宮崎大学教育文化学部紀要　教育科学　第16号（2007）91－121頁

「和と平方和」に関する帰納的考察

宇　田　廣　文

An Inductive Study of Sum and Square Sum

Hirohumi UDA

0.　はじめに

人間は，古代より歴史を経て整数，中でも自然数に慣れ親しみ，数多くの興味ある話題を提供してきた。素数に関する話題，図形数に関する話題，不定方程式に関する話題など例示には事欠かない。まさに，自然数は知的宝の泉であり，児童・生徒の興味・関心を引き出すとても魅力ある素材を提供してくれる。

例えば，次の課題を考えてみよう。

1から7までの自然数を2組に分けて，和も平方和も等しくなるようにしよう。

ここで，平方和とは 2^2+3^2，$3^2+7^2+8^2$ などのようないくつかの平方数の和のことである。

この解は，次のような手順を辿って求められることになる。

まず，1から7までの自然数の和は28であるから，それぞれの和は14になる。また，1から7までの自然数の平方和は140であるから，それぞれの和は70になる。そこで，以下の二通りの解決方法がでてくる。

(1)　和が14になる組合せを考えて，平方和が70になるか調べる。
(2)　平方和が70になる組合せを考えて，和が14になるか調べる。

このように，この課題は計算と場合分けの考えなど，多くの内容を含んでいる。本論文では，この課題のように和と平方和がそれぞれ等しくなる課題に着目し，その解とパターンを帰納的・構成的に求めることを第一目的とする。また，教授学的観点から，等式の有用性や式の見方・式のよさや面白さなど示していくことを第二の目的とする。そこでは，オイラーの表示やオイラーの恒等式，対称式さらには4を単位とした余りの考えなどが大いに活躍する。さらに，その発展としてべき和に関する美しく不思議な（？）公式を提示する。

1. 準　　備

1.1　$(m\,,\,)$ 型の導入

和と平方和に関する課題を解決していくことは，次の不定方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

を満たす自然数 $x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_m\,;\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_n$ を求めることになる。

以後，この不定方程式を $(m\,,\,n)$ 型と呼ぶことにする。

ところで，$4+5=1+2+6$, $4^2+5^2=1^2+2^2+6^2$ であるから

$$4+5+7=1+2+6+7 \qquad 4^2+5^2+7^2=1^2+2^2+6^2+7^2$$
$$4+5+7+8=1+2+6+7+8 \qquad 4^2+5^2+7^2+8^2=1^2+2^2+6^2+7^2+8^2$$

のように項数を容易に増やしていくことができるが，余り面白い解 (パターン) とはいえない。そこで，本稿では，$\{\,x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_m\,\}$ と $\{\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_n\,\}$ には共通な自然数がない場合を考察の対象とする。また，$x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_m\,,\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_n$ の最大公約数は 1 としておく。

ここでは，そのような解 (パターン) を 非自明な解 (パターン) と呼ぶことにする。

1.2　$(m\,,\,m)$ 型と $(m\,,\,m+1)$ 型の解とパターンの関係

ここでは，$(m\,,\,m)$ 型と $(m\,,\,m+1)$ 型の解とパターンの間にある関係について考察していく。

(1)　(m,m) 型の非自明な解 $\Longrightarrow$ (m,m) 型の非自明なパターン
$\Longrightarrow$ (m,m) 型の非自明な解

さて，(m,m) 型の非自明な解 $x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_m\,;\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_m$ が求められたとしよう。

すると，容易に次の等式が得られる。

$$(z+x_1)+(z+x_2)+\cdots+(z+x_m)=(z+y_1)+(z+y_2)+\cdots+(z+y_m)$$
$$(z+x_1)^2+(z+x_2)^2+\cdots+(z+x_m)^2=(z+y_1)^2+(z+y_2)^2+\cdots+(z+y_m)^2$$

即ち，(m,m) 型の非自明なパターンを見つけることができる。

従って特に，1 を含む (m,m) 型の非自明な解を作ることもできる。そして，1 を含む非自明な解を見つけるとパターン化が容易にできることを分かる。

さらに，$x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_m\,;\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_m$ のうち最小の自然数を x_1 とすると。$z=-x_1$ とすることで，$(m-1\,,\,m)$ 型の非自明な解を見つけることもできる。

(2)　$(m-1,m)$ 型の非自明な解 $\Longrightarrow$ $(m\,,m)$ 型の非自明なパターン

逆に，$(m-1,m)$ 型の非自明な解を $x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_{m-1}\,;\,y_1\,,\,y_2\,,\,\cdots\,,\,y_m$ とすると

$$z+(z+x_1)+\cdots+(z+x_{m-1})=(z+y_1)+(z+y_2)+\cdots+(z+y_m)$$
$$z^2+(z+x_1)^2+\cdots+(z+x_{m-1})^2=(z+y_1)^2+(z+y_2)^2+\cdots+(z+y_m)^2$$

であるから，(m,m) 型の非自明なパターンを見つけることができる。

一方，$(1\,,1)$ 型，$(1\,,2)$ 型，$(2\,,2)$ 型の非自明な解がないことは容易に分かる。そこで，$m>2$ のとき，$(m\,,\,m)$ 型の非自明な解から，$(m-1\,,\,m)$ 型の非自明なパターンを見つけることを目指す。

(3)　(m,m) 型の非自明な解 $\Longrightarrow$ $(m-1,m)$ 型の非自明なパターン

(m,m) 型 ($m>2$) の非自明な解があれば，(1) より $(m-1,m)$ 型の非自明な解

$$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}\ ;\ y_1, y_2, \cdots, y_m$$

を作ることができる。そこで，不定方程式

$$x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_{m-1}z_{m-1}=y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_{m-1}z_{m-1}$$

の整数解 $z_1, z_2, \cdots, z_{m-1}$ (すべては0でない) を一組取る。(非自明より，取ることができる。)

このとき

$$(x_1w+z_1)+\cdots+(x_{m-1}w+z_{m-1})=(y_1w+z_1)+\cdots+(y_{m-1}w+z_{m-1})+y_mw$$
$$(x_1w+z_1)^2+\cdots+(x_{m-1}w+z_{m-1})^2=(y_1w+z_1)^2+\cdots+(y_{m-1}w+z_{m-1})^2+(y_mw)^2$$

となる。

ここで，$x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}\ ;\ y_1, y_2, \cdots, y_m$ が非自明な解であるので，各 i ($1\leqq i\leqq m-1$) に対して，直線 $y=x_ix+z_i$ と直線 $y=y_1x+z_1, \cdots, y=y_{m-1}x+z_{m-1}, y=y_mx$ の交点は m 個である。

従って，十分大きな自然数 k を取ると，$w\geqq k$ について，

$$x_1w_1+z_1, x_2w_2+z_2, \cdots, x_{m-1}w_{m-1}+z_{m-1}\ ;$$
$$y_1w_1+z_1, y_2w_2+z_2, \cdots, y_{m-1}w_{m-1}+z_{m-1}, y_mw$$

が $(m-1,m)$ 型の非自明なパターンであることが分かる。

これまで述べてきたことを資料1に具体例とともに示しておく。

以上の準備のもと，具体的に考察していくことにする。なお，必要でない限り，平方和の等式のみ示し，和についての等式は省略することとする。

2. (m,m) 型と $(m,m+1)$ 型

2.1　$(2,3)$ 型と $(3,3)$ 型

(1)　オイラーの等式からの構成

1から7までの自然数も用いて，和と平方和を考えていくと，次の $(3,3)$ 型の解が見つかる。

$$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$$

この式を左辺と右辺に着目してみると，次のように○と□で特徴づけられる。

$$①\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ 4\ ⑤\ ⑥\ \boxed{7}$$

そこで，2から8までの自然数に対して，同じように○と□を適用してみると

$$②\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ 5\ ⑥\ ⑦\ \boxed{8}$$

となる。一方，和と平方和に関する等式

$$2^2+6^2+7^2=3^2+4^2+8^2$$

が成り立つ。従って，下のように図的パターン化ができる。

$$⊙\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \cdot\ ⊙\ ⊙\ \boxed{\cdot}$$

このことは，$(3, 3)$ 型のパターンの1つとして

$$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+6)^2 \tag{33-1}$$

を得ることができることを示している。式の見方のよさを示す1つの例であろう。

一方，ゴールドバッハは1750年3月24日に次の恒等式を与えた。[1]

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2 \tag{e-1}$$

さらに，オイラーが1750年6月9日にこれを

$$a+b+c=3m \text{のとき} \qquad a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2 \tag{e-2}$$

と表示した。[2] これは，和と平方和が等しい $(3, 3)$ 型の解になっている。

このオイラーの表示 $(e-2)$ において，

$$a=n \ , \qquad b=n+4 \ , \qquad c=n+5 \quad (a+b+c=3(n+3))$$

とおくと，非自明な $(3, 3)$ 型のパターン $(33-1)$ が得られる。

また，オイラーの表示 $(e-2)$ において，$c=2m$, $a=n$ とおくことにより，和と平方和が等しい $(2,3)$ 型の解を示す恒等式

$$(2m-n)^2+(m+n)^2=n^2+(m-n)^2+(2m)^2 \tag{e-3}$$

を導くことができる。さらに，これから $(2,3)$ 型の非自明なパターンとして

$$(3n+1)^2+(3n+2)^2=n^2+(n+1)^2+(4n+2)^2 \tag{23-1}$$

$$(3n+2)^2+(3n+4)^2=n^2+(n+2)^2+(4n+4)^2 \tag{23-2}$$

などを作ることができる。

一方，オイラーの表示 $(e-2)$ に従うと，$(2,3)$ 型, $(3,3)$ 型ともに和が3の倍数の場合にしか構成できない。

そこで，その他の場合をいくつか求めてみる。

(2) 和が $3m+1$ 型になる場合

Mathmaticaなどを用いて数値実験をしていくと，次のような $(3, 3)$ 型の非自明な解のパターンを見いだすことができる。多くの事例に触れれば触れるほどパターンを見いだす可能性は高くなる。

$$1^2+6^2+9^2=3^2+3^2+10^2 \qquad 2^2+7^2+10^2=4^2+4^2+11^2 \qquad 3^2+8^2+11^2=5^2+5^2+12^2$$

$$1^2+10^2+11^2=2^2+7^2+13^2 \qquad 2^2+11^2+12^2=3^2+8^2+14^2 \qquad 3^2+12^2+13^2=4^2+9^2+15^2$$

$$1^2+10^2+14^2=4^2+5^2+16^2 \qquad 2^2+11^2+15^2=5^2+6^2+17^2 \qquad 3^2+12^2+16^2=6^2+7^2+18^2$$

