宮崎大学教育学部紀要　芸術・保健体育・家政技術　第59号（1986）１—19頁

アニキウス・マンリウス・セベリウス・ボエティウス（480ころ-524）とその「音楽論」（そのⅧ）

——各種音程の構成及びその計算方法を中心として——

竹　井　成　美

Studies on Anicius Manlius Severius Boethius (ca. A.D. 480-524) and his Work "De institutione musica" (Ⅷ)

——On the Contents concerning "Constructions of Various Musical Intervals and Methods of Calcultaion of Various Musical Intervals"——

Shigemi Takei

Abstract

In this study I made researches into the field of "musical intervals "in Boethius' work "De institutione musica". Particularly I made researches into the names and the constructions of musical intervals, the various numerical demonstrations of musical intervals, the methods of calculation of musical intervals based on the theory of number in the Medieval Europe, and so on. Especially we have found out the Medieval singularities in the methods of calculation of musical intervals and the numerical demonstrations of musical intervals. And we have taken a great interest in the contents. By elucidating them minutely, we can have good understanding how indispensable the studies on the theory of number had been in the musical studies in the Medieval. And this shows that **musica** had occupied a principal position in **quadrvium** as an arithmetical subject of study. The contents of my study are as follows.

1. Names of musical intervals and methods of calculation of musical intervals
2. Constructions of musical intervals
3. Methods of calculation of various minute musical intervals
4. Numerical demonstrations of various musical intervals

These studies on Boethius will give much suggestions to the ideal way of the future musical studies and the musical education in Japan.

序

先きの論文[1]で，ボエティウス（Anicius Manlius Severius Boethius 480ころ-524年）の「音楽論 De institutione musica」中に記されている数理論の内容を明らかにしたが，本稿では，それらの数理論を基礎とした各種音程の算出方法を中心に，音程の名称，音程の構成，さらに音程の算出にともなう多様な数値的証明方法等を明らかにし，これらが中世音楽研究にどのような影響を与え，さらに現代のわが国の音楽研究及び音楽教育にどのようなかかわりをもつかを解明することを目的とする。

とくに，わが国の音楽教育においては，音程についての理論は，その音程名を中心に教授されるが，完全8度，5度，4度等の響きが，いかにして生ずるのか，例えば，ピアノで完全8度の響きが生ずる場合の弦長比はどうであるか，などといった音響学的教授は全く行われていないのが現状である。従って，音楽を専攻する学生でさえ，音律論等の知識がないままに，平均律によるピアノや純正音律によるヴァイオリンを演奏している状態である。

この点において，ボエティウスの「音楽論」における音程に関する記述方法は，わが国の今後の音楽教育のあり方に多くの示唆を与えるものである。

I. 音程の名称及び比率関係について

〔1〕 音程の名称及び比率[2]

中世・ルネサンス時代の音程の呼称方法は二通りあり，一つは，現行の呼称法とほぼ同じ，同度（unisonus），短2度（secunda imperfecta），長2度（secunda perfecta），短3度（tertia imperfecta），長3度（tertia perfecta），完全4度（quarta），完全5度（quinta），短6度（sexta imperfecta），長6度（sexta perfecta），短7度（septima imperfecta），長7度（septima perfecta），完全8度（octava）というように，完全・長・短（ー・perfecta・imperfecta）と度数を結合した形で示す方法である。もう一つは，ピタゴラス音律論による音程表示法であり，ボエティウスはその呼称法を踏襲して，完全8度を diapason，完全5度を diapente，完全4度をdiatessaron，全音（長2度）を tonus と呼んでいる。[3]

さらに，ボエティウスは，オクターヴ以上の音程については，完全12度を diapente ac diapason（完全5度と完全8度），完全15度を bis diapason（2つの完全8度）というように，前述の基本音程を結合する形で呼んでいる。全音より小さい音程の呼称については，次章で扱う。

今日の音楽理論においては，音程に関しては，その名称を扱うのみであるが，ボエティウスの「音楽論」においては，これらの音程関係の数値的規定法である比率が，音程名と並置して論述されている[4]；

彼は，diapason と diapente の比率をそれぞれ $2/1$，$3/2$ とするピタゴラス音律論に従って，その他の音程を算出し，当時の比率名を対置している；

diapason は dupla（$2/1$），diapente ac diapason は tripla（$3/1$），bis diapason は quadrupla（$4/1$）であり，これらは前論文で明らかにした[5] inaequalitatis の比率の種類の multiplex に属する。一方，diapente は sesqualtera（$3/2$），diatessaron は sesquitertia（$4/3$），tonus は sesquioctava（$9/8$）であり，これらは superparticularis に属する。

ただし，彼は現行の長・短3度，長・短6度，長・短7度に相当する音程の呼称法，比率につい

てはとくに記述していない。[6]

〔2〕 音程の比率関係の証明

さらに彼は，これらの音程と比率関係を，音楽研究を志向する者により認識させるために，次のような反例によって証明するというユニークな方法をとっている。

(1)　「完全8度は multiplex の比率に属さない」という反例による証明;[7]

この証明についてのみ，大意を示す;[8]

完全8度が multiplex に属さずに superparticularis の比率に属すと仮定すると，完全8度は sesqualtera (3/2) とするのが適当である。完全8度は完全5度と完全4度の結合で生ずるが，完全8度の仮説の比率を 3/2 とすれば，完全5度は sesquitertia (4/3)，完全4度は sesquiquarta (5/4) となるはずである。ところが，完全5度と完全4度を結合した仮説の比率は 5/3 (4/3×5/4＝5/3)[9] となり，仮説の完全8度の 3/2 と矛盾する。従って，この仮説は否定され，結局，「完全8度は multiplex の比率に属す」ことが証明される。

(2)　「完全5度，完全4度，全音は，superparticularis の比率に属さない」という反例による証明;[10]

①　完全5度と完全4度が multiplex の比率に属すと仮定すると，完全5度は完全4度より大きな比率に属し，双方は不断の関係にあるので，完全4度を dupla (2/1)，完全5度を tripla (3/1) とするのが適当である。全音は，完全4度より小さな比率に属すが，dupla (2/1) より小さい multiplex の比率はないので，全音の比率は superparticularis の中の sesqualtera (3/2) に属すことになる。ところで，全音は完全5度と完全4度の差である。しかし，仮説の比率から算出すると，2全音の仮説の比率は 2¼ (3/2×3/2＝9/4＝2¼) となるが，2全音と半音から構成される完全4度の仮説の比率は 2/1 であり，比率に注目すると，2全音＋半音 (2/1) ＜ 2全音 (2¼) という矛盾が生ずる。従って，この仮説は否定される。

②　完全5度が quadrupla (4/1)，完全4度が tripla (3/1)，全音が dupla (2/1) であると仮定する。全音の仮説の比率は，完全5度と完全4度の差で 1⅓ (4/1÷3/1＝4/3＝1⅓) となる。従って，3全音の仮説の比率は 2 10/27 (4/3×4/3×4/3＝64/27＝2 10/27) となるが，2全音と半音から構成される完全4度の仮説の比率は 3/1 であり，比率に注目すると，3全音 (2 10/27) ＜ 2全音＋半音 (3/1) という矛盾が生ずる。従って，この仮説も否定される。

