問題１	
		正　答	誤　答
問題2	正　答		
	誤　答		

－表８－

そこで，９つの２×２分割表の各セルの確率が等しいかどうかを検討しよう。まず，セル確率を計算すると以下のようになる。

		問題１	
		正　答	誤　答
問題2	正　答	0.25	0.25
	誤　答	0.19	0.30

－表９－

これを用いてピアソンのカイ２乗統計量を計算すると 51.37という値が得られる。自由度24のカイ２乗分布ではαポイントは42.98 (1%)なので，以下のような結論が得られる。

有意水準１％で仮説は棄却され，かかれた図が正答率に影響を与えているといえる。

これは，［問題１］と［問題２］を独立に扱った場合と同様の結果となったということである。

次に，各々の図の影響を調べるために次のようなモデルを考える。

$$\Pr\{\text{問題1：正答，問題2：正答} \mid \text{図1：}A_i\text{，図2：}B_j\} = \frac{1}{1+\alpha_i+\beta_j+\Psi\alpha_i\beta_j}$$

$$\Pr\{\text{問題1：誤答，問題2：正答} \mid \text{図1：}A_i\text{，図2：}B_j\} = \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i+\beta_j+\Psi\alpha_i\beta_j}$$

先の検定で，かかれた図が正答率に影響を与えることが示されたので，各々の図の影響がどのように現れるかを見るためにパラメトライズする。α，βはそれぞれ図の正答率への影響を表すパラメータで，数値が大きいほど正答率は低くなる傾向を示している。そこで，最尤法を用いてパラメータを推定すると次のような結果が得られる。

$\alpha_1=0.51$　$\alpha_2=0.67$　$\alpha_3=1.27$　$\beta_1=1.21$　$\beta_2=0.30$　$\beta_3=3.11$　$\Psi=1.56$

この推定値から以下のことがいえる。

- ［問題１］では，一般的な図がかかれていても正答率はほとんど変わらないが特殊な図がかかれているとかなり正答率が低くなる
- ［問題２］では，正しい図がかかれている方が正答を導きやすく特殊な図がかかれてあると誤答を導きやすい

まとめると，特殊な図がかかれてあると誤答につながりやすいということである。

5．結語

本稿の目的は，図形の文章題においてかかれてある図が異なると正答率に違いがでてくるであろうという予想に対し，中学生と大学生の結果を比較しそこから教育的示唆を得ることにあった。ところが実際は，「中学生だけについて」あるいは「大学生だけについて」という視点から考えれば，図による影響という視点から示唆は得られたものの，「両者を比較して」という視点からは，特に中学生の指導にとってプラスとなる結果は得られなかった。むしろ，大学生の結果の方が悪いところもあり，今後の本学での指導に対する啓発となるであろう。しかし，唯一得られた大きな成果としては，中学生も大学生も特殊な図（正答よりも外延の狭い図形を表している）がかかれてあると正答率に影響を与える（正答率が落ちる）ことが示されたことである。特殊な図が思考に影響を与えているという事実が確認されたことは，今後の図形指導において，どのような図をかけばよいかを配慮しなければならないことに対する警鐘として意

義深いものと思われる。

実際，手元にある教科書を見てみると，例えば以下のような問題については図を付していない。

「鋭角三角形ＡＢＣで，Ｂ，Ｃから，その対辺ＡＣ，ＡＢに，それぞれ，垂線ＢＤ，ＣＥをひく。このとき，ＢＤ＝ＣＥならば，△ＡＢＣはどんな形の三角形か。」[5]

また，「対角線の長さが等しい平行四辺形は，長方形であるといってよいか」[6] という例題の解法では，初めから長方形をかいて証明を展開している。そのほかの場合としての本研究で扱ったような「一般の図」や「特殊な図」が用いられている例は見あたらなかった。このことは，今回の調査から得られた示唆を既に実行に移しているといえるわけで喜ばしいことである。しかしながら，どのようなときに図をかきどのようなときにかかない方がよいのかという点については，まだ十分に議論されてないように思われる。今後の課題としたい。