これらから，次の $(3, 3)$ 型の非自明なパターンを求めることができる。

$$n^2+(n+5)^2+(n+8)^2=(n+2)^2+(n+2)^2+(n+9)^2 \tag{33-2}$$

$$n^2+(n+9)^2+(n+10)^2=(n+1)^2+(n+6)^2+(n+12)^2 \tag{33-3}$$

$$n^2+(n+9)^2+(n+13)^2=(n+3)^2+(n+4)^2+(n+15)^2 \tag{33-4}$$

一方，$(33-3)$ から $(2, 3)$ 型の非自明な解として $9, 10\ ;\ 1, 6, 12$ が得られる。

そこで，不定方程式 $9x+10y=6x+12y$ の非自明な1つの解 $x=2$, $y=3$ を取ると，1.2 (3) で考察したことより，$(2, 3)$ 型の非自明なパターン

$$(9n+2)^2+(10n+3)^2=n^2+(6n+2)^2+(12n+3)^2 \tag{23-3}$$

を作ることができる。これは，9，10；1，6，12を含まないパターンであるが，非自明な1つの解から，それを含む非自明なパターンを構成することもできる。(資料2参照)

(3)　和が$3m+2$型になる場合

この場合も同様な数値実験を通して，次のような(3，3)型の非自明な解のパターンを見いだすことができる。

$$\begin{array}{ccc}
1^2+8^2+8^2=2^2+5^2+10^2 & 2^2+9^2+9^2=3^2+6^2+11^2 & 3^2+10^2+10^2=4^2+7^2+12^2 \\
1^2+7^2+12^2=3^2+4^2+13^2 & 2^2+8^2+13^2=4^2+5^2+14^2 & 3^2+9^2+14^2=5^2+6^2+15^2 \\
1^2+12^2+13^2=3^2+7^2+16^2 & 2^2+13^2+14^2=4^2+8^2+17^2 & 3^2+14^2+15^2=5^2+9^2+18^2
\end{array}$$

従って，次の(3，3)型の非自明なパターンを求めることができる。

$$n^2+(n+7)^2+(n+7)^2=(n+1)^2+(n+4)^2+(n+9)^2 \tag{33-5}$$

$$n^2+(n+6)^2+(n+11)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+12)^2 \tag{33-6}$$

$$n^2+(n+11)^2+(n+12)^2=(n+2)^2+(n+6)^2+(n+15)^2 \tag{33-7}$$

(4)　L. Aubryのパターン

L. Aubryは1911年に次の恒等式を与えた。3)

$a+b\equiv 0 \pmod 3$のとき

$$a^2+b^2=\left(\frac{2a-b}{3}\right)^2+\left(\frac{2a+2b}{3}\right)^2+\left(\frac{2b-a}{3}\right)^2 \tag{e-4}$$

$(e-4)$において，$a=m+n$，$b=2m-n$とおくと，$(e-3)$が得られる。また，逆に$(e-3)$から$(e-4)$も得られる。これは，左辺と右辺のどちらに焦点を置くかという式の見方の問題でもある。

なお，L. Aubryは異なる3つの平方数の和として表される素数が無限に存在することを，この等式$(e-3)$を用いて示した。

これまで，数値実験やオイラーの表示$(e-2)$などを利用して解やパターンを求めてきたが，次ではもう少し一般的な考察を試みる。

(5)　(2，3)型のより一般的な考察

不定方程式

$$\begin{cases} x+y=a+b+c \\ x^2+y^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases} \tag{$\diamond$}$$

を解くことを，次の方法で試みてみる。

($\star$)　a，b，cを既知として，x，yを求める。

このとき，x，yを解にもつ2次方程式の判別式Dは

$$\begin{aligned} D&=(x-y)^2=2(x^2+y^2)-(x+y)^2=a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca) \\ &=(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca) \end{aligned} \tag{$\diamond$-1}$$

である。

$x\,,y$は自然数であるから，自然数$a\,,b\,,c$に対して，Dが平方数となるかどうかが問題である。即ち，$a\,,b\,,c$がどんな条件(関係)を満たせばが，Dが平方数になるかを調べなければならない。

そこで，$(\diamond-1)$を変形して

$$D=(b+c-a)^2-4bc=z^2 \quad (\,z:\text{非負整数}\,) \qquad (\diamond-2)$$

とおく。このとき，

$$((b+c-a)+z)((b+c-a)-z)=4bc \qquad (\diamond-3)$$

となる。そこで，Kummerの理想数のアイデアを利用すると次のように分解することができる。

$$b=su\ ,\qquad c=tv\quad (\,s\,,t\,,u\,,v:\text{自然数}\,)$$
$$\begin{cases}(b+c-a)+z=2sv\\ (b+c-a)-z=2tu\end{cases} \qquad (\diamond-4)$$

これから

$$z=sv-tu\ ,\qquad a=(s-t)(u-v) \qquad (\diamond-5)$$

となる。ここで，aは自然数であるので

「$s>t\geqq 1$ かつ $u>v\geqq 1$」 または 「$t>s\geqq 1$ かつ $v>u\geqq 1$」

でなければならない。一方，

$$b-c=su-tv=(s-t)u+t(u-v)$$

であるので，次のようにおくことができる。(一般性は，失われない。)

$$t>s\geqq 1\ ,\quad v>u\geqq 1\ ,\quad b<c \qquad (\diamond-6)$$

さらに，$z\geqq 0$でなくてはならないので

$$sv\geqq tu \qquad (\diamond-7)$$

である。また，このとき，$x\,,y\ (x\leqq y)$は次で与えられる。

$$x=su+tv-sv\ ,\quad y=su+tv-tu \qquad (\diamond-8)$$

即ち，$(2\,,3)$.型の次の解(パターン)が得られる。($s\,,t\,,u\,,v$に関する恒等式でもある。)

$$(su+tv-sv)^2+(su+tv-tu)^2=((s-t)(u-v))^2+(su)^2+(tv)^2 \qquad (23-4)$$

ここで，$s=1\,,t=2\,,u=n\,,v=m$とおくと$(e-3)$が，また，$s=1\,,t=3\,,u=n\,,v=4n+1$とおくと$(23-3)$が得られる。

さらに，$s=m\,,t=m+1\,,u=1\,,v=n+1$とおくと$(2\,,k+1)$ $(k>1)$型へ一般化される次の解(パターン)を導くことができる。

$$(m+n+1)^2+(mn+m+n)^2=m^2+n^2+(mn+m+n+1)^2 \qquad (23-5)$$

また，$s=m\,,t=2m-n\,,u=m\,,v=2m+n\ (m>n)$とおくと，次のような解(パターン)を導くこともできる。

$$(3m^2-mn-n^2)^2+(3m^2+mn-n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(m^2)^2+(4m^2-n^2)^2 \qquad (23-6)$$

(6) $(3,3)$型のより一般的な考察

不定方程式

$$\begin{cases} x+\ y+\ z=\ a+\ b+\ c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases} \tag{$\diamond\diamond$}$$

を解くことを，(2,3)型と同様にして，次の方法で試みてみる。

(★★)　a, b, c, zを既知として，x, yを求める。

このとき，x, yを解にもつ2次方程式の判別式Dは

$$\begin{aligned} D &= (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)-(x+y)^2 \\ &= a^2-2ab+b^2-2ac-2bc+c^2+2az+2bz+2cz-3z^2 \\ &= (a+b-c-z)^2-4(a-z)(b-z) \end{aligned} \tag{$\diamond\diamond-1$}$$

である。

x, yは自然数であるから，自然数a, b, cに対して，Dが平方数となるかどうかが問題である。即ち，a, b, cがどんな条件(関係)を満たせばが，Dが平方数になるかを調べなければならない。

そこで，($\diamond\diamond-1$)を変形して

$$D=(z+c-a-b)^2-4(z-a)(z-b)=w^2 \quad (w:\text{非負整数}) \tag{$\diamond\diamond-2$}$$

とおく。このとき，

$$((z+c-a-b)+w)((z+c-a-b)-w)=4(z-a)(z-b) \tag{$\diamond\diamond-3$}$$

となる。そこで，Kummerの理想数のアイデアを再び利用すると次のように分解することができる。

$$z-a=su \ , \qquad z-b=tv \quad (s, t, u, v:0\text{でない整数})$$
$$\begin{cases} (z+c-a-b)+w=2sv \\ (z+c-a-b)-w=2tu \end{cases} \tag{$\diamond\diamond-4$}$$

これから

$$w=sv-tu \ , \qquad z+c-a-b=sv+tu \tag{$\diamond\diamond-5$}$$

となる。従って，

$$\begin{aligned} &b=a+su-tv \ , \qquad c=a+sv+tu-tv \\ &x=a+tu-tv \ , \qquad y=a+sv-tv \ , \qquad z=a+su \end{aligned} \tag{$\diamond\diamond-6$}$$

が得られる。また，$\{x, y, z\}$と$\{a, b, c\}$の中に同じ整数がないための必要十分条件は

$$s\neq t \ , \qquad u\neq v \tag{$\diamond\diamond-7$}$$

で与えられる。

そこで，($\diamond\diamond-7$)の仮定の下，任意の自然数aに対して，($\diamond\diamond-6$)におけるb, c, x, y, zがすべて正になるように0でない整数s, t, u, vを与えると，$(3, 3)_1$型の解(パターン)が得られる。(例えば，$tv<0$と取る。)

$$\begin{aligned} &(a+tu-tv)^2+(a+sv-tv)^2+(a+su)^2 \\ &\quad =a^2+(a+su-tv)^2+(a+sv+tu-tv)^2 \end{aligned} \tag{33 − 8}$$

(これは，a, s, t, u, vに関する恒等式でもある。)

また，この等式は次のように表すこともできる。

$$(a+x-y)^2+(a-y+w)^2+(a+z)^2=a^2+(a-y+z)^2+(a+x-y+w)^2 \qquad (33-9)$$

（ただし，$xw=yz$ とする。）

さらに，$(33-9)$ において

$$a=2\delta-\beta,\quad x=\beta-\delta,\quad y=\delta-\beta,\quad z=\delta-\gamma,\quad w=\gamma-\delta$$

とおくと，$xw=yz$ を満たし，ゴールドバッハの恒等式 $(e-1)$ を得ることができる。

一方，先に得られたパターン $(33-1)$ 〜 $(33-7)$ は a, x, y, z, w にそれぞれ次のような値を与えることで得られる。

$(33-1)$	$a=n$	$x=3$	$y=2$	$z=6$	$w=4$
$(33-2)$	$a=n+2$	$x=4$	$y=6$	$z=6$	$w=9$
$(33-3)$	$a=n+1$	$x=3$	$y=4$	$z=9$	$w=12$
$(33-4)$	$a=n+3$	$x=6$	$y=9$	$z=10$	$w=15$
$(33-5)$	$a=n+1$	$x=2$	$y=3$	$z=6$	$w=9$
$(33-6)$	$a=n+2$	$x=6$	$y=8$	$z=9$	$w=12$
$(33-7)$	$a=n+2$	$x=4$	$y=6$	$z=10$	$w=15$