③　完全4度は multiplex でないと仮定し，完全5度は dupla (2/1)，完全4度は sesqualtera (3/2)，全音は sesquitertia (4/3) とする。ところで，2全音の仮説の比率は 1 7/9 (4/3×4/3＝16/9＝1 7/9) となり，2全音と半音からなる完全4度の仮説の比率である 3/2 より大きくなる。比率に注目すると，2全音＋半音 (1½) ＜ 2全音 (1 7/9) という矛盾が生ずる。従ってこの仮説も否定される。

以上の ①，②，③ の反例による証明により，結局，「完全5度，完全4度，全音は superparticularis の比率に属す」ことが証明されたわけである。

(3)　「完全5度と完全4度は，superparticularis の中でも大きな比率に属す」ことの証明;[11]

superparticularis の比率の中では，sesqualtera (3/2)，つづいて sesquitertia (4/3) が大きい比率である。完全8度は，完全5度と完全4度の結合で生ずるが，もし完全5度と完全4度が，3/2 と 4/3 以外の比率に属すとすると，完全8度の仮説の比率は，本来の比率である 2/1 (3/2×4/3＝2/1) にはならない。従って，「完全5度は 3/2，完全4度は 4/3 である」ことが証明される。

(4) 「完全5度は sesqualtera (3/2)，完全4度は sesquitertia (4/3)，全音は sesquioctava (9/8) に属す」ことの証明;[12]

$3/2$は$4/3$より大きい比率であり，完全5度は完全4度より大きい音程であるので，完全5度が$3/2$，完全4度が$4/3$であることは間違いない。また，全音は，完全5度と完全4度の差であるので，$9/8$（$3/2 \div 4/3 = 9/8$）であることが証明される。

以上のように，反例を交えた証明により音程の比率関係が一層明らかにされたわけであるが，これらの証明過程には三段論法的要素がみられ，単に音楽理論のみを羅列することに終始しない中世独特の論理の展開パターンが浮きぼりにされている。

この点を，現代の音楽研究及び音楽教育と比較検討することが，今後の問題点として残されている。

〔3〕 オクターヴ以上の協和観

オクターヴ以上の音程については，古来，音楽理論家によって協和観が若干異なっており，完全11度（diapason ac diatessaron）については，ピタゴラス学派及びその見解を踏襲するボエティウスは，その音程を〝不協和音程〞あつかいにしているのに対し，プトレマイオス（Claudius Ptolemaeus 85ころ–163年ころ）は〝協和音程〞とみなしている。

ボエティウスによれば，ピタゴラス学派らは，〝協和音程の比率は，multiplex と superparticularis の比率に属す[13]〞として，音程の比率に注目した協和判断を示した。すなわち，完全8度，完全5度，完全4度の比率は，それぞれ$2/1$，$3/2$，$4/3$で multiplex の比率に属すので，それらの音程を協和音程とみなしたのに対し，完全11度の比率は$8/3$（$2/1 \times 4/3 = 8/3$）で，multiplex superpartiens の比率に属すので，〝不協和音程〞としたとされている[15]。

一方，プトレマイオスは，音程の構成に注目し，完全8度も完全5度も協和音程であるので，それを結合した完全11度は当然〝協和音程〞であるとしたとされている[15]。

このように，古代・中世においては，オクターヴ以上の協和観も含めて，先きの論文[16]でも明らかにした協和順位等が，協和に関する研究の重要課題であったのである。

協和研究の乏しいわが国の音楽教育に多くの示唆を与える問題でもある。

Ⅱ．音程の構成

以上の音程名及び比率関係につづいて，彼の「音楽論」の中では，各種音程がどのように構成され，ついで全音，半音，その他の微小音程がオクターヴ内のどの位置に生じ，しかもそれらの音程の比率がどのように算出されるかが，次の課題として掲げられている。

彼は，まず基本音程である完全8度，完全5度，完全4度の構成を確認することから始めている；

完全4度は，4つの音と3つの間隔，つまり2つの全音と1つの不完全な半音（non integrum semitonium）から構成され，完全5度は，5つの音と4つの間隔，つまり3つの全音と1つの小さい半音（minus semitonium）から構成されている（訳注：表現は違うが，ここでの不完全な半音は小さい半音と同義である）。従って，完全8度は，5つの全音と2つの小さい半音から構成されることになる[17]。

次に，この3つの基本音程の組み合わせから，全音，小さい半音，大きい半音，コンマの位置関係が次のように図示されている[18]；

(1) 全音（tonus）

図1のように，Bから完全5度上にCを定め，Cから完全4度下にDを定めると，完全5度と完

全４度の差として全音ＢＤが生ずる。

図１

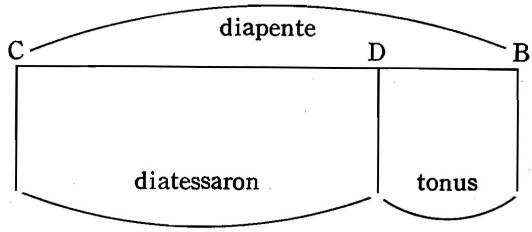
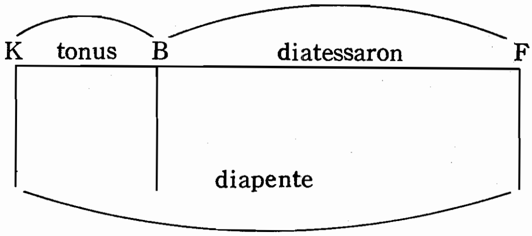


図２は，Ｂから完全４度上にＦを定め，Ｆから完全５度下にＫを定めると，同じく差として全音ＢＫが生ずることを示したものである。

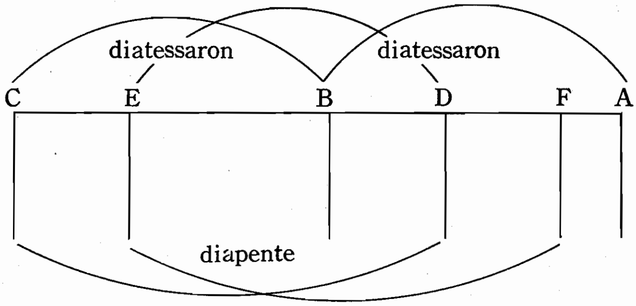
図２



(2)　小さい半音（semitonium minus）

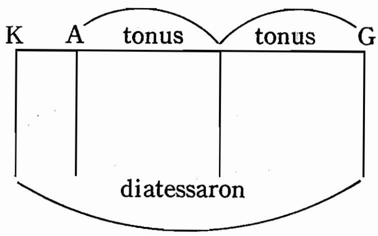
小さい半音は，semitonium minus と呼ばれる。図３のように，Ａから完全４度上にＢを定め，さらにＢから完全４度上にＣを定める。次に，Ｃから完全５度下にＤを定めれば，ＢＤに全音が生じ，さらにＤから完全４度上にＥを定め，Ｅから完全５度下にＦを定めれば，ＤＦは全音となる。ＡＢ間は完全４度であるので，全音ＢＤ，ＤＦを引けば，小さい半音ＦＡが生ずることになる。

