初等数学 第20号
1990.9

$a^2+b^2=t(ab+n)$ の正整数解

宇　田　廣　文

1988年度の国際数学オリンピックの問題に次のような問題が出されていたことをご記憶の方もあると思います。（[1]，[2]）

> a，b は，a^2+b^2 が $ab+1$ で割り切れるような正整数とする。このとき，
>
> $$\frac{a^2+b^2}{ab+1} \text{ は完全平方数}$$
>
> であることを示せ。

この問題について，証明はどうするのだろうということはもちろんですが，解はどうなっているのだろうということに興味を持ち，パソコンを利用して数値実験をしたところ，おのずと解の形（一般解）とその証明法が見えてきた。そこで，問題を少し拡張して次の問題を考えてみることにする。

> **問題**　n を任意の自然数としたとき，
>
> $$a^2+b^2=t(ab+n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (☆)$$
>
> の正整数解 a，b，t を決定せよ。

(☆)は，a，b に関して対称であるので，$a \leqq b$ という条件のもとに考察すれば十分である。

> **補題1**　$a=b$ を満たす(☆)の解は $n=m^2$（m：正整数）のときで
>
> $$a=b=m,\ t=1$$
>
> である。

（証明）今，$2a^2=t(a^2+n)$ ………①

であると仮定する。$n \geqq 1$ だから①から

$$a^2 < a^2+n \leqq 2a^2 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

よって，

$$t=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

従ってまた，①から

$$n=a^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

（証明終わり）

補題2　a，b，t を（☆）の正整数解とする。このとき，

(1)　$ta-b$，a，t および b，$tb-a$，t は（☆）の整数解である。

(2)　$a<b$，$t>1$　　$\Rightarrow$　$b<tb-a$

(3)　$a<b$，$ta-b\geqq 0$　$\Rightarrow$　$0\leqq ta-b<a$

（証明）a，b，t を（☆）の正整数解とする。

(1)　$$(ta-b)^2+a^2=t^2a^2-2tab+a^2+b^2$$
$$=t^2a^2-2tab+t(ab+n)$$
$$=t((ta-b)a+n)$$

よって，$ta-b$，a，t は（☆）の整数解である。他方も同様。

(2)　明らか。

(3)　$a<b$，$ta-b\geqq 0$ とする。a，b，t は（☆）の正整数解であるから

$$a^2-tn=b(ta-b)　\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

t，n は正整数であるから①から

$$a^2>b(ta-b)　\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$a<b$，$ta-b\geqq 0$ だから②から

$$ta-b<a$$

（証明終わり）

この補題2から分かることは，$a<b$，$t>1$ を満たす（☆）の正整数解が一組見つかれば，それをもとにして前と後ろに（☆）の正整数解を作っていくことができるということである。即ち，

定理3　$a<b$，$ta-b\leqq 0$ を満たす（☆）の正整数解の組（a，b，t）を（☆）の基本解と呼ぶ。このとき，

(1)　基本解は決定可能である。

(2)　$a<b$，$t>1$ を満たす（☆）の任意の解は，ある基本解（a，b，t）（$t>1$）から作られる次の数列における（a_k，a_{k+1}，t）（$k\geqq 1$）の中にある。

$$a_1=a,\quad a_2=b$$
$$a_k=ta_{k-1}-a_{k-2}\quad (k\geqq 3)$$

注意1：$t=1$ である（☆）の正整数解の組（a，b，1）は基本解である。

（証明）(1)　（a，b，t）を（☆）の基本解とする。

(i)　$ta-b=0$ のとき

$b=ta$ を（☆）に代入すると

$$a^2+(ta)^2=t(ta^2+n)$$

$$\therefore \quad a^2=tn \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

そこで，$n=sm^2$ とおく。ここで，s は1または相異なる素数の積である。このとき，

$$a^2=tsm^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

素因数分解の一意性から

$$t=su^2\ ,\ a=smu \quad (u：正整数) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

と書ける。

即ち，$n=sm^2$ のとき，u を任意の正整数として（☆）の基本解は

$$(a,\ b,\ t)=(smu,\ s^2mu^3,\ su^2) \quad \cdots\cdots\cdots ④$$

ただし，$s=1$ のときは $a<b$ だから $u>1$ としてとる。

(ii) $ta-b<0$ のとき

補題2 (1)より

$$(ta-b)^2+a^2=t((ta-b)a+n) \quad \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤の左辺は正だから

$$n>a(b-ta)>0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥を満たす正整数 a，$b-ta$ の組は有限で決定できる。それらの中で，⑤を満たすような整数 t を見つければよい。