また，$(33-9)$ において $x=2n$, $y=n$, $z=2m$, $w=m$ とおくと

$$(a+n)^2+(a+m-n)^2+(a+2n)^2=a^2+(a+2m-n)^2+(a+m+n)^2 \qquad (33-10)$$

となる。これは，$(e-3)$ を $(3,3)$ 型に拡張したものになっている。（$a=0$ とおくと $(e-3)$ になる。）

一方，$(33-8)$ において，$a=0$ として s, t, u, v を次のように置き換えると，等式 $(23-4)$ が得られる。

$$s-t\mapsto s\ ,\qquad s\mapsto t\qquad v\mapsto u\qquad u\mapsto v$$

以上の考察から，$(33-8)$, $(33-8)$ が，これまでに求めてきた $(2,3)$ 型と $(3,3)$ 型の解（パターン）を含んでいることが分かる。

一方，それぞれの等式は特徴とそれなりの意味を持っており，有効なものとなっている。ゴールドバッハの恒等式そしてオイラーの表示は和が3の倍数になる場合のパターンを示し，我々の $(33-1)$ は連続する7整数からの構成のパターンを特徴づけている。より一般解に価値を置くのか，あるいは，パターンの明確な方に価値を置くのかは，その活用目的とともに式を見る側の数学観や美観によるのではないか。

次の例を上げて本節を終わることとする。

$$(m^2n)^2+(mn^2)^2+(m^3+n^3)^2=(m^3)^2+(n^3)^2+(m^2n+mn^2)^2 \qquad (33-11)$$

$$(\,a=m^3\ ,\ x=m^2n\ ,\ y=m^3\ ,\ z=n^3\ ,\ w=mn^2\,)$$

2.2 (3, 4) 型と (4, 4) 型

(1) オイラーの恒等式と (3, 4) 型

オイラーは1751年に次の恒等式を与えた。[4)]

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2=a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \qquad (e-5)$$

この恒等式から，$(3,4)$ 型の非自明な解とパターンを構成することができる。

最初の課題の解は，オイラーの恒等式において，$a=1$，$b=2$，$c=4$ と置いたものになっている。

$$3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2 \quad \text{(順序は入れ換えてある。)}$$

次は，オイラーの恒等式を利用した $(3,4)$ 型の非自明なパターンの例である。

$$\begin{aligned}&(2n+3)^2+(2n+4)^2+(2n+5)^2\\&\qquad=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+(3n+6)^2 \qquad (34-1)\end{aligned}$$

$$5^2+6^2+7^2=2^2+3^2+4^2+9^2 \qquad 6^2+7^2+8^2=3^2+4^2+5^2+12^2$$

また，上の $(3,4)$ 型の非自明な2組の解 $3,5,6;1,2,4,7$ と $5,6,7;2,3,4,9$ を用いると，次の恒等式（オイラーの恒等式に含まれる）を得ることができる。

$$\begin{aligned}&(5m+3n)^2+(6m+5n)^2+(7m+6n)^2\\&\qquad=(2m+n)^2+(3m+2n)^2+(4m+4n)^2+(9m+7n)^2 \qquad (34-2)\end{aligned}$$

そして，この恒等式から，$3,5,6;1,2,4,7$ を含む $(3,4)$ 型の非自明なパターンとして，次を構成できる。

$$(5n-2)^2+(6n-1)^2+(7n-1)^2=(2n-1)^2+(3n-1)^2+(4n)^2+(9n-2)^2 \qquad (34-3)$$

さらに，オイラーの恒等式から導かれる次の恒等式は，$(34-2)$ を含んでおり，$(3,4)$ 型のパターンを構成するのに活用することができる。

$$\begin{aligned}&((a+b)m+(a'+b')n)^2+((b+c)m+(b'+c')n)^2+((c+a)m+(c'+a')n)^2\\&\quad=(am+a'n)^2+(bm+b'n)^2+(cm+c'n)^2+((a+b+c)m+(a'+b'+c')n)^2 \qquad (34-4)\end{aligned}$$

一方，オイラーの恒等式には含まれない $(3,4)$ 型の解も存在する。例えば，次はその例である。

$$4^2+7^2+13^2=2^2+3^2+5^2+14^2$$

このとき，面白いことにこの解とオイラーの恒等式 $(e-5)$ からは得られる解 $3,5,6;1,2,4,7$ を用いると次のようなオイラーの恒等式とは異なる等式を得ることができる。[5)]

$$\begin{aligned}&(3m+4n)^2+(5m+7n)^2+(6m+13n)^2\\&\qquad=(2m+2n)^2+(m+3n)^2+(4m+5n)^2+(7m+14n)^2 \qquad (34-5)\end{aligned}$$

これより，次のオイラーの恒等式に含まれない $(e-5)$ 型の $(3,4)$ 型の非自明なパターンを作ることができる。

$$\begin{aligned}&(3n+4)^2+(5n+7)^2+(6n+13)^2\\&\qquad=(2n+2)^2+(n+3)^2+(4n+5)^2+(7n+14)^2 \qquad (34-6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(4n+3)^2+(7n+5)^2+(13n+6)^2\\&\qquad=(2n+2)^2+(3n+1)^2+(5n+4)^2+(14n+7)^2 \qquad (34-7)\end{aligned}$$

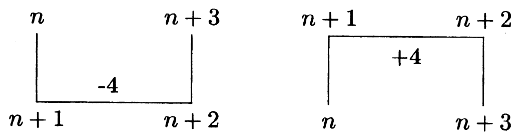
与えられた条件が2つであるので，変数が多くなればなるほどいろいろな解やパターンが考えられることになる。従って，今後は特殊なパターン(いろいろな解釈と考え方はあろうが)に絞って考察していくことにする。

(2)　$(4,4)$ 型

連続する4整数 n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ に間には和と平方和に関して次の関係がある。

$$\text{和}\qquad n+(n+3)=(n+1)+(n+2)$$
$$\text{平方和}\qquad n^2+(n+3)^2=(n+1)^2+(n+2)^2-4$$

即ち，平方和については，



(★)

従って，この型の解とパターンは，次のようにしてエレガントに構成できる。

$$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2 \qquad (44-1)$$
$$1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$$

これは，連続する8個の自然数を2組に分けて構成できる美しい形をしている。一般には，公差が d である2組の等差数列を用いて，それぞれの数列から連続する4つの項から構成される次の恒等式がある。

$$a^2+(a+3d)^2+(b+d)^2+(b+2d)^2=(a+d)^2+(a+2d)^2+b^2+(b+3d)^2 \qquad (44-2)$$

これを利用すると，素数だけからなる次のような $(4, 4)$ 型の解も構成される。

$$11^2+29^2+47^2+53^2=17^2+23^2+41^2+59^2$$

また，この解を含むパターンとしては，次などがある。

$$\begin{aligned} &n^2+(n+18)^2+(n+36)^2+(n+42)^2 \\ &\quad=(n+6)^2+(n+12)^2+(n+30)^2+(n+48)^2 \end{aligned} \qquad (44-3)$$

さらに，(★) を用いると，$(4n, 4n)$ 型の非自明な解とパターンを構成する (特に，連続する 8n 個の自然数を用いて) ことができる。次は，連続する16個の自然数を用いて構成した $(8, 8)$ 型の非自明なパターンの例である。

$$\begin{aligned} &n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+8)^2+(n+11)^2+(n+13)^2+(n+14)^2 \\ &=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+10)^2+(n+12)^2+(n+15)^2 \end{aligned} \qquad (88-1)$$

$$\begin{aligned} &n^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+10)^2+(n+13)^2+(n+14)^2 \\ &=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+8)^2+(n+11)^2+(n+12)^2+(n+15)^2 \end{aligned} \qquad (88-2)$$

一方，数値実験等を通して考察していくことを通して，次の恒等式が成り立つことを見つけた。

$$\begin{aligned} &(x+y+z-w)^2+(x+y-z+w)^2+(x-y+z+w)^2+(-x+y+z+w)^2 \\ &\quad=4x^2+4y^2+4z^2+4w^2 \end{aligned} \qquad (e-6)$$

$(e-6)$ において，x, y, z, w をそれぞれ次のようにおくと，$(44-2)$ が得られる。

$$x=a+d\,,\qquad y=a+2d\,,\qquad z=b\,,\qquad w=b+3d$$

また，$(e-6)$ において，$w=x+y+z$ とおくと，オイラーの恒等式 $(e-5)$ を得ることができる。即ち，$(e-6)$ はオイラーの恒等式を4変数に拡張したものになっている。

さらに，自然数 a , b , c , d $(a < b < c < d)$ に対して，$(e-6)$ を用いて，次の等式を得ることができる。

$a+b+c+d=2m$ (m : 自然数) のとき

$$(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2 \qquad (e-7)$$

この等式は，(3 , 3) 型のオイラーの表示 $(e-2)$ の (4 , 4) 型のタイプと見ることができる面白い等式となっている。

従って，同様に和が偶数である場合の (4 , 4) 型の多くの解とパターンを構成することができる。次は，その例である。

$$n^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+7)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+9)^2 \qquad (44-4)$$

$$n^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+9)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+6)^2+(n+10)^2 \qquad (44-5)$$

$$n^2+(n+6)^2+(n+7)^2+(n+9)^2=(n+2)^2+(n+4)^2+(n+5)^2+(n+11)^2 \qquad (44-6)$$

また，$(e-6)$ には含まれないが次のようなより面白いパターンもある。

$$n^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+11)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+9)^2+(n+10)^2 \qquad (44-7)$$

$$n^2+(n+7)^2+(n+6)^2+(n+13)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+10)^2+(n+12)^2 \qquad (44-8)$$

$$n^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+16)^2=(n+1)^2+(n+4)^2+(n+12)^2+(n+15)^2 \qquad (44-9)$$

そこでパターンを分析するため，(4 , 4) 型の一組の解を x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ; a_1 , a_2 , a_3 , a_4 とする。
即ち，

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=a_1+a_2+a_3+a_4 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 \end{cases}$$

このとき，$(e-6)$ は，従って，$(44-3)$ ～ $(44-6)$ は次の特徴を持っている。

$$x_1+a_4=x_2+a_3=x_3+a_2=x_4+a_1$$

これに対して，$(44-7)$ は

$$x_1+x_4=x_2+x_3=a_1+a_4=a_2+a_3$$

という特徴を持っている。従って，$(e-6)$ とは異なる恒等式が背景に存在することが考えられる。そこで，同様にKummerのアイデアを活用して考察していくと次の等式を得ることができる。

$$\begin{aligned} &a^2+(a+y-z+w)^2+(a+x+z+w)^2+(a+x+y+2w)^2 \\ &=(a+x)^2+(a-z+w)^2+(a+x+y+z+w)^2+(a+y+2w)^2 \qquad (e-7) \end{aligned}$$