図３



また図４のように，Ａから２全音上にＧを定め，Ｇから完全４度下にＫを定めると，ＡＫは小さい半音となる。

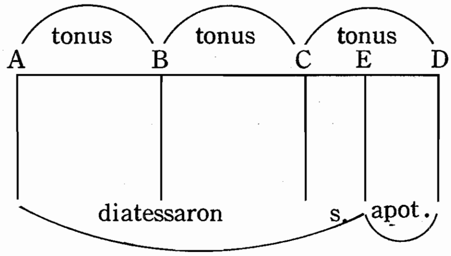
図４



(3) 大きい半音（apotome）

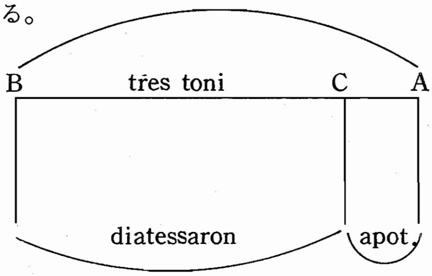
大きい半音は，apotome と呼ばれ，図5のように3全音と完全4度の差として生ずる。3つの全音をAB，BC，CDと重ね，3全音ADから完全4度AEを引くと，DEに大きい半音が生ずる。CEは小さい半音である。

図5



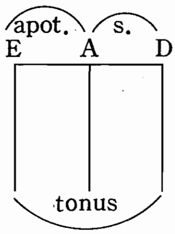
同じく図6のように，Aから3全音高くBを定め，Bから完全4度下にCを定めると，ACに大きい半音が生ずる。

図6



また，図7のように，Aから小さい半音分高くDを定め，Dから全音下にEを定めると，AEに大きい半音が生じたことになる。

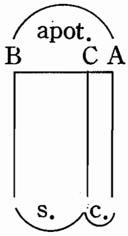
図7



(4) コンマ（comma）

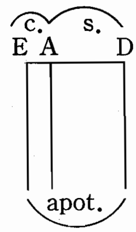
大きい半音と小さい半音の差である微小音程は，コンマ（comma）と呼ばれ次のように生ずる。図8のように，Aから大きい半音分上にBを定め，Bから小さい半音分下にCを定めると，ACにコンマが生ずる。

図8



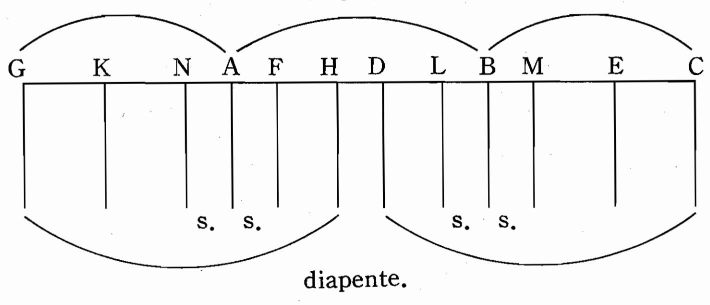
また図9のように，Aから小さい半音分上へDを定め，Dから大きい半音分下にEを定めると，AEにコンマが生じたことになる。

図9



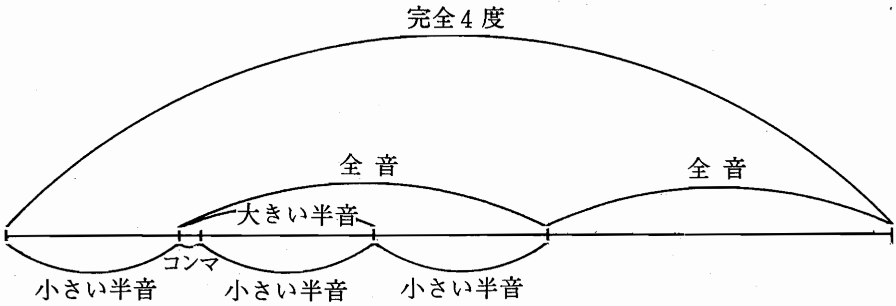
以上の音程関係を完全5度と完全4度の組み合わせから幅広く説明したのが，図10である。完全4度ABの上に完全4度BCを定め，Cから完全5度を下に導きDとすると，全音BDが生ずる。Dから完全4度を上に定めEとし，Eから完全5度を下に定めFとすると，DFは全音となる。DF＝BD＝全音なので，完全4度ABからとりさるとAFは小さい半音となる。Aから完全4度を下に導きGとし，Gから完全5度を上に導きHとすると，AHは全音となる。AFが小さい半音なので，FHは大きい半音となる。Hから完全4度下に導きKとし，Kから完全5度を上に導きLとすると，HLは全音となる。またAHも全音なので，BLは小さい半音である。またBDも全音なので，DLは大きい半音となる。さらにFから完全4度を上に導きMとすると，BMは小さい半音となる。Lから完全4度下に導きNとすると，ANは小さい半音となる。完全4度ABに小さい半音を2つ，つまり上にBMと下にANを重ねると，MNは5つの小さい半音と2つの大きい半音から構成されるので，完全5度より小さい。つまり，（小さい半音＋大きい半音＝全音なので），MNは2つの全音と3つの小さい半音から構成されるともいえ，さらに3つの小さい半音のうちの2つの半音は全音より1コンマ分小さいことから，結局MNは，3つの全音と1つの小さい半音より1コンマ小さいことになり，3全音と小さい半音から構成される完全5度より1コンマ分小さいということになる。

図10



今日の音楽教育では，短2度（半音）を最小音程としてオクターヴを12分割する平均律を採用しているので，これらのピタゴラス音律による音程構成のように，音程がいかに構成されるかは，とくに音楽理論ではとりあげられていない分野である

以上の音程関係，とりわけ小さい音程，大きい音程，コンマの関係を図示すると次のようになる。[19]



Ⅲ．全音より小さい各種音程の計算比率

ボエティウスの「音楽論」では，以上の音程の構成を理解した上で，次にそれらの音程の比率を算出することが課題とされている（ここであつかわれる音程の比率の算出はピタゴラス音律論によるもので，音程の最小単位の半音の比率を $2^{\frac{1}{12}}$ とする今日の平均律による音楽理論ではあつかわれない分野である）。

(1)　小さい半音

当時の音楽理論では，半音は，今日のように全音の完全な半分ではなく，semitonium minus と呼ばれる小さい半音と，apotome と呼ばれる大きい半音が存在したことは前述したが，ボエティウスによれば，古代では，小さい半音は "limma" あるいは "diesis" と呼ばれたとされている。[20]