注・文献

1）平林一榮・片山一法「図的表記の言語性」数学教育学論究ＸⅦ　1969年　pp.1-14

2）添田佳伸・藤井良宜「図的表記のレトリック性について－図的表記に関する実態調査を中心に－」第24回数学教育論文発表会論文集（日本数学教育学会）1991年 pp.43-48

3）例えば，「一般四角形がかかれた図に対する大学生の正答者」のセルの期待度数は，60×38／119によって求められる。

4）例えば，大学生のカイ２乗検定総計量（T_{D1}）は，

$$T_{D1}=(118/119)\{(23-19.16)^2/19.16+(15-18.84)^2/18.84+(21-19.66)^2/19.66+(18-19.34)^2/19.34+(16-21.18)^2/21.18+(26-20.82)^2/20.82\}$$

で求められる。以下を参照。

柳川堯「離散多変量データの解析」共立出版　1986年　p.93

5）「新訂　数学　２年」啓林館　1986年　p.125

6）上掲書５）　p.133

How Iconic Figures Influence Thinking ?

—— Comparison of University and Lower Secondary Students ——

Yoshinobu SOEDA, Yoshinori FUJII

Abstract

In learning geometry we often use iconic figures to give children conditions and questions in word problems. But the figure becomes an object of thinking after finishing plaing the role of giving some information. Children think the problem by using the given figure. If figures influence chidren's thinking, a rate of correct answer of each problem must be different according to being presented each figure.

Thus we investigated the differences of rates of correct answer by using three

types of figures to see the influence of figures to thinking. As our subjects are 9th grade students and undergraduate students, we discuss similarities and differnces of both students.

In conclusion, the influences of figures are appeared in groups of "lower" and "total" of 9th students and "undergraduate" students on "Problem 2". In case of using the figure whose extension is narrower than the correct figure, the rate of correct answer is in general lower than that of using correct figure. Both 9th grade students and undergraduate students tend to be influenced by the presented figures. Useful implication to instruction to lower secondary students can be hardly got from comparison lower secondary students and university students. But the conclusion implys that we must pay attention to presenting figures.

[資料]

調査に用いられた問題は以下の要領である。

（1）四角形ＡＢＣＤで,

△ＡＢＣ＝△ＡＢＤ＝△ＢＣＤ

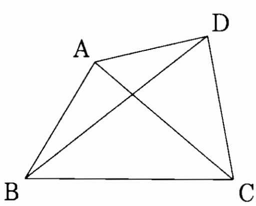
のとき，この四角形はどんな形の四角形になるか。

（2）四角形ＡＢＣＤの対角線の交点をＯとするとき,

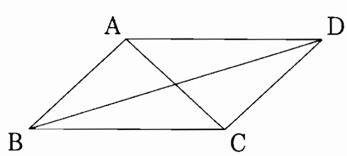
△ＡＯＢ＝△ＤＯＣ

ならば，この四角形はどんな形の四角形になるか。

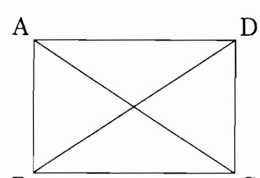
また（1）で用いられた３種の図は以下の通りである



一般四角形

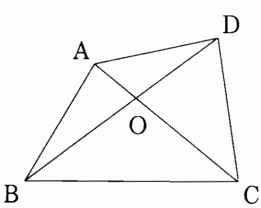


平行四辺形

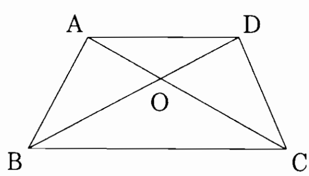


長方形

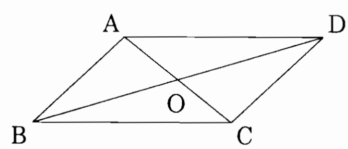
さらに，（2）で用いられた３種の図は以下の通りである。



一般四角形



台　形



平行四辺形

(1992年 4 月30日　受理)