(ただし, $xw=yz$ とする。)

上記 $(44-7)$, $(44-8)$ は $(e-7)$ において，a , x , y , z , w にそれぞれ次のような値を与えることで得られる。

$(44-7)$	$a=n$	$x=1$	$y=2$	$z=2$	$w=4$
$(44-8)$	$a=n$	$x=1$	$y=4$	$z=1$	$w=4$
$(44-9)$	$a=n$	$x=1$	$y=3$	$z=2$	$w=6$

一方，和が偶数のときでも，$(e-6)$, $(e-7)$ から導き出せない解やパターンも存在する。次はその例である。

$$n^2+(n+2)^2+(n+7)^2+(n+13)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+14)^2 \qquad (44-10)$$

$$n^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+13)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+14)^2 \qquad (44-11)$$

$$n^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+13)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+9)^2+(n+12)^2 \qquad (44-12)$$

また，和が奇数である $(4,4)$ 型の解とパターンも $(3,3)$ 型の場合と同様に存在する。次はその例である。

$$n^2+(n+4)^2+(n+8)^2+(n+13)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+10)^2+(n+12)^2 \qquad (44-13)$$

$$n^2+(n+4)^2+(n+8)^2+(n+15)^2=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+6)^2+(n+16)^2 \qquad (44-14)$$

$$n^2+(n+6)^2+(n+8)^2+(n+15)^2=(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+16)^2 \qquad (44-15)$$

$$n^2+(n+7)^2+(n+8)^2+(n+12)^2=(n+3)^2+(n+4)^2+(n+6)^2+(n+14)^2 \qquad (44-16)$$

ところで，$(e-7)$ において，$a=0$ とすると，$(3,4)$ 型に関する次の等式が得られる。

$$\begin{aligned}&(y-z+w)^2+(x+z+w)^2+(x+y+2w)^2\\&\quad=x^2+(-z+w)^2+(x+y+z+w)^2+(y+2w)^2\end{aligned} \qquad (e-8)$$

（ただし，$xw=yz$ とする。）

特に，次の等式を得る。

$$(2m+n)^2+(m+3n)^2+(3m+4n)^2=m^2+n^2+(3m+3n)^2+(2m+4n)^2 \qquad (34-8)$$

（$x=m$，$y=2m$，$z=n$，$w=2n$ とおく。）

これは，オイラーの恒等式 $(e-5)$ と異なる恒等式が構成できたことを示している。また，これから $(3,4)$ 型の非自明な解とパターンを得ることができる。

$$(3n+5)^2+(4n+5)^2+(7n+10)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(6n+8)^2+(6n+9)^2 \qquad (34-9)$$

（$x=n+2$，$y=2(n+2)$，$z=n+1$，$w=2(n+1)$ とおく。）

さらに，次のようなパターンも構成できる。

$$\begin{aligned}&(9n^2+6n-2)^2+(27n^2-6n+1)^2+(36n^2-1)^2\\&\quad=(9n^2-1)^2+(12n-2)^2+(36n^2-12n+1)^2+(27n^2)^2\end{aligned} \qquad (34-10)$$

（$x=(3n-1)(3n+1)$，$y=3n(3n-2)$，$z=(3n-1)(3n-2)$，$w=3n(3n+1)$）

2.3　(4, 5) 型と (5, 5) 型

本稿の目的の1つが構成的に進めていくことであるので，$(4,5)$，$(5,5)$ を具体的に示し，一般的な考察の足がかりとする。

(1)　数値実験による非自明なパターン

1から9までの連続する9の和は45（奇数）であるので，これらを用いて $(4,5)$ 型の非自明な解とパターンを構成することはできない。また，1から10までの連続する10の和は55（奇数）であるので，これらを用いて $(5,5)$ 型の非自明な解とパターンを構成することもできない。そこで，1から k までの連続する k 個の整数の中から，それぞれ9個，10個の整数を用いてできる $(4,5)$，$(5,5)$ 型の非自明な解が構成できる k の値を求めていくと，最小値は12，13であり，それぞれ11組の非自明な解がある。次は和が最小となるそれぞれの解と非自明なパターンの例である。[6)]

$(4,5)$ 型　　$3^2+4^2+8^2+11^2=1^2+2^2+5^2+6^2+12^2$

$$(4n-1)^2+(5n-1)^2+(9n-1)^2+(13n-2)^2$$
$$=n^2+(3n-1)^2+(6n-1)^2+(7n-1)^2+(14n-2)^2 \qquad (45-1)$$

$(5\,,5)$ 型　　$1^2+4^2+5^2+9^2+12^2=2^2+3^2+6^2+7^2+13^2$

$$n^2+(n+3)^2+(n+4)^2+(n+8)^2+(n+11)^2$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+12)^2 \qquad (55-1)$$

(2)　$(2\,,3)$ 型の活用した $(5\,,5)$ 型

$(2\,,3)$ 型を活用すると，次のようにして $(5,\,,5)$ 型の非自明な解とパターンをすることができる。
$(23-1)$ から

$$4^2+5^2=1^2+2^2+6^2 \qquad 25^2+26^2=8^2+9^2+34^2$$

が成り立つ。従って，これより

$$4^2+5^2+8^2+9^2+34^2=1^2+2^2+6^2+25^2+26^2$$

という $(5\,,5)$ 型の非自明な解を得ることができる。従って，次の $(5\,,5)$ 型の非自明なパターンを作ることができる。

$$(n+3)^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+8)^2+(n+33)^2$$
$$=n^2+(n+1)^2+(n+5)^2+(n+24)^2+(n+25)^2 \qquad (55-2)$$

また，これから得られる $(4\,,5)$ の解 $1\,,5\,,24\,,25\,;\,3\,,4\,,7\,,8\,,33$ を含む非自明なパターンとしては，次などがある。

$$(5n-4)^2+(6n-1)^2+(8n+16)^2+(15n+10)^2$$
$$=(n+2)^2+(2n+2)^2+(7n)^2+(10n-2)^2+(14n+19)^2 \qquad (45-1)$$

(3)　オイラーの表示型 ($(e-2)$ のタイプ) による $(5\,,5)$ 型

オイラーの表示 $(e-2)$ と等式 $(44-3)$ は左辺と右辺において対応する各項の和がそれぞれ $2m\,,m$ となっている。そこで，$(5\,,5)$ 型においても同様の性質を成り立たせるように考察していくと，オイラーの表示型の次の等式が成り立つことが分かる。

$a+b+c+d+e=5m$ (m : 自然数) のとき

$$(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \qquad (e-9)$$

$(e-9)$ を満たす $(5\,,5)$ 型の非自明なパターンとしては次がある。

$$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2+(n+10)^2+(n+11)^2$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+7)^2+(n+8)^2+(n+12)^2 \qquad (55-3)$$

(4)　$(4\,,5)$ 型

左辺と右辺では項の数が異なるので，$(5\,,5)$ 型と同じにはいかないが，左辺の 4 項と右辺の 4 項について，同様の関係を考察していくと，オイラーの表示型の次の等式が成り立つことが分かる。これは，$(e-8)$ において，$e=2m$ とおいたものと同じである。

$a+b+c+d=3m$ (m : 自然数) のとき

$$(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+(2m)^2 \qquad (e-10)$$

$(e-10)$ を満たす $(4, 5)$ 型の非自明なパターンとしては次がある。[7)]

$$(13n-2)^2+(10n-1)^2+(9n-1)^2+(3n-1)^2$$
$$=n^2+(4n-1)^2+(5n-1)^2+(11n-1)^2+(14n-2)^2 \qquad (45-2)$$

2.4　(m, m) 型と $(m, m+1)$ 型　$(m \geqq 3)$

ここでは，これまでの考察をもとにして，$m \geqq 3$ のときに (m, m) 型と $(m, m+1)$ 型の非自明なパターンが存在することを具体的に示していく。

(1)　$(3, 3)$ 型と $(4, 4)$ 型の活用

$(3, 3)$ 型，$(4, 4)$ 型及び $(5, 5)$ 型については，これまでにその非自明な解とパターンが存在することを具体的に構成することで示してきた。

一方，$m \geqq 6$ を満たすすべての自然数は0以上の整数 x, y を用いて

$$m = 3x + 4y \quad (x \geqq 0, \ y \geqq 0)$$

と表すことができる。このことは，$(3, 3)$ 型と $(4, 4)$ 型の非自明な解を用いて，(m, m) $(m \geqq 6)$ 型の非自明な解，従って非自明なパターンを構成できることを示している。先の2.3 (2) と同様にして，$(7, 7)$ 型のパターンを具体的に構成してみる。

$7 = 3 \times 1 + 4 \times 1$ であるから，先に求めた $(33-1)$ と $(44-1)$

$$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+6)^2$$
$$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2$$

から

$$n^2+(n+4)^2+(n+5)^2+(n+7)^2+(n+10)^2+(n+12)^2+(n+13)^2$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+6)^2+(n+8)^2+(n+9)^2+(n+11)^2+(n+14)^2 \qquad (77-1)$$

あるいは

$$n^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+6)^2+(n+8)^2+(n+12)^2+(n+13)^2$$
$$=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+9)^2+(n+10)^2+(n+14)^2 \qquad (77-2)$$

等と構成することができる。

(2)　オイラーの表示 $(e-2)$ の一般化としての (m, m) 型

$(4, 4)$ 型の等式 $(e-4)$ と $(5, 5)$ 型の等式 $(e-9)$ はオイラーの表示 $(e-2)$ のタイプの等式である。これらは，2.2 (2) で考察したように，不定方程式

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad , \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} a_i^2$$

において

$$x_1 + a_1 = x_2 + a_2 = \cdots = x_m + a_m$$

という性質を持っている。そこで，

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i = X \quad , \qquad x_i + a_i = Y \ \ (1 \leqq i \leqq m)$$

とおくと

$$2X = mY$$

を満たす。

このことから，m の偶奇に応じて，次のように $(m\,,\,m)$ 型の等式として一般化することができる。

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = tm$ $(m$ ： 奇数 $, \, t$ ： 自然数$)$ のとき

$$(2t-a_1)^2 + (2t-a_2)^2 + \cdots + (2t-a_m)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 \tag{$e-11$}$$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \dfrac{tm}{2}$ $(m$ ： 偶数 $, \, t$ ： 自然数$)$ のとき

$$(t-a_1)^2 + (t-a_2)^2 + \cdots + (t-a_m)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 \tag{$e-12$}$$