小さい半音の比率計算は次のようである；

小さい半音は，完全４度と２全音の差として生ずるので，まず２全音の連続する比率を求める。全音の比率は sesquioctava（８：９）なので，８に８を乗じ（$8\times8=64$），その64に64の⅛を加えて（$64+\frac{64}{8}=72$）[21]，64：72という sesquioctava の８項を得る。次に，72に72の⅛を加えて（$72+\frac{72}{8}=81$），72：81という sesquioctava の９項を得る。ここから64：72：81という連続する全音の比率が得られる。次に，その最初の数64と完全４度の比率である sesquitertia（３：４）の関係にある数を求める。64は３で割り切れないので，64に３を乗じ（$64\times3=192$），その192に192の⅓を加えて（$192+\frac{192}{3}=256$），192：256という sesquitertia の64項を得る。以上の共通項を求めて，小さい半音の比率を算出する。

$$\text{２全音}\quad \overbrace{64 : 72}^{8:9}\;\overbrace{: 81}^{8:9}$$

$$\text{完全４度}\quad \underbrace{\underset{(64\times3)}{192} \quad : \quad 256}_{3:4}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\overbrace{192 : 216}^{\text{全音}}\;\overbrace{: 243}^{\text{全音}}\;\overbrace{: 256}^{\text{小さい半音}}}_{\text{完全４度}}$$

こうして，小さい半音の比率 $\frac{256}{243}$ が得られた。

(2)　大きい半音

大きい半音は apotome と呼ばれたが，ボエティウスによれば，当時は “decisio” とも呼ばれたらしい[22]。

大きい半音の比率計算は次のようである；

大きい半音は全音と小さい半音の差として生ずる。小さい半音の比率は前項から243：256であるので，その最初の数 243 と 全音の比率である sesquioctava（8：9）の 関係にある 数を求める。243 は 8 で割り切れないので，243 に 8 を乗じ（243×8＝1944），その 1944 に 1944 の 1/8を 加えて $\left(1944+\frac{1944}{8}=2187\right)$，1944：2187 という sesquioctava の243項を得る。以上から大きい半音を算出する。

小さい半音　243　：　256

全　　音　$\underbrace{\underset{(243\times 8)}{1944} \quad : \quad 2187}_{8\,:\,9}$

⇩

$\underbrace{\overbrace{1944 \quad : \quad 2048}^{\text{小さい半音}} \quad : \quad \overbrace{2187}^{\text{大きい半音}}}_{\text{全音}}$

大きい半音の比率 $\frac{2187}{2048}$ が得られた。

(3)　コンマ

大きい半音と小さい 半音の差である コンマは，6 全音と完全 8 度の 差として次のように 算出される[23]；

まず連続する 6 全音の比率を導く。ボエティウスは，その過程を省いているが，先きの論文で明らかにした multiplex から superparticularis を無限に 導く方法を応用すると，簡単に 6 全音の連続する比率が得られる[24]。

⟶ octuplex（1：8；$\frac{8}{1}$）

1	8	64	512	4096	32768	262144
	9	72	576	4608	36864	294912
		81	648	5184	41472	331776
			729	5832	46656	373248
				6561	52488	419904
					59049	472392
						531441

↓ sesquioctava（8：9；$\frac{9}{8}$）

最右端の数の上下関係が， 6 全音の 連続する比率となり， 6 全音の 比率は 262144：531441 となる。ところで， 完全 8 度の 比率は dupla（2/1）であるので， 6 全音の 連続する比率の 最初の数 262144に対して， 2 倍関係にある 数は 524288（262144×2＝524288）である。 以上から，コンマが算出される。

6 全 音　262144　:　531441

完全8度　262144　:　524288

⇩

6 全音

262144　524288　531441

完全8度（5全音＋2半音）　コンマ

コンマの比率$\frac{531441}{524288}$が得られた。

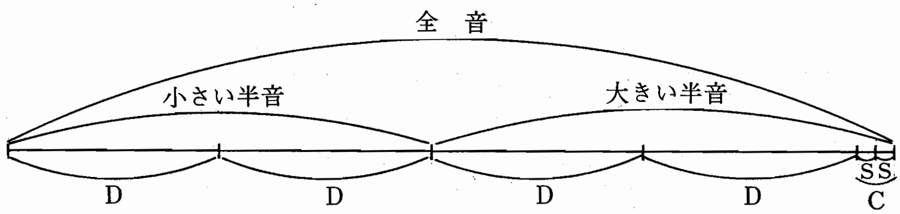
(4) フィロラウスによる音程の算出方法

ボエティウスによれば，ピタゴラス学派のフィロラウス (Philolaus) は，全音以下の音程を別の方法で算出したとされており，その方法は次のようである[25]；

フィロラウスは，割り切れない最初の数を3として，その3乗を求める ($3^3=27$)。この27は24に対して全音の比率をなす (24 : 27 = 8 : 9)。ところで，全音は大きい半音 (apotome) と小さい半音 (diesis あるいは semitonium minus) に分けられ，その大きい半音と小さい半音の差がコンマである。さて，本来の小さい半音の比率は$\frac{256}{243}$であるが，フィロラウスは，その双方の数の差である13 (256－243＝13) に注目し，小さい半音を13，大きい半音を14 (27－13＝14) とし，コンマを1 (14－13＝1) とすれば，数値的に比率関係が妥当であるとした。つまり，全音を27としたわけであるが，この数は，本来の全音の比率 (8 : 9) の27項にあたる216 : 243の双方の数の差でもある (243－216＝27)。以上のことから，フィロラウスは，全音を27，小さい半音を13，大きい半音を14，コンマを1としたのである。

また，フィロラウスは，コンマより小さい微小音程についても言及していることを，ボエティウスは，新しく章を設けて紹介している[26]。それによると，コンマの半分が “schisma”，小さい半音の半分が “diaschisma” とされている。全音を基準にして考えると，①全音＝大きい半音＋小さい半音，(2)全音＝2小さい半音＋コンマ，③全音＝2小さい半音＋2 schisma，④全音＝4 diaschisma＋2 schisma という数式が成立する。

以上をわかりやすく図式すると，次のようになる。



D : diaschisma,　S : schisma,　C : comma

フィロラウスの方法は別にして，以上の音程の算出方法は，平均律が生み出される以前の，ピタゴラス音律論によるものであるが，平均律を理解する上には是非とも必要な研究分野である。

Ⅳ．各種音程に関する数値的証明

ボエティウスの「音楽論」においては，音程の構成，比率の算出方法を理解した上で，さらにそれらを確実に把握させるために，様々な角度からの数値的証明がなされている。

〔1〕「半音は，全音の完全な半分ではない」という証明；

この証明については，3通りの方法が示されている。

(1)　証明1[27)]

すでに明らかなように，ボエティウスの「音楽論」では，全音は大きい半音（apotome）と小さい半音（semitonium minus）の大小二種類に分割されている。ところが，彼も論述しているが，アリストクセヌス（Aristoxenus 紀元前4世紀）は，〝半音は，半音と呼ばれるように，まさに全音の半分である〞という見解を示していた[28)]。そこで，ボエティウスはこのアリストクセヌスの見解を否定して，自らの見解を正すために次のような証明をなしている；