従って，基本解（a，b，t）を決定できる。

(2) 補題2 (1), (2)より任意の自然数 k について（a_k，a_{k+1}，t）が（☆）の正整数解であることが分かる。

一方，$a<b$，$t>1$ を満たす任意の解を（a，b，t）とする。このとき，$ta-b>0$ なら補題2 (1), (3)より（$ta-b$，a，t）も（☆）の正整数解で $ta-b<a$ を満たす。この操作を第一成分が正である間繰り返すと

$$(a,\ b,\ t),\ (x_1,\ a,\ t),\ (x_2,\ x_1,\ t),\ \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

とできる。ここで，

$$x_1=ta-b,\ x_2=tx_1-a,\ \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$a>x_1>x_2>\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

となっている。

また，この操作において，第一成分が正であるのは⑨から有限回で終わり，ある番号 j について $tx_j-x_{j-1}\leqq 0$ となる。

従って，ある基本解に到達する。それから逆にたどると定理3 (2)の形の数列の中で解（a，b，t）に到達することが分かる。（証明終わり）

注意２：定理３の証明から $t=1$ となる基本解は高々有限個しかないことが分かる。

系４　（数学オリンピックの問題） a，b は，a^2+b^2 が $ab+1$ で割り切れるような正整数とする。このとき， $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ は完全平方数 であることを示せ。

（証明）定理３で $n=1$ とおく。

このとき，定理３の証明中の⑥より，$ta-b<0$ となる基本解は存在しないことが分かる。

従ってまた，定理３の証明中の④より，$a<b$ となる基本解は

$$(a,\ b,\ t)=(u,\ u^3,\ u^2)\quad(u>1)$$

である。よって，定理３(2)より，$a<b$ を満たす（☆）の解において $t=u^2$ だから，この場合系４は成り立つ。

一方，補題１より $a=b$ を満たす（☆）の解は

$$a=b=t=1$$

のみである。

以上より，系４は成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

例１．$n=1$ のときの（☆）の正整数解の例

基本解　$(a,\ b,\ t)=(2,\ 8,\ 4)$

a	b	t
2	8	4
8	30	4
30	112	4
112	418	4
418	1560	4
1560	5822	4
5822	21728	4

基本解　$(a,\ b,\ t)=(4,\ 64,\ 16)$

a	b	t
4	64	16
64	1020	16
1020	16256	16
16256	259076	16
259076	4128960	16
4128960	65804284	16
65804284	1048739584	16

基本解　$(a,\ b,\ t)=(3,\ 27,\ 9)$

a	b	t
3	27	9
27	240	9
240	2133	9
2133	18957	9
18957	168480	9
168480	1497363	9
1497363	13307787	9

基本解　$(a,\ b,\ t)=(5,\ 125,\ 25)$

a	b	t
5	125	25
125	3120	25
3120	77875	25
77875	1943755	25
1943755	48516000	25
48516000	1210956245	25

例2．$n=2$ のときの基本解

(1)　$ta-b=0$ を満たす基本解

定理3の証明中において $n=2$ だから $s=2$, $m=1$ となる。

よって，定理3の証明中④より

$$(a,\ b,\ t)=(2u,\ 4u^3,\ 2u^2)\quad (u：正整数)$$

は(☆)の基本解である。

(2)　$ta-b<0$ を満たす基本解

定理3の証明中⑥より

$$2>a(b-ta)>0$$

$a>0$, $b-ta>0$ だから

$$a=b-ta=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

よって，補題2(1)より，

$$1+1=t(-1+2)$$

$$\therefore\quad t=2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

①，②より $(a,\ b,\ t)=(1,\ 3,\ 2)$ は(☆)の基本解である。

$n=2$ のときの(☆)の正整数解の例

基本解 $(a,\ b,\ t)=(2,\ 4,\ 2)$

a	b	t
2	4	2
4	6	2
6	8	2
8	10	2
10	12	2
12	14	2
14	16	2

基本解 $(a,\ b,\ t)=(4,\ 32,\ 8)$

a	b	t
4	32	8
32	252	8
252	1984	8
1984	15620	8
15620	122976	8
122976	968188	8
968188	7622528	8

基本解 $(a,\ b,\ t)=(1,\ 3,\ 2)$

a	b	t
1	3	2
3	5	2
5	7	2
7	9	2
9	11	2
11	13	2
13	15	2

基本解 $(a,\ b,\ t)=(6,\ 54,\ 18)$

a	b	t
6	54	18
54	966	18
966	17334	18
17334	311046	18
311046	5981484	18
5981484	100155666	18
100155666	1796820504	18