$(e-11)$ を満たす (m,m) 型の非自明な解としては，m を奇数として考察していくと，次のような解を得ることができる。

1) $m = 2k+1 \ \ (k \geqq 1)$ のとき $(t = 3k+1)$

$$1^2 + \sum_{i=1}^{k}(6i-1)^2 + \sum_{i=1}^{k}(6i)^2 = \sum_{i=1}^{k}(6i-4)^2 + \sum_{i=1}^{k}(6i-3)^2 + (6k+1)^2 \tag{$mm-1$}$$

また，$(e-12)$ を満たす (m,m) 型の非自明な解としては，偶数 m を 4 で割った余りで考察していくと，次のような解を得ることができる。

2) $m = 4k \ \ (k \geqq 1)$ のとき $(t = 12k-1)$

$$\begin{aligned} &1^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(3k+i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(4k+i)^2 + \sum_{i=1}^{k}(6k-1+i)^2 + (8k-1)^2 + \sum_{i=1}^{k}(9k-2+i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k}(2k+i)^2 + (4k)^2 + \sum_{i=1}^{k}(5k-1+i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(7k-1+i)^2 \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k-1}(8k-1+i)^2 + (12k-2)^2 \end{aligned} \tag{$mm-2$}$$

3) $m = 4k+2 \ \ (k \geqq 1)$ のとき $(t = 12k+5)$

$$\begin{aligned} &1^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(2k+1+i)^2 + (4k+2)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(5k+3+i)^2 \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k+1}(7k+1+i)^2 + \sum_{i=1}^{k+1}(8k+3+i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k+1}(3k+i)^2 + \sum_{i=1}^{k+1}(4k+2+i)^2 + \sum_{i=1}^{k-1}(6k+2+i)^2 + (8k+3)^2 \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k-1}(9k+4+i)^2 + (12k+4)^2 \end{aligned} \tag{$mm-3$}$$

(3) (2) の系としての $(m\,,\,m+1)$ 型

等式 $(e-11)$ は m が偶数のときにも成り立つ等式である。そこで，$m \geqq 2$ とし，$m+1$ に対して，$(e-11)$ を適用し，$a_{m+1} = 2t$ とおくことにより次の等式を得る。

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = t(m-1)$ $(m \geqq 2\,,\, t$: 自然数$)$のとき

$$(2t-a_1)^2 + (2t-a_2)^2 + \cdots + (2t-a_m)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 + (2t)^2 \qquad (e-13)$$

そこで，$x_1\,,\,x_2\,,\cdots,\,x_m$ を任意の変数(あるいは，自然数)として，$(e-13)$ において

$$t = t_m = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad , \qquad a_i = t_m - x_i \ \ (1 \leqq i \leqq m)$$

とおくと，次の等式を得る。

$$\sum_{i=1}^{m}(t_m + x_i)^2 = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j \neq i} x_j\Big)^2 + (2t_m)^2 \qquad (e-14)$$

特に，$(e-14)$ において，$x_i = i$ $(1 \leqq i \leqq m)$ とおくと，t_m は三角数となり，次の面白い$(m\,,\,m+1)$型の非自明な解が得られる。

$$t_m = \frac{m(m+1)}{2}\ \text{のとき} \qquad \sum_{k=t_m+1}^{t_{m+1}-1} k^2 = \sum_{k=t_{m-1}}^{t_m-1} k^2 + (2t_m)^2 \qquad (m(m+1)-1)$$

面白さを示すために具体的な数値で例示しておく。

$$4^2 + 5^2 = 1^2 + 2^2 + 6^2$$
$$7^2 + 8^2 + 9^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 12^2$$
$$11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 = 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 20^2$$
$$16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 30^2$$
$$22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 = 15^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 19^2 + 20^2 + 42^2$$

2.5 1から連続する自然数を用いて構成できる$(m\,,\,m)$型と$(m\,,\,m+1)$型 $(m \geqq 3)$

1から7までの連続する7個の自然数を用いて，$(3\,,\,4)$型の非自明な解を，また，1から8までの連続する8個の自然数を用いて，$(4\,,\,4)$型の非自明な解を次のように構成できた。

$$3^2 + 5^2 + 6^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 \qquad 1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$$

そこで，ここでは構成できる条件を反省し，具体的に構成していくこととする。

(1) $(m\,,\,m+1)$型 $(m \geqq 3)$

1から$2m+1$までの連続する$2m+1$個の自然数の和は$(2m+1)(m+1)$である。これを等しい2つの和に分けることができるためには$m+1$は偶数，従って，mは奇数でなければならない。そこで，mを奇数とすると，$(e-13)$から次の等式を作ることができる。

$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \dfrac{t(m-1)}{2}$ $(m$: 3以上の奇数$,\, t$: 自然数$)$のとき

$$(t-a_1)^2 + (t-a_2)^2 + \cdots + (t-a_m)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 + t^2 \qquad (e-15)$$

この等式$(e-15)$を用いて数値実験等を行い考察していくと，次の解を見いだすことができる。

右辺に現れる自然数を□で，左辺に現れる自然数を○で囲んで表すと，mのタイプに応じて次のようになっている。

$(4k-1\,,\,4k)$型の例

$$1\ 2\ \boxed{3}\ 4\ \boxed{5}\boxed{6}\ 7$$
$$1\ 2\ \boxed{3}\boxed{4}\ 5\ 6\ \boxed{7}\ 8\ \boxed{9}\boxed{10}\ 11\ 12\ \boxed{13}\boxed{14}\ 15$$
$$1\ 2\ \boxed{3}\boxed{4}\ 5\ 6\ \boxed{7}\boxed{8}\ 9\ 10\ \boxed{11}\ 12\ \boxed{13}\boxed{14}\ 15\ 16\ \boxed{17}\boxed{18}\ 19\ 20\ \boxed{21}\boxed{22}\ 23$$

$(4k+1\,,\,4k+2)$ 型の例

$$1\ \boxed{2}\ 3\ 4\ 5\ \boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\ 9\ \boxed{10}\ 11$$
$$1\ \boxed{2}\ 3\ 4\ \boxed{5}\boxed{6}\ 7\ 8\ 9\ \boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\ 13\ 14\ \boxed{15}\boxed{16}\ 17\ \boxed{18}\ 19$$
$$1\ \boxed{2}\ 3\ 4\ \boxed{5}\boxed{6}\ 7\ 8\ \boxed{9}\boxed{10}\ 11\ 12\ 13\ \boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\ 17\ 18\ \boxed{19}\boxed{20}\ 21\ 22\ \boxed{23}\boxed{24}\ 25\ \boxed{26}\ 27$$

この図は，また，非自明な解が帰納的に構成できることも示している。

これらの例から，$(m\,,\,m+1)$ 型の非自明な一般解が得られる。

1) $m=4k-1\ \ (k \geqq 1)$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i+4k-3)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i+4k-2)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(4i-3)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i-2)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i+4k-4)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i+4k-1)^2 \qquad (m(m+1)-2)$$

2) $m=4k+1\ \ (k \geqq 1)$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k}(4i-2)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i+1)^2+\sum_{i=1}^{3}(i+4k+1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i+4k+3)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i+4k+4)^2+(8k+2)^2$$
$$=1^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i-1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i)^2+\sum_{i=1}^{3}(i+4k-2)^2+\sum_{i=1}^{k}(4i+4k+1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(4i+4k+2)^2+(8k+3)^2 \qquad (m(m+1)-3)$$

(2)　$(m\,,\,m)$ 型 $(m \geqq 4)$

先の $(4\,,\,4)$ 型の考察の中で，$8n$ 個の連続する自然数を用いて $(4n\,,\,4n)$ 型の非自明な解とパターンを構成できることを示した。そこで，さらなる可能性を探る。これまでの考察等から明らかであるように，パターン化のシステムを見ると 1 から $2m$ までを用いて構成できるかどうかが問題である。

一方，1 から $2m$ までの連続する $2m$ 個の自然数の和は $m(2m+1)(4m+1)$ である。これを等しい 2 つの和に分けることができるためには m は偶数でなければならない。

1) $m=4k\ \ (k \geqq 1)$ のとき

このときは，構成できることはすでに示してあるが，先のパターン化の 1 つを定式化すると次が得られる。

$$\sum_{i=1}^{k}(8i-7)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i-4)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i-2)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i-1)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(8i-6)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i-5)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i-3)^2+\sum_{i=1}^{k}(8i)^2 \qquad (mm-4)$$

2) $m=4k+2\ \ (k \geqq 1)$ のとき

このときは，先の $(4,4)$ 型のときのようにはうまくいかない。しかしながら，次のような非自明な解が存在することが分かる。

$$\begin{aligned}1^2+3^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i-1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i+1)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i+2)^2 \\ +(8k-1)^2+(8k)^2+(8k+1)^2+(8k+3)^2 \\ =2^2+4^2+5^2+6^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i+3)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i+4)^2 \\ +\sum_{i=1}^{k-1}(8i+5)^2+\sum_{i=1}^{k-1}(8i+6)^2+(8k+2)^2+(8k+4)^2 \quad (mm-5)\end{aligned}$$

このような等式を構成してみると，つくづく自然数は不思議な性質そして美しいある意味で対称的ともいえる性質を持っていることに気づく。

しかしながら，以下のところでもっと驚くしかも美しい恒等式があることを示していく。

3. $(m, n+1)$ 型 $(n \geqq m+1)$

前節までは，左辺と右辺の項の差が1以下のものについて詳しく検討してきた。そこでは，m が与えられたときの (m, m) 型と $(m, m+1)$ 型の解とパターンについて考察してきたが，本節では，m が与えられたとき，$n \geqq m+1$ である任意の自然数 n について，右辺と左辺の項の差が2以上である $(m, n+1)$ 型の非自明な解(ここでは，これもパターンという)を主として考察していくことにする。

3.1 $(2, n+1)$ 型 $(n \geqq 3)$

一般に，次の恒等式が成り立つ。

$$(a+1)^2+(a+b)^2=(a^2-2b)+(a+b+1)^2 \qquad (e-16)$$

従って，この恒等式より，次の面白い解をつくることができる。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数に対して，

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}x_i \quad , \qquad s_2=\sum_{i<j}x_ix_j$$

とおく。このとき，

$$(s_1+1)^2+(s_1+s_2)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+(s_1+s_2+1)^2 \qquad (e-17)$$

ここで，$x_k=k \ (1 \leqq k \leqq n)$ とおくと，次のパターンを得る。

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{n(n+1)}{2}+1\Big)^2+\Big(\frac{n(n+1)(3n^2-n+10)}{24}\Big)^2 \\ &=1^2+2^2+\cdots+n^2+\Big(\frac{n(n+1)(3n^2-n+10)}{24}+1\Big)^2 \qquad (2(n+1)-1)\end{aligned}$$