まず，全音の比率（8：9）が完全に二等分されることはないことを証明するために，その2項（16：18）に注目する。その16と18の数の間には自然数17が存在する。Aを16，Bを18，Cを17とする。

A	C	B
16	17	18

ACの比率は，$\frac{17}{16}$で sesquisextadecima，CBの比率は，$\frac{18}{17}$で sesquiseptimadecima である。ところで，$\frac{17}{16}>\frac{18}{17}$なので，AB（つまり全音）の完全な中間はAC間にあることになり，その点をDとする（本論ではその数をXとおく）。

A	D C	B
16	X 17	18

現代の数理論では，$\frac{X}{16}=\frac{18}{X}$によって，$X=12\sqrt{2}$と簡単にDの数を得ることができる。しかし，中世の数理論には近代の整数と分数にあたる数しか存在しなかったので，Dの数を直接割り出すことをせずに，間接的にCがABの完全な中間でないことを次のように証明している；

①　Cを介してACの比率（$\frac{17}{16}$）と同率となる数（本論ではそれをYとする）を求める。

A	C	
16	17	Y

ACの比率（$\frac{17}{16}=1\frac{1}{16}$）を17に加えると，$Y=18\frac{1}{16}$が得られる（$17+1\frac{1}{16}=18\frac{1}{16}$）。

$$\overbrace{A\ (16)\qquad C}^{\frac{17}{16}}\overbrace{\ (17)\qquad B\ (18)\quad Y}^{\frac{17}{16}}\ \left(18\tfrac{1}{16}\right)$$

$$\underbrace{A\ (16)\qquad C\ (17)\qquad B\ (18)}_{\frac{9}{8}}$$

つまり，C（17）を完全な中央とみなした場合には，$\frac{17}{16}$と同率となる数は$18\frac{1}{16}$であり，全音の比率を構成するB（18）より大きい。従って，Cは全音の比率を構成するABの中央ではない。

②　Bを介してCBの比率（$\frac{18}{17}$）と同率となる数（本論ではそれをZとする）を求める。

C	B	
17	18	Z

上記計算法に習い，$Z=18+\frac{18}{17}=19\frac{1}{17}$となる。

$$\begin{array}{ccccc} & \overbrace{}^{\frac{18}{17}} & & \overbrace{}^{\frac{18}{17}} & \\ \mathrm{C} & & \mathrm{B} & & \mathrm{Z} \\ 17 & & 18 & & 19\frac{1}{17} \end{array}$$

次に，C（17）に対して全音の比率（$\frac{9}{8}$）を構成する数（本論ではそれをWとする）を求める。$W=18+\frac{9}{8}=19\frac{1}{8}$となる。

$$\begin{array}{cccccc} & \overbrace{}^{\frac{18}{17}} & & \overbrace{}^{\frac{18}{17}} & & \\ \mathrm{C} & & \mathrm{B} & & \mathrm{Z} & \mathrm{W} \\ 17 & & 18 & & 19\frac{1}{17} & 19\frac{1}{8} \end{array}$$
$$\underbrace{}_{\frac{9}{8}}$$

つまり，B（18）を完全な中央とみなした場合には，$\frac{18}{17}$と同率となる数は$19\frac{1}{17}$であり，C（17）に対して全音の比率を構成するW（$19\frac{1}{8}$）より小さい。従って，Bは全音の比率を構成するCWの中央ではない。

①，②の結果より，全音の比率は完全に二第分されることはない。つまり，全音は全く２つに分割できない，従って，「半音は，全音の完全な半分ではない」ことが証明された。

(2) 証明２[29)]

第２の証明は次のようである；

小さい半音の比率は$\frac{256}{243}$であるが，前項で明らかなように全音の完全な半分は，$\frac{17}{16}$と$\frac{18}{17}$の間に存在することから，$\frac{18}{17}<\frac{256}{243}<\frac{17}{16}$がもし証明されれば，間接的に半音は，全音の完全な半分であることが立証されることになる。まず，243の$\frac{1}{18}$（$\frac{243}{18}=13\frac{1}{2}$）を243に加えると，$256\frac{1}{2}$が生じ（$243+13\frac{1}{2}=256\frac{1}{2}$），$243:256\frac{1}{2}$という 18：19 の18項が生ずる。従って，$\frac{256}{243}<\frac{256\frac{1}{2}}{243}$と$\frac{256\frac{1}{2}}{243}=\frac{19}{18}$から，$\frac{256}{243}<\frac{19}{18}$となる。また，$\frac{19}{18}<\frac{18}{17}$なので，$\frac{256}{243}<\frac{18}{17}$である。さらに$\frac{18}{17}<$<u>完全な半音</u>なので，$\frac{256}{243}$（小さい半音）< <u>完全な半音</u>となる。従って，小さい半音は完全な半音より小さくなる。すなわち，「半音は全音の半分ではない」ことが証明されたことになる。

(3) 証明３[30)]

第３の証明は次のようである；

アリストクセヌスの説のように，半音は全音の完全な半分であるとすると，２つの完全４度（４全音＋２半音）は５全音と等しく，完全８度（５全音＋２半音）は６全音と等しくなる。６全音の連続する比率は前述のように右のようである。

$$\text{5全音}\left\{\begin{array}{l} 262144 \\ 294912 \\ 331776 \\ 373248 \\ 419904 \\ 472392 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ 531441 \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} 8:9 \\ \left.\right\} 8:9 \\ \left.\right\} 8:9 \\ \left.\right\} 8:9 \\ \left.\right\} 8:9 \\ \left.\right\} 8:9 \end{array}$$

5全音の比率は，$\frac{472392}{262144}$である。次に，262144に対して上へ完全4度の比率（3：4）を構成する数を求める。262144を3で割った数（262144÷3＝87381⅓）を262144に加えると（262144＋87381⅓＝349525⅓），262144：349525⅓という sesquitertia（3：4）の比率が得られる。次に472392に対して下へ完全4度の比率（3：4）を構成する数を求める。472392を4で割った数（472392÷4＝118098）を472392からひくと（472392－118098＝354294），354294：472392という sesquitertia（3：4）の比率が得られる。

$$
5\text{全音}\left\{\begin{array}{lll}
\text{A} & 262144 & \left.\right\} \text{完全4度} \\
\text{B} & 349525\tfrac{1}{3} & \\
\text{C} & 354294 & \left.\right\} \text{完全4度} \\
\text{D} & 472392 &
\end{array}\right.
$$

アリストクセヌスの説が正しいなら，本来BとCの数は同一であるはずである。しかし，このように，B，C間に差が生じたということは，「半音は全音の完全な半分ではない」のである。

〔2〕「コンマの比率は$\frac{75}{74}$より大きく$\frac{73}{74}$より小さい」という証明[31)]；

コンマは，6全音と完全8度の差として生じ，その比率は$\frac{531441}{524288}$であることは前述した。

$$
6\text{全音}\left\{\begin{array}{ll}
262144 & \left.\right\} \text{完全8度} \\
524288 & \left.\right\} \text{コンマ（差 7153）} \\
531441 &
\end{array}\right.
$$