例3．$n=3$ のときの基本解

(1)　$ta-b=0$ を満たす基本解

定理3の証明中において $n=3$ だから $s=3$, $m=1$ となる。

よって，定理3の証明中④より

$$(a,\ b,\ t)=(3u,\ 9u^3,\ 3u^2)\quad (u：正整数)$$

は(☆)の基本解である。

(2)　$ta-b<0$ を満たす基本解

定理3の証明中⑥より　$3>a(b-ta)>0$

$a>0$, $b-ta>0$ だから

$$(a,\ b-ta)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

(I)　$(a,\ b-ta)=(1,\ 1)$ のとき

補題2(1)より，$1+1=t(-1+3)$　　$\therefore\ t=1$

よって，$(a,\ b,\ t)=(1,\ 2,\ 1)$ は(☆)の基本解である。

(II)　$(a,\ b-ta)=(1,\ 2)$ のとき

補題2(1)より，$4+1=t(-2+3)$　　$\therefore\ t=5$

よって，$(a,\ b,\ t)=(1,\ 7,\ 5)$ は(☆)の基本解である。

(III)　$(a,\ b-ta)=(2,\ 1)$ のとき

補題2(1)より，$1+4=t(-2+3)$　　$\therefore\ t=5$

よって，$(a,\ b,\ t)=(2,\ 11,\ 5)$ は(☆)の基本解である。

$n=2$ のときの(☆)の正整数解の例

基本解　$(a,\ b,\ t)=(3,\ 9,\ 3)$

(　3,　9, 3)
(　9,　24, 3)
(　24,　63, 3)
(　63,　165, 3)
(　165,　432, 3)
(　432, 1131, 3)
(1131, 2961, 3)

基本解　$(a,\ b,\ t)=(2,\ 11,\ 5)$

(　2,　11, 5)
(　11,　53, 5)
(　53,　254, 5)
(　254,　1217, 5)
(　1217,　5831, 5)
(　5831,　27938, 5)
(27938, 133859, 5)

基本解　$(a,\ b,\ t)=(1,\ 7,\ 5)$

(　1,　7, 5)
(　7,　34, 5)
(　34,　163, 5)
(　163,　781, 5)
(　781,　3742, 5)
(　3742, 17929, 5)
(17929, 85903, 5)

基本解　$(a,\ b,\ t)=(6,\ 72,\ 12)$

(　6,　72, 12)
(　72,　858, 12)
(　858,　10224, 12)
(　10224,　121830, 12)
(　121830,　1451736, 12)
(　1451736,　17299002, 12)
(17299002, 206136288, 12)

例4．$ta-b<0$ を満たす基本解の例

n	基本解 (a, b, t)
2	(1, 3, 2)
3	(1, 2, 1), (1, 7, 5)(2, 11, 5)
4	(1, 13, 10), (3, 31, 10)
5	(1, 8, 5), (1, 21, 17), (2, 18, 8), (3, 16, 5), (4, 69, 17)
6	(1, 31, 26), (2, 10, 4), (5, 131, 26)
7	(1, 3, 1), (1, 18, 13), (1, 43, 37), (2, 3, 1), (2, 29, 13) (3, 41, 13), (5, 66, 13), (6, 223, 37)
8	(1, 5, 2), (1, 57, 50), (2, 6, 2), (3, 7, 2), (7, 351, 50)
9	(1, 32, 25), (1, 73, 65), (2, 44, 20), (4, 82, 20), (7, 176, 25) (8, 521, 65)
10	(1, 91, 82), (2, 24, 10), (3, 57, 18), (4, 42, 10), (9, 739, 82)
11	(1, 50, 41), (1, 111, 101), (2, 63, 29), (3, 30, 9), (5, 147, 29), (9, 370, 41), (10, 1011, 101)
12	(1, 17, 10), (1, 133, 122), (2, 4, 1), (2, 14, 5), (3, 21, 6), (4, 22, 5), (7, 71, 10), (11, 1343, 122)
13	(1, 4, 1), (1, 21, 13), (1, 72, 61), (1, 157, 145), (2, 12, 4), (2, 86, 40), (3, 4, 1), (3, 79, 25), (4, 18, 4), (4, 103, 25), (6, 242, 40), (8, 105, 13), (11, 672, 61), (12, 1741, 145)

$t=1$ のときは，定理3(2)におけるような増大する数列は作れない。いわば，そのときの基本解は孤立した解であるということができる。そこで，別な興味がでてくる。

即ち，次の問題(＊)が考えられる。

問題(＊)　次はどんな自然数 n に対して正整数解 (a, b) をもつだろうか。

$$a^2+b^2=ab+n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (\bigstar)$$

今までのことから，次は分かる。

(1)　n が平方数なら，(★)は正整数解をもつ。(補題1)

(2)　n が3，7，13のときは，(★)は正整数解をもつ。(例4)

この問題は，整数論における二元二次不定方程式に関する問題であり，いくつかの準備等を必要とするので今回はこれ以上触れませんが，機会があればまた紹介させて頂きます。

〔1〕 New letter，『日本数学教育学会誌　数学教育 44－4』，日本数学教育学会　1990．
〔2〕 1988年度国際数学オリンピックの問題，『数学セミナー』，日本評論社，
1988年11月号，pp.65

（宮崎大教授）