注意： $n=2$ のときも，即ち，$(2,3)$ 型の非自明な解(1. で示してある)を与える。

$$4^2+5^2=1^2+2^2+6^2$$

例 $(2(n+1)-1)$ のいくつかの例

$$
\begin{aligned}
7^2+17^2&=1^2+2^2+3^2+18^2\\
11^2+45^2&=1^2+2^2+3^2+4^2+46^2\\
16^2+100^2&=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+101^2\\
22^2+196^2&=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+197^2\\
29^2+350^2&=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2++351^2
\end{aligned}
$$

また，$(e-17)$ は右辺の最初の n 項として任意の自然数を取ることができることを示しているので，等差数列，等比数列やフィボナッチ数列(第2項から始めて)などいろいろなパターンを作ることができる。

例えば，$x_k=2k-1$ $(1\leqq k\leqq n)$ とおくと，次の奇数パターンを得る。

$$
\begin{aligned}
&(n^2+1)^2+\left(\frac{n(3n^3-4n^2+6n+1)}{6}\right)^2\\
&\qquad=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2+\left(\frac{n(3n^3-4n^2+6n+1)}{6}+1\right)^2 \qquad (2(n+1)-2)
\end{aligned}
$$

次に，数値実験をもとにして得られた(2, 4)型のパターンの例をいくつかあげておく。

$$(m+6)^2+(4m+13)^2=1^2+2^2+(m+2)^2+(4m+14)^2 \qquad (24-1)$$

$$(2m+7)^2+(5m+9)^2=1^2+2^2+(2m+2)^2+(5m+11)^2 \qquad (24-2)$$

$$(4m+9)^2+(7m+7)^2=1^2+2^2+(4m+2)^2+(7m+11)^2 \qquad (24-3)$$

$$(5m+9)^2+(8m+5)^2=1^2+2^2+(5m+1)^2+(8m+10)^2 \qquad (24-4)$$

$$(3m^2+1)^2+(3m^2+2)^2=1^2+2^2+(3m^2-3m)^2+(3m^2+3m)^2 \qquad (24-5)$$

$$
\begin{aligned}
&(3m+4)^2+(3m^2+9m+5)^2\\
&\qquad=m^2+(m+1)^2+(m+2)^2+(3m^2+9m+6)^2 \qquad (24-6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&((2m+1)k^2+m)^2+((2m+1)k^2+m+1)^2\\
&\qquad=m^2+(m+1)^2+((2m+1)(k^2-k))^2+((2m+1)(k^2+k))^2 \qquad (24-7)
\end{aligned}
$$

この例において，例えば $(24-7)$ は左辺の2つの項と右辺の最初の2つの項がそれぞれ連続するようなパターンが作れることを示している。また，$(24-6)$ は右辺の最初の3つの項が連続するようなパターンの例になっている。

このように，いくつかの条件を与えることで，二次方程式の判別式などを利用して，パターンを探すことができる。本稿の目的の1つが帰納的に構成的に考察することであるので，具体的なパターン探しの例を次に示しておく。

≪ パターン探しの例 ≫　右辺の最初の3つの項が連続する奇数であるパターン

$$x+y=(2m-1)+(2m+1)+(2m+3)+z \qquad (1)$$

$$x^2+y^2=(2m-1)^2+(2m+1)^2+(2m+3)^2+z^2 \qquad (2)$$

とおく。

このとき，x, y を解に持つ2次方程式の判別式 D は

$$
\begin{aligned}
D&=(x+y)^2-4xy=2(x^2+y^2)-(x+y)^2\\
&=(z-(6m+3))^2-(48m^2+48m-4) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となる。今 x, y として自然数解を求めているので

$$D = k^2 \tag{4}$$

となる自然数 k を見つけ出さなければならない。

そこで，(3), (4) から

$$(z-(6m+3))^2 - k^2 = 4(12m^2+12m-1) \tag{5}$$

と式変形できる。(5) を成り立たせる場面として，次を考える。

(注意：必然的にそうなるのではなく，都合のよいものを1つ取っているだけである。)

$$\begin{cases} (z-(6m+3))+k = 2(12m^2+12m-1) \\ (z-(6m+3))-k = 2 \end{cases} \tag{6}$$

これを解くと

$$\begin{cases} k = 12m^2+12m-2 \\ z = 12m^2+18m+3 \end{cases} \tag{7}$$

従って，(1), (4), (7) から

$$\begin{cases} x = 6m+4 \\ y = 12m^2+18m+2 \end{cases} \tag{8}$$

を得る。よって，

$$\begin{aligned} &(6m+4)^2 + (12m^2+18m+2)^2 \\ &\quad = (2m-1)^2 + (2m+1)^2 + (2m+3)^2 + (12m^2+18m+3)^2 \end{aligned} \tag{24 - 8}$$

という新しい (2, 4) 型のパターンを見つけることができる。

その例をいくつかあげると次になる。

$$10^2 + 32^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 33^2$$

$$16^2 + 86^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 87^2$$

$$22^2 + 164^2 = 5^2 + 7^2 + 9^2 + 165^2$$

なお，上の (5) において

$$f(m) = 12m^2 + 12m - 1 \tag{9}$$

とおくと，$m < 10$ のとき，

$f(1) = 23$	prime	$f(2) = 71$	prime	$f(3) = 11 \times 13$	
$f(4) = 239$	prime	$f(5) = 359$	prime	$f(6) = 503$	prime
$f(7) = 11 \times 61$		$f(8) = 863$	prime	$f(9) = 13 \times 83$	

従って，$m = 1, 2, 4, 5, 6, 8$ のときは，上で考察したタイプに限られてくるが，$m = 3, 7, 9$ のときは新たな次の解が得られる。

$$32^2 + 34^2 = 5^2 + 7^2 + 9^2 + 45^2$$

$$56^2 + 106^2 = 13^2 + 15^2 + 17^2 + 117^2$$

$$70^2 + 140^2 = 17^2 + 19^2 + 21^2 + 153^2$$

3.2 $(3, n+1)$ 型 $(n \geqq 4)$

先の「パターン探しの例」でみたように，2次方程式を利用するために，次の型のパターンを考えてみる。

$$(n+1)+x+y=1+2+\cdots+n+z \tag{10}$$

$$(n+1)^2+x^2+y^2=1^2+2^2+\cdots+n^2+z^2 \tag{11}$$

これから

$$x+y=\frac{(n+1)(n-2)}{2}+z \tag{12}$$

$$x^2+y^2=\frac{(n+1)(2n^2-5n-6)}{6}+z^2 \tag{13}$$

このとき，x, y を解に持つ2次方程式の判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (x+y)^2-4xy=2(x^2+y^2)-(x+y)^2 \\ &= \left(z-\frac{(n+1)(n-2)}{2}\right)^2-\frac{(n+1)(n(n-1)(3n-10)+24)}{6} \end{aligned} \tag{14}$$

となる。今 x, y として自然数解を求めているので

$$D=u^2 \tag{15}$$

となる自然数 u を見つけ出さなければならない。

そこで，(14), (15) から

$$\left(z-\frac{(n+1)(n-2)}{2}\right)^2-u^2=\frac{(n+1)(n(n-1)(3n-10)+24)}{6} \tag{16}$$

と式変形できる。(16) を成り立たせる場面として，次を考える。

（注意：$n \geqq 4$ に対して，$\dfrac{(n+1)n(n-1)(3n-10)}{24}$ は自然数である。）

$$\begin{cases} \left(z-\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}\right)+u=2\times\dfrac{(n+1)(n(n-1)(3n-10)+24)}{24} \\ \left(z-\dfrac{(n+1)(n-2)}{2}\right)-u=2 \end{cases} \tag{17}$$

これを解くと

$$\begin{cases} u=\dfrac{n(3n^3-10n^2-3n+34)}{24} \\ z=\dfrac{n(n+1)(3n^2-13n+22)}{24}+1 \end{cases} \tag{18}$$

従って，(12), (15), (18) から

$$\begin{cases} x=\dfrac{n(n-1)}{2} \\ y=\dfrac{n(n+1)(3n^2-13n+22)}{24} \end{cases} \tag{19}$$

を得る。よって，

$$\begin{aligned} &(n+1)^2+\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2+\left(\frac{n(n+1)(3n^2-13n+22)}{24}\right)^2 \\ &= 1^2+2^2+\cdots+n^2+\left(\frac{n(n+1)(3n^2-13n+22)}{24}+1\right)^2 \end{aligned} \tag{3(n+1)-1}$$

という $(3, n+1)$ 型のパターンを見つけることができる。

その例をいくつかあげると次になる。

$$5^2+6^2+15^2=1^2+2^2+3^2+4^2+16^2$$
$$6^2+10^2+40^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+41^2$$
$$7^2+15^2+91^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+92^2$$

また，次のパターンを同様の計算で見つけることができる。($n \geqq 2$ で可)

$$1^2+\left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2+\left(\frac{n(n-1)(3n^2+17n+26)}{24}\right)^2$$
$$=2^2+3^2+\cdots+(n+1)^2+\left(\frac{n(n-1)(3n^2+17n+26)}{24}+1\right)^2 \qquad (3(n+1)-2)$$

(注意：$n \geqq 2$ に対して，$\dfrac{n(n-1)(3n^2+17n+26)}{24}$ は自然数である。)

その例をいくつかあげると次になる。

$$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$$
$$1^2+9^2+26^2=2^2+3^2+4^2+27^2$$
$$1^2+14^2+71^2=2^2+3^2+4^2+5^2+72^2$$
$$1^2+20^2+155^2=2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+156^2$$
$$1^2+27^2+295^2=2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+296^2$$

3.3 $(m, n+1)$ 型 $(3 \leqq m \leqq n-2)$

後で考察するように，$(3(n+1)-2)$ はより一般化できるが，ここではまず，$(3(n+1)-1)$ のパターンを拡張することを $(4, n+1)$ (ただし，$n \geqq 5$) 型について試みてみる。

即ち，

$$(n+1)+(n+2)+x+y=1+2+\cdots+n+z \qquad (20)$$
$$(n+1)^2+(n+2)^2+x^2+y^2=1^2+2^2+\cdots+n^2+z^2 \qquad (21)$$

を考える。これから 3.1 と同様の考察を行うと

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\left(\frac{(n+1)(n-4)}{2}\right)^2+\left(\frac{n(3n^3-22n^2+21n+142)}{24}+4\right)^2$$
$$=1^2+2^2+\cdots+n^2+\left(\frac{n(3n^3-22n^2+21n+142)}{24}+5\right)^2 \qquad (4(n+1)-1)$$

を得ることができる。このとき，$n \geqq 5$ に対して，$\dfrac{(n+1)(n-4)}{2}$ と $\dfrac{n(3n^3-22n^2+21n+142)}{24}$ は自然数であるが，$n=5, 6, 7$ に対して，$(4(n+1)-1)$ は次のようになっている。