(1) まず，コンマの比率が$\frac{75}{74}$より大きいことの証明は次のようである；

531441と524288の差である7153（531441－524288＝7153）に，74，75をそれぞれ乗じて，上記数と比較対照する。7153×74＝529322，7153×75＝536475，529322－524288＝5034，536475－531441＝5034である。

$$
\text{コンマ；差 7183}\left\{\begin{array}{lll}
\mathbf{524288} & & \left.\right\} \text{差 5034} \\
529322 & (7153\times74) & \\
\mathbf{531441} & & \left.\right\} \text{差 5034} \\
536475 & (7153\times75) &
\end{array}\right.
$$

⇩

$$\frac{\mathbf{531441}+5034}{\mathbf{524288}+5034}=\frac{536475}{529322}=\frac{7153\times75}{7153\times74}=\frac{75}{74}$$

⇩

$$\frac{\mathbf{531441}+5034}{\mathbf{524288}+5034}=\frac{75}{74}$$

前論文で明らかにした近似値数間の比率の大小の決定方法に照らすと，$\frac{531441}{524288}>\frac{75}{74}$となる。つまり，コンマの比率は$\frac{75}{74}$より大きいことが証明された。

(2) 次に，コンマの比率が$\frac{74}{73}$より小さいことの証明は次のようである；

531441 と 524288の差である7153に，73，74をそれぞれ乗じて，比較対照する。

7153×73＝522169，7153×74＝529322，531441－529322＝2119，524288－522169＝2119 である。

$$
\text{コンマ；差 }7153\left\{\begin{array}{ll}
5\ 2\ 2\ 1\ 6\ 9 & (7153\times 73) \\
\mathbf{5\ 2\ 4\ 2\ 8\ 8} & \\
5\ 2\ 9\ 3\ 2\ 2 & (7153\times 74) \\
\mathbf{5\ 3\ 1\ 4\ 4\ 1} &
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\}\ \text{差 } 2119 \\[2em]
\}\ \text{差 } 2119
\end{array}
$$

⇩

$$\frac{\mathbf{531441}-2119}{\mathbf{524288}-2119}=\frac{529322}{522169}=\frac{7153\times 74}{7153\times 73}=\frac{74}{73}$$

⇩

$$\frac{\mathbf{531441}-2119}{\mathbf{524288}-2119}=\frac{74}{73}$$

以上より，$\frac{531441}{524288}<\frac{74}{73}$となる。つまり，コンマの比率は，$\frac{74}{73}$より小さいことが証明された。

(1)，(2)より，「コンマの比率は，$\frac{75}{74}$より大きく$\frac{73}{74}$より小さい」ことが証明された。

〔3〕「小さい半音の比率は，$\frac{20}{19}$より大きく$\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$より小さい」ことの証明[32]；

小さい半音の比率は，$\frac{256}{243}$であることは前述した。

(1) まず，小さい半音の比率が$\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$より小さいことの証明は次のようである；

243と256の差である13（256－243＝13）に，$18\frac{1}{2}$，$19\frac{1}{2}$をそれぞれ乗じて比較対照する。

$13\times 18\frac{1}{2}=240\frac{1}{2}$，$13\times 19\frac{1}{2}=253\frac{1}{2}$，$256-253\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$，$243-240\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$である。

$$
\text{小さい半音；差 }13\left\{\begin{array}{ll}
240\frac{1}{2} & (13\times 18\frac{1}{2}) \\
\mathbf{2\ 4\ 3} & \\
253\frac{1}{2} & (13\times 19\frac{1}{2}) \\
\mathbf{2\ 5\ 6} &
\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}
\}\ \text{差 } 2\frac{1}{2} \\[2em]
\}\ \text{差 } 2\frac{1}{2}
\end{array}
$$

⇩

$$\frac{\mathbf{256}-2\frac{1}{2}}{\mathbf{243}-2\frac{1}{2}}=\frac{253\frac{1}{2}}{240\frac{1}{2}}=\frac{13\times 19\frac{1}{2}}{13\times 18\frac{1}{2}}=\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$$

⇩

$$\frac{\mathbf{256}-2\frac{1}{2}}{\mathbf{243}-2\frac{1}{2}}=\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$$

以上より，$\frac{256}{243}<\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$となる。

(2) 次に，小さい半音の比率が，$\frac{20}{19}$より大きいことの証明は次のようである；
243と256の差である13に，19，20をそれぞれ乗じて比較対照する。13×19＝247，13×20＝260，260－256＝4，247－243＝4である。

$$\text{小さい半音；差 }13\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\mathbf{2\ 4\ 3}\\ 2\ 4\ 7\quad(13\times 19)\end{array}\right\}\text{差 }4\\ \left.\begin{array}{l}\mathbf{2\ 5\ 6}\\ 2\ 6\ 0\quad(13\times 20)\end{array}\right\}\text{差 }4\end{array}\right.$$

⇩

$$\frac{\mathbf{256}+4}{\mathbf{243}+4}=\frac{260}{247}=\frac{13\times 20}{13\times 19}=\frac{20}{19}$$

⇩

$$\frac{\mathbf{256}+4}{\mathbf{243}+4}=\frac{20}{19}$$

以上より，$\frac{256}{243}>\frac{20}{19}$となる。

(1)，(2)より，「小さい半音の比率は，$\frac{20}{19}$より大きく$\frac{19\frac{1}{2}}{18\frac{1}{2}}$より小さい」ことが証明された。

〔4〕「小さい半音は，3つのコンマより大きく，4つのコンマより小さい」ことの証明[33]；
262144に対して，5全音，6全音，完全8度の比率を構成する数を求め，次のように整理する。

$$6\text{全音}\left\{\begin{array}{l}\text{完全8度}\left\{\begin{array}{l}5\text{全音}\left\{\begin{array}{l}2\ 6\ 2\ 1\ 4\ 4\\ 4\ 7\ 2\ 3\ 9\ 2\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\ \ 5\ 2\ 4\ 2\ 8\ 8\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 5\ 3\ 1\ 4\ 4\ 1\end{array}\right.\qquad \left.\begin{array}{l}524288\\531441\end{array}\right\}\text{コンマ（差 }7153\text{）}$$

次に，5全音を構成する472392から下へ2全音の比率を構成する数を導く（373248）。さらに，その373248から上へ完全4度の比率を構成する数を導く（497664）。この497664と472392間に小さい半音が生ずる。小さい半音の比率は243：256であるので，双方の数に1944を乗ずると，確かに243×1944＝472392，256×1944＝497664となる。さらに，497664から上へ完全4度の比率を構成する数を導く（663552）。さらに，その663552から下へ2全音の比率を構成する数を導く（524288）。497664と524288間に小さい半音が生じたことになる。以上をわかりやすく整理すると次のようになる。

$$6\text{全}\left\{\begin{array}{l}\text{完}4\left\{\begin{array}{l}5\ \ \text{全}\left\{\begin{array}{l}2\ 6\ 2\ 1\ 4\ 4\\ 3\ 7\ 3\ 2\ 4\ 8\\ 4\ 7\ 2\ 3\ 9\ 2\quad(243\times 1944)\end{array}\right.\\ \qquad\quad 4\ 9\ 7\ 6\ 6\ 4\quad(256\times 1944)\end{array}\right.\\ \qquad\ \ \textbf{コンマ}\left\{\begin{array}{l}\mathbf{5\ 2\ 4\ 2\ 8\ 8}\\ 5\ 3\ 1\ 4\ 4\ 1\end{array}\right.\\ \qquad\qquad\quad 6\ 6\ 3\ 5\ 5\ 2\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}373248\text{–}472392:\ 2\text{全}\\ 472392\text{–}497664:\ \text{小半}\end{array}\right\}\text{完}4\qquad \left.\begin{array}{l}497664\text{–}524288:\ \textbf{小半}\\ 524288\text{–}663552:\ 2\text{全}\end{array}\right\}\text{完}4$$