$n=5$ のとき $\quad 6^2+7^2+3^2+19^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+20^2 \qquad$ (i)

$n=6$ のとき $\quad 7^2+8^2+7^2+35^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+36^2 \qquad$ (ii)

$n=7$ のとき $\quad 8^2+9^2+12^2+74^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+75^2 \qquad$ (iii)

従って，(i) は非自明な解ではないし，(ii) は面白い解とはいえない。特に，$(4,6)$ 型の非自明な解がここには出てこない。

そこで，$(3(n+1)-2)$ の一般化を考え，$(e-17)$ と同様の式を求めてみた。

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を変数に対して，

$$\begin{aligned} & s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad u_n = \sum_{i<j} x_i x_j \\ & v_{k,n} = s_{k+n} - 2s_k + 1 \\ & w_{k,n} = s_{k+n} - 2s_k + 3t_k + 4u_k + u_{k+n} - 2s_{k+n}s_k \end{aligned} \tag{22}$$

とおく。ただし，$1 \leqq k \leqq n$ とする。

このとき，次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} s_k + v_{k,n} + w_{k,n} &= (s_{n+k} - s_k) + (w_{k,n} + 1) \\ t_k + v_{k,n}^2 + w_{k,n}^2 &= (t_{n+k} - t_k) + (w_{k,n} + 1)^2 \end{aligned}$$

ここで，$x_i = i\ (1 \leqq i \leqq n)$ とおくと，次の $(k+2, n+1)$ 型の解（パターン）を得る。

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + a_{k,n}^2 + b_{k,n}^2 \\ & \qquad = (k+1)^2 + (k+2)^2 + \cdots + (k+n)^2 + (b_{k,n}+1)^2 \end{aligned} \tag{(k+2)(n+1)-1}$$

ただし，

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= \frac{1}{2}(n^2 + 2kn + n - k^2 - k + 2) \\ b_{k,n} &= \frac{1}{24}(3n^4 + 12kn^3 + 2n^3 + 6k^2n^2 - 6kn^2 + 9n^2 \\ &\qquad -12k^3n - 30k^2n + 6kn + 10n + 3k^4 + 10k^3 - 3k^2 - 10k) \end{aligned}$$

具体的に $1 \leqq k \leqq 4$ について $((k+2)(n+1)-1)$ を計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned} & 1^2 + \left(\frac{n(n+3)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(3n^2+17n+26)}{24}\right)^2 \\ & \quad = 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 + \left(\frac{n(n-1)(3n^2+17n+26)}{24} + 1\right)^2 \end{aligned} \tag{3(n+1)-3}$$

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + \left(\frac{n^2+5n-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3n^4+26n^3+21n^2-194n+96}{24}\right)^2 \\ & \quad = 3^2 + 4^2 + \cdots + (n+2)^2 + \left(\frac{3n^4+26n^3+21n^2-194n+96}{24} + 1\right)^2 \end{aligned} \tag{4(n+1)-2}$$

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \left(\frac{n^2+7n-10}{2}\right)^2 + \left(\frac{3n^4+38n^3+45n^2-566n+456}{24}\right)^2 \\ & \quad = 4^2 + 5^2 + \cdots + (n+3)^2 + \left(\frac{3n^4+38n^3+45n^2-566n+456}{24} + 1\right)^2 \end{aligned} \tag{5(n+1)-1}$$

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \left(\frac{n^2+9n-18}{2}\right)^2 + \left(\frac{(n-3)(3n^3+59n^2+258n-440)}{24}\right)^2 \\ & \quad = 5^2 + 6^2 + \cdots + (n+4)^2 + \left(\frac{(n-3)(3n^3+59n^2+258n-440)}{24} + 1\right)^2 \end{aligned} \tag{6(n+1)-1}$$

ところで，$((k+2)(n+1)-1)$ は k, n を与えたときの解 $(k+2, n+1)$ 型の1組の解を与えている。ここで，この解を含む1組のパターンを与えておく。

(22) において，$x_i = \ell + (i-1)$ (ℓ : 自然数, $1 \leqq i \leqq n$) とおくと，次の $(k+2, n+1)$ 型のパターンを得る。

$$\ell^2 + (\ell+1)^2 + \cdots + (\ell+k-1)^2 + a_{k,n,\ell}^2 + b_{k,n,\ell}^2$$
$$= (\ell+k)^2 + (\ell+k+1)^2 + \cdots + (\ell+k+n-1)^2 + (b_{k,n,\ell}+1)^2 \qquad ((k+2)(n+1)-2)$$

ただし，

$$a_{k,n,\ell} = \frac{1}{2}(n^2 + 2kn + 2\ell n - n - 2k\ell - k^2 + k + 2)$$

$$\begin{aligned} b_{k,n,\ell} = \frac{1}{24}(&3n^4 + 12kn^3 + 12\ell n^3 - 10n^3 + 12\ell^2 n^2 + 12k\ell n^2 \\ &-24\ell n^2 + 6k^2n^2 - 18kn^2 + 21n^2 - 24k\ell^2 n - 12\ell^2 n \\ &-36k^2\ell n + 36\ell n - 12k^3 n + 6k^2 n + 30kn - 14n + 12k^2\ell^2 \\ &+12k\ell^2 + 12k^3\ell - 36k\ell + 3k^4 - 2k^3 - 15k^2 + 14k) \end{aligned}$$

$((k+2)(n+1)-2)$ は大変複雑な等式であるが，ここで示したように (22) において，x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ に適当な数や数列などを当てはめることにより，$(k+2, n+1)$ 型の解やパターンを構成することができる。

4. n 乗和に関する小さな公式

和と平方和を考察していく中で，和と三乗和，和と四乗和などへも考察の対象が移っていったので，そこで得られた結果を最後に示すこととする。

ここにおける小さな公式を見いだすきっかけとなったのは，次の2つである。

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 を二組に分けて，和も平方和も等しくする。

(2) (1) に関連して再発見した次のオイラーの公式 (1751)

$$(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2$$

パターン化の可能性を探り，三乗和などの数値実験，文字式での実験などを通して，以下に述べる一般的な結果を得た。

変数 $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ の集合を $M = \{x_0, x_1, x_2, \cdots x_n\}$ とする。

さらに，整数 k $(0 \leqq k \leqq n+1)$ に対して，k 個の要素からなる集合 M の部分集合の全体を M_k で表す。即ち，

$$M_k = \{X \mid X \subseteq M, |X| = k\} \qquad M_0 = \phi \qquad M_{n+1} = M$$

ここで，$|Y|$ は集合 Y の要素の個数を表す。

定理

$$\sum_{k:odd} \sum_{X \in M_k} \Big(\sum_{x \in X} x\Big)^m = \sum_{k:even} \sum_{X \in M_k} \Big(\sum_{x \in X} x\Big)^m \quad (1 \leqq m \leqq n)$$

≪ **証明** ≫ $S(M) = \{\sigma \mid \sigma : M \longrightarrow M : bijection\}$ とすると，$S(M)$ の任意の要素 σ (即ち，M の任意の置換) と $1 \leqq k \leqq n+1$ である自然数 k に対して，$\sigma(M_k) = M_k$ である。

このことは，$\displaystyle\sum_{X \in M_k} \Big(\sum_{x \in X} x\Big)^m$ が $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ の対称式であることを示している。

従って，${x_0}^{i_0}{x_1}^{i_1} \cdots {x_{n-1}}^{i_{n-1}}$ $(i_0 + i_1 + \cdots + i_{n-1} = m)$ の各係数が定理の左辺と右辺

で等しいことを示せば十分である。

（注意：各項m次式であるので，$x_0x_1x_2 \cdots x_m$の項は生じない。）

また，対称式であることを考慮に入れると

$$x_0{}^{i_0}x_1{}^{i_1} \cdots x_{t-1}{}^{i_{t-1}}\ (i_0 \geqq i_1 \geqq \cdots i_{t-1} \geqq 1 \quad i_0+i_1+\cdots+i_{t-1}=m \quad 1 \leqq t \leqq m \leqq n)$$

について調べればよい。（以下，これを仮定しておく。）

一方，$x_0{}^{i_0}x_1{}^{i_1} \cdots x_{t-1}{}^{i_{t-1}}$が現れるのは，$k$が$t \leqq k \leqq n+1$のときの$\displaystyle\sum_{X \in M_k}\Big(\sum_{x \in X} x\Big)^m$においてである。しかも，

$$\begin{aligned}&(x_0+x_1+\cdots x_{t-1}+\cdots x_{k-1})^m\\ &=(x_0+x_1+\cdots x_{t-1})^m+{}_mC_1(x_0+x_1+\cdots x_{t-1})^{m-1}(x_t+\cdots x_{k-1})+\cdots\end{aligned}$$

であるから，$x_0{}^{i_0}x_1{}^{i_1} \cdots x_{t-1}{}^{i_{t-1}}$は$(x_0+x_1+\cdots x_{t-1})^m$の部分で現れる。

従って，定理の左辺と右辺において，$x_0, x_1, x_2, \cdots x_{t-1}$を含む項の個数が一致することを示せばよいことになる。

今，$t \leqq k \leqq n+1$としておく。

このとき，M_kにおいて，$\{x_0, x_1, x_2, \cdots x_{t-1}\}$を含む$M$の部分集合の個数は

$${}_{n+1-t}C_{k-t}$$

である。

k	t	$t+1$	$\cdots$	$n+1$
${}_{n+1-t}C_{k-t}$	${}_{n+1-t}C_0$	${}_{n+1-t}C_1$	$\cdots$	${}_{n+1-t}C_{n+1-t}$

ところで，

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k(-1)^k$$

であるから，一般に

$$\sum_{k:odd}^{n}{}_nC_k=\sum_{k:even}^{n}{}_nC_k$$

が成り立つ。

よって，表より，定理の左辺と右辺において$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{t-1}$を含む項の個数が一致することが分かる。

以上により，定理が成り立つことが分かる。

(証明終)

その不思議さ (美しさ) を実感するために，いくつかを具体的に例示する。

(1) $n=2$のとき

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \qquad (\text{Euler}\ :1751)$$
$$a+b+c+(a+b+c)=(a+b)+(b+c)+(c+a)$$

(2) $n=3$のとき

$$a^3+b^3+c^3+d^3+(a+b+c)^3+(b+c+d)^3+(c+d+a)^3+(d+a+b)^3$$

$$= (a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (b+c)^3 + (b+d)^3 + (c+d)^3 + (a+b+c+d)^3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (a+b+c)^2 + (b+c+d)^2 + (c+d+a)^2 + (d+a+b)^2$$
$$= (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 + (b+c)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2 + (a+b+c+d)^2$$

$$a + b + c + d + (a+b+c) + (b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b)$$
$$= (a+b) + (a+c) + (a+d) + (b+c) + (b+d) + (c+d) + (a+b+c+d)$$