524288を介して，497664との間には小さい半音（差26624）が，531441との間にはコンマ（差7153）が生ずることがわかる。コンマの差（7153）に，それぞれ3，4を乗ずると，7153×3＝21459，7153×4＝28612が生ずる。以上を比較すると，21459（3コンマ）＜26624（小さい半音）＜28612（4コンマ）となる。つまり，「小さい半音は，3つのコンマより大きく，4つのコンマより小さい」ことが証明された。

〔5〕「大きい半音は，4つのコンマより大きく，5つのコンマより小さい」ことの証明[34]；

262144に対して，5全音，6全音，完全8度の比率を構成する数を求めると，472392（5全音），531441（6全音），524288（完全8度）であることは前述した。472392から上へ小さい半音の比率を構成する数を導く（497664）。この497664と531441の間に大きい半音が生ずる。524288と531441の間にはコンマが生ずることは前述した。以上を整理すると次のようになる。

6全 ｛ 完8 ｛ 5全 ｛ 2 6 2 1 4 4 ～ 4 7 2 3 9 2 ｝
1全 ｛ 4 7 2 3 9 2 ～ 5 3 1 4 4 1 ｝
4 7 2 3 9 2 ～ 4 9 7 6 6 4 ｝ 小 半
5 2 4 2 8 8 ～ **5 3 1 4 4 1** ｝ **コンマ**
4 9 7 6 6 4 ～ **5 3 1 4 4 1** ｝ **大半**

531441を介して，497664との間には大きい半音（差33777）が，524288との間にはコンマ（差7153）が生ずることがわかる。コンマの差（7153）に，それぞれ4，5を乗ずると，7153×4＝28612，7153×5＝35765が生ずる。以上を比較すると，28612（4コンマ）＜33777（大きい半音）＜35765（5コンマ）となる。つまり「大きい半音は，4つのコンマより大きく，5つのコンマより小さい」ことが証明された。

〔6〕「全音は，8つのコンマより大きく，9つのコンマより小さい」ことの証明[35]；

262144に対して，5全音，6全音，完全8度の比率を構成する数を求め，次のように整理する。

6全 ｛ 完8 ｛ 5全 ｛ 2 6 2 1 4 4 ～ 4 7 2 3 9 2 ｝
5 2 4 2 8 8 ～ **5 3 1 4 4 1** ｝ **コンマ**
4 7 2 3 9 2 ～ **5 3 1 4 4 1** ｝ **全音**

531441を介して，472392との間には全音（差59049）が，524288との間にはコンマ（差7153）が生ずることがわかる。コンマの差に，それぞれ8，9を乗ずると，7153×8＝56324，7153×9＝64377が生ずる。以上を比較すると，56324（8コンマ）＜59049（全音）＜64377（9コンマ）となる。つまり，「全音は，8つのコンマより大きく，9つのコンマより小さい」ことが証明された。

さて，上記の通り，当時の数理論を駆使したボエティウスの多様な数値的証明過程を，明らかにすることを試みてみたが，これらによって，音楽がいかに数学的学問であるかがよく理解される。さらに，中世において，音楽が数学的学科としての **quadrivium**（四学科：数学・音楽・天文学・幾何学）の重要な一学科として位置づけられた理由も，十分うなずけるのである。

結　び

本論において，上記のように，ボエティウスの音程の呼称法，構成，各種音程の算出方法，数値的証明方法が明らかにされたが，このボエティウスの「音楽論」の特色は，単にそれらの理論のみを羅列するのでなく，反例による証明等によって，多様な角度から論を展開させていることである。とくに，中世の数理論においては，近代の正の整数と分数にあたる数しか存在しなかったために，各種音程の算出方法や，音程の比率間の大小の見極め方等の証明方法には，中世独特のものがみられる。しかも，先きの論文で明らかにした multiplex から superparticularis を導く方法，あるいは，近似値数間の比率の大小の決定方法等[36]が，実際に音程の算出方法やその証明に，的確に生かされており，中世の音楽研究に，数理論研究がいかに不可分であったかがわかる。それはまた，中世において，音楽が数学的学科としての四学科の中で，いかに重要な位置を占めていたかを示すものでもある。

わが国においては，歌唱や器楽を主体とした実技面に重点を置いた音楽教育が，その主流を占めており，いかに音が生ずるのかといった音響学的教育が欠けているのが現状である。従って，先きにも述べたが，ピアノはうまく弾けるが，ピアノの構造，音律等に関する詳しい知識を持っている者が少ないという現象を生み出している。その結果，音楽教授法も，実技を主体とした画一的なものからいつまでも脱しきれないという悪循環をたどっているようである。〝創造的な音楽教育を〟と叫ばれて久しくたつが，目先きの教材，教授法を変えるだけでは，今日の音楽教育の低迷からは脱しきれない。主要教科と呼ばれる学科と対等な関係を保ちうる教科として音楽を位置づけるためにも，「芸術」としての音楽だけではなく，「学問」としての音楽の一面をとらえなおす必要があろう。

それには，中世において自由七学科[37]の一学科として確固たる「学問」として位置づけられていた音楽が，どのように研究，教授されていたかを明らかにすることは是非とも必要である。従って，中世の音楽研究の教科書的存在であったボエティウスの「音楽論」[38]を逐一明らかにしていくことにより，今日の音楽教育に欠けている「学問」としての音楽のあり方を，一層明確化できるものと思われる。

今回は，ボエティウスの「音楽論」の中の数値を主体とする「音楽論」，及び古代・中世の音程に関する研究に焦点をあわせ，加えて今日の音楽研究との相違点を明らかにしたが，今後のわが国の音楽教育には，現行の音程の名称のみならず，音律論等の教授が必須であると思われる。

今後ひきつづいて，ボエティウスの「音楽論」の内容を各領域毎[39]に詳細に明らかにすることによって，今日の音楽研究及び音楽教育に欠けている内容を一層明確化していきたい。

注

1）拙稿：アニキウス・マンリウス・セベリウス・ボエティウス（480ころ－524）とその「音楽論」（そのⅦ）—数理論の内容を中心として—，宮崎大学教育学部紀要第58号，1985，17—39ページ。

2）Godofredus Friedlein : Anicii M. T. S. Boetii de institutione musica, Frankfurt, 1966の第1巻第5（pp. 192–193），7（p. 194），16（pp. 201–202），33章（pp. 222–223），第2巻第16（pp. 247–248），26章（p. 258）に述べられている。このように，ボエティウスは，各項を系統的に記述していないので，全巻全章を内容別に整理する必要がある。本論であつかう内容は，拙稿：前掲書（その1），大分県立芸術短期大学紀要第18巻，1980，24ページで整理した，協和音程の構成と比率と，全音，半音，アポトメ，コンマなどの比率の項目である。

3）中世・ルネサンスの音程の呼称法については，以上の基本的呼称法の他に，完全5度を sesquialtera，完全4度を sesquitertia 等と呼ぶ特別な方法もあったとされている。ヨハンネス・ティンクトーリス，中世ルネサンス音楽史研究会訳：音楽用語定義集，シンフォニア，昭和54年，97～98ページ参照。

4）G. Friedlein：op-cit，第1巻第7（p. 194），33章（pp. 222-223），第2巻第26章（p. 258）。

5）拙稿：前掲書（そのⅦ），20-21ページ参照。multiplex の比率は，例えば，1：2（$^2/_1$），1：3（$^3/_1$），2：4（$^2/_1$）のように，きっちりと整数倍になるものをいう。superparticularis の比率は，例えば，2：3（$^3/_2$），3：4（$^4/_3$），4：5（$^5/_4$）のように，分母がたえず分子より1多いものをいう。

6）古代・中世においては，協和音程は，完全8，5，4度であったので，今日のように長・短3，6度に関しては，さほど重要視されていなかったために，記述されていないのかもしれない。しかし，それらの音程は，おそらく基本音程を結合する形で表示されていたと思われる。その証拠に，第2巻第22章（p. 254）には短3度のことが tonus ac semitonium という形で記述されている。従って，例えば，長6度は，diapente ac tonus ということになる。中世・ルネサンスの音程の呼称法については，ティンクトーリス：上掲書，98ページを参照。

7）G. Friedlein：op-cit，第2巻第22章（p. 254）。

8）この反例による証明のみ，次の(2)，(3)の証明方法と異なっており，ボエティウスの意図するところは不明である。従って，ボエティウスの「音楽論」をドイツ語訳したパウル（Oscar Paul）の Die A. M. S. Boethius fünf Bücher über die Musik，Leipzig，1872，S. 62 にも，ボエティウスの記したラテン語の本文以外の注釈が付加されているが，それもボエティウスの本文の完全な理解に十分に役立っていないように思う。従って，この証明のみ，わかりやすく大意を示した。

9）（ ）内の計算方法は，本論では近代の計算方法で示した。ボエティウスの計算方法は本論でも後述するが，比率の共通項をみい出して，それから割り出す方法をとっている。例えば，この場合にも，完全5度の仮説の比率（3：5）と完全4度の仮説の比率（4：5）を結合すると次のようになる。

$$\overbrace{4 : 5}^{\text{完全4度}}$$

$$\underbrace{3 \quad : \quad 4}_{\text{完全5度}}$$

⇩

$$\underbrace{\overbrace{12 : 15}^{\text{完全4度}} : 16}_{\text{完全5度}}$$

⇩

$$\overbrace{12 : 15}^{\text{完全4度}}$$

$$\underbrace{12 : 16}_{\text{完全5度}}$$

⇩

$$\underbrace{\overbrace{48 : 60}^{\text{完全4度}}\overbrace{\; : 80}^{\text{完全5度}}}_{\text{完全8度}}$$

以上より，完全8度の比率は3：5（48：80＝3：5），つまり$^5/_3$となる。以下，比率計算の（ ）の中は，煩雑さを省くために，近代の計算方法で示したものである。

10）G. Friedlein：op-cit，第２巻第23章（pp. 255-257）。
11）G. Friedlein：ibid，第２巻第24章（p. 257）。
12）G. Friedlein：ibid，第２巻第25章（p. 258）。
13）協和音程を確立する比率に関しての見解については，拙稿：前掲書（そのⅦ），23-24ページ参照。
14）G. Friedlein：op-cit，第２巻第27章（pp. 259-260），第５巻第７章（pp. 357-358）。
15）G. Friedlein：ibid，第５巻第８，９，10，11，12章（pp. 358-363）。
16）拙稿：前掲書（そのⅥ）一協和の本質に関する教育の内容を中心として一宮崎大学教育学部紀要第57号，1985参照。
17）G. Friedlein：op-cit，第１巻第17，18，(19pp. 203-205)，33章(pp. 222-223)，第２巻第31章(pp. 264-267)，第３巻第３章（pp. 273-275）。
18）G. Friedlein：op-cit，第３巻第９，10章（pp. 279-285）。
19）ヨハンネス・ティンクトーリス：上掲書，100ページを参考にした。しかし，ここでは実際の音程の間隔を理解するために，なるべく各音程の比率関係をそこなわないように図示してある。
20）G. Friedlein：op-cit，第２巻第28章（pp. 260－261）。この他，小さい半音については，第１巻第17，第２巻第29章でも述べられている。
21）当時の superparticularis の比率に対する見解をよく理解するには，ヨハンネス・ティンクトーリス：上掲書，105ページを参照。
22）G. Friedlein：op-cit. 第２巻第30章（pp. 263-264）。
23）G. Friedlein：ibid，第２巻第31章（pp. 264-267）。
24）O. Paul：op-cit，S. 73 においても，同様な注釈が付加されている。ボエティウス自身はこの表は全く示していない。
25）G. Friedlein：op-cit，第３巻第５章（pp. 276-277）。
26）G. Friedlein:ibid，第３巻第８章（pp. 278-279）。これらの微小音程の定義に関しては，時代や理論家によってかなりの違いがみられる。他の理論家の微小音程については，ティンクトーリス：前掲書，101-102ページ参照。
27），28）G. Friedlein：ibid，第３巻第１章（pp. 268-272）。
29）G. Friedlein：ibid，第３巻第２章（pp. 272-273）。
30）G. Friedlein：ibid，第３巻第３章（pp. 273-275）。
31）G. Friedlein：ibid，第３巻第12章（pp. 286-291）。この他，コンマに関する章は，第３巻第４章（pp. 275-276）にも設けられており，５全音と２つの完全４度の差，及び６全音と完全８度の差が，双方ともコンマ分の隔りであることが証明されているが，重複するところもあるので，本論では省略した。
32）G. Friedlein：ibid，第３巻第13章（pp. 291-293）。
33）G. Friedlein：ibid，第３巻第14章（pp. 293-295）。
34）G. Friedlein：ibid，第３巻第15章（pp. 295-297）。
35）G. Friedlein：ibid，第３巻第15，16章（pp. 295-300）。
36）拙稿：前掲書（そのⅦ），26，28-29ページ参照。
37），38），39）自由七学科の成立，ボエティウスの「音楽論」の位置づけ，「音楽論」の内容毎の整理については，拙稿：前掲書（そのⅠ）の14，19，23-24ページを参照。

（1985年９月25日　受理）