(3)　$n = 4$のとき

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + (a+b+c)^4 + (a+b+d)^4 + (a+b+e)^4 + (a+c+d)^4$$
$$+(a+c+e)^4 + (a+d+e)^4 + (b+c+d)^4 + (b+c+e)^4 + (b+d+e)^4 + (c+d+e)^4$$
$$+(a+b+c+d+e)^4$$
$$= (a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (a+e)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (b+e)^4 + (c+d)^4$$
$$+(c+e)^4 + (d+e)^4 + (a+b+c+d)^4 + (b+c+d+e)^4 + (c+d+e+a)^4 + (d+e+a+b)^4$$
$$+(e+a+b+c)^4$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + (a+b+c)^3 + (a+b+d)^3 + (a+b+e)^3 + (a+c+d)^3$$
$$+(a+c+e)^3 + (a+d+e)^3 + (b+c+d)^3 + (b+c+e)^3 + (b+d+e)^3 + (c+d+e)^3$$
$$+(a+b+c+d+e)^3$$
$$= (a+b)^3 + (a+c)^3 + (a+d)^3 + (a+e)^3 + (b+c)^3 + (b+d)^3 + (b+e)^3 + (c+d)^3$$
$$+(c+e)^3 + (d+e)^3 + (a+b+c+d)^3 + (b+c+d+e)^3 + (c+d+e+a)^3 + (d+e+a+b)^3$$
$$+(e+a+b+c)^3$$

$$a^2 + b^2 + c^3 + d^2 + e^2 + (a+b+c)^2 + (a+b+d)^2 + (a+b+e)^2 + (a+c+d)^2$$
$$+(a+c+e)^2 + (a+d+e)^2 + (b+c+d)^2 + (b+c+e)^2 + (b+d+e)^2 + (c+d+e)^2$$
$$+(a+b+c+d+e)^2$$
$$= (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 + (a+e)^2 + (b+c)^2 + (b+d)^2 + (b+e)^2 + (c+d)^2$$
$$+(c+e)^2 + (d+e)^2 + (a+b+c+d)^2 + (b+c+d+e)^2 + (c+d+e+a)^2 + (d+e+a+b)^2$$
$$+(e+a+b+c)^2$$

$$a + b + c + d + e + (a+b+c) + (a+b+d) + (a+b+e) + (a+c+d)$$
$$+(a+c+e) + (a+d+e) + (b+c+d) + (b+c+e) + (b+d+e) + (c+d+e)$$
$$+(a+b+c+d+e)$$
$$= (a+b) + (a+c) + (a+d) + (a+e) + (b+c) + (b+d) + (b+e) + (c+d)$$
$$+(c+e) + (d+e) + (a+b+c+d) + (b+c+d+e) + (c+d+e+a) + (d+e+a+b)$$
$$+(e+a+b+c)$$

このように，$(2^n - 1, 2^n)$型では，和と平方和だけでなく，n乗和までのすべてが等しくなるようにすることができる。

さらに，定理から連続整数に関する次の面白い(美しい？)関係が構成できる。

系　1から$2^{n+1} - 1$までの整数を二組に分けて，和，平方和，…，n乗和がすべて等しくなるようにできる。

≪ 証明 ≫　$M = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n\}$とおいて，定理を用いればよい。

具体的には，$1, 2, 2^2, \cdots, 2^n$から，奇数個を用いてできる整数を左辺に，偶数個用いてできる整数を右辺に置くとよい。二進法で考えると，1から$2^{n+1} - 1$までの整数が1回ずつ現れる。

(証明終)

いくつかを具体的に例示する。

(1) $1+2=3$

(2) $1+2+4+7=3+5+6 \qquad 1^2+2^2+4^2+7^2=3^2+5^2+6^2$

(3) $1+2+4+7+8+11+13+14=3+5+6+9+10+12+15$

$1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2=3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2$

$1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3=3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3$

(4) $1+2+4+7+8+11+13+14+16+19+21+22+25+26+28+31$

$=3+5+6+9+10+12+15+17+18+20+23+24+27+29+30$

$1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2+16^2+19^2+21^2+22^2+25^2+26^2+28^2+31^2$

$=3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2+17^2+18^2+20^2+23^2+24^2+27^2+29^2+30^2$

$1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3+16^3+19^2+21^3+22^3+25^3+26^3+28^3+31^3$

$=3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3+17^3+18^3+20^3+23^3+24^3+27^3+29^3+30^3$

$1^4+2^4+4^4+7^4+8^4+11^4+13^4+14^4+16^4+19^4+21^4+22^4+25^4+26^4+28^4+31^4$

$=3^4+5^4+6^4+9^4+10^4+12^4+15^4+17^4+18^4+20^4+23^4+24^4+27^4+29^4+30^4$

定理を利用して，連続する $2^{n+1}-1$ (奇数) 個の整数を二組に分けて，特に，和と平方和が等しくなるようにできた。これは，2.5 で構成したものとは本質が異なっている，即ち，m がメルセンヌ型の整数という特殊なタイプの場合の構成法である。

5. 終わりに

和と平方和が等しくなることは一見するととても不思議な感じがするが，方程式論の立場から見ると，本稿の場合，式の数が 2 個で未知数の数が 5 個以上であるので自然数解の存在はある意味では (*implicit* には) 当然のこととも感じられる。実際，本稿でも考察してきたように，多くの例を見いだし構成することができた。

一方，その具体的な解やパターンを (*explicit* に) 見いだすことは，そう単純ではない。そこに，本稿で考察してきたことの 1 つの意義をおくことができると考える。さらに，本稿で得られた成果としては，次などがある。

1) $(m\,,\,n)$ 型の非自明な解とパターンをある程度提示できたこと。
2) オイラーの表示の一般化 $(e-4\,,\,9\,,\,11\,,\,12)$ とその活用ができたこと。
3) オイラーの恒等式の拡張 $(e-6)$ 及び一般化 (n 乗和の公式) とその活用ができたこと。
   2) , 3) を通してオイラーの凄さの一端を改めて感じられたのも成果の 1 つである。
4) クンマーが理想数の導入で編み出したアイデア (デデキントのイデアル論へ繋がる考え) を活用できる場を提示できたこと。
5) $(e-8)$ や n 乗和に関する小さな公式など興味深い恒等式を得られたこと。
6) 本稿における成果は，Mathmatica などを活用した大量の数値実験とそれに基づいた帰納的・構成的な思考活動によって得られたものである。
   即ち，数学的活動のあり方の一端を例示できたこと。

本稿における成果は，発達段階に応じて (特に，中学校・高等学校において) 数の面白さや不思議さをまた文字式のよさなどを帰納的・構成的な数学的活動を通して味わうことのできる題材を提供していると考える。また，和と平方和の図的解釈としては，三平方の定理と対比してみると資料 3 に示したように，道のりの等しい道路の両側にトータルとして面積が等しい正方形の土地を配置することで表現することがで

きるので，和と平方和を考える面白い題材としての意味もある。今後は，その具体的な実践を通した検証が大きな課題として残っている。

附記

なお，本稿は平成12年度九州数学教育学会第1回研究発表会(平成12年11月11日)において発表したものを「教員養成GP」に関連して実施した現職教員研修での話題提供(平成18年7月22日)を機に大幅に修正並びに加筆したものである。

(2006年9月30日受理)

註および引用文献

1) L. E. Dikson, History of the theory of numbers, Chelsea P. C. 1966, *p.* 260.
2) 前掲 *p.* 261.
3) 前掲 *p.* 273.
4) 前掲 *p.* 279.
5) (3, 4)型の任意の二組の解を用いると，同様なことがいえるようであるが，ここでは深入りしない。
6) 1から12のまでの連続する12個の整数の中から，9個を用いて構成できる(4, 5)型の11個の解はすべて1から13のまでの連続する13個の整数の中から，10個を用いて構成できる(5, 5)型の次に示す11個の解から作られる$(55-1)$タイプの等式において，$n=0$とおくことで得ることができる。

1, 3, 8, 10, 11; 2, 4, 5, 9, 13	1, 3, 9, 10, 12; 2, 4, 5, 11, 13
1, 4, 5, 9, 12; 2, 3, 6, 7, 13	1, 4, 6, 9, 13; 2, 3, 5, 11, 12
1, 4, 8, 9, 11; 2, 5, 6, 7, 13	1, 5, 6, 11, 12; 2, 3, 8, 9, 13
1, 5, 8, 10, 11; 3, 4, 6, 9, 13	1, 5, 8, 10, 13; 2, 3, 9, 11, 12
1, 5, 9, 10, 12; 3, 4, 6, 11, 13	1, 7, 8, 9, 12; 3, 5, 6, 10, 13
1, 7, 8, 11, 12; 2, 5, 9, 10, 13	

7) $(e-9)$の異なる二組の非自明な解

$$a_1+a_2+a_3+a_4=3m \quad ; \qquad b_1+b_2+b_3+b_4=3k$$

を用いると，次の(4, 5)型の非自明なパターンを構成することができる。

$$\sum_{i=1}^{i=4}((2m-a_i)n+(2k-b_i))^2=\sum_{i=1}^{i=4}(a_in+b_i)^2+(2mn+2k)^2$$

資料1

(m − 1, m) 型と (m, m) 型のにおける解とのパターン構成の関係

$m > 2$ のとき

(m, m) 型の非自明な解

(m, m) 型の非自明なパターン

$(m-1, m)$ 型の非自明な解

$(m-1, m)$ 型の非自明なパターン

具体的な例

$(4, 4)$ 型の非自明な解

$$1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$$

$(4, 4)$ 型の非自明なパターン

$$(n+1)^2+(n+4)^2+(n+6)^2+(n+7)^2 = (n+2)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+8)^2$$

$$3^2+5^2+6^2=1^2+2^2+4^2+7^2$$

$3x+5y+6z=2x+4y+7z$
の一組の解 $(1, 2, 3)$

$$(3n+1)^2+(5n+2)^2+(6n+3)^2 = n^2+(2n+1)^2+(4n+2)^2+(7n+3)^2$$

$$4^2+7^2+9^2=1^2+3^2+6^2+10^2$$

$$n^2+(n+4)^2+(n+7)^2+(n+9)^2 = (n+1)^2+(n+3)^2+(n+6)^2+(n+10)^2$$

$$1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$$

ここでは，3, 5, 6; 1, 2, 4, 7 を含まない (3, 4) 型の非自明なパターンを構成したので元には戻らなかったが，後の (34−3) に見られるように 3, 5, 6; 1, 2, 4, 7 を含む (3, 4) 型の非自明なパターンも構成できる。

資料2

非自明な解 $4, 5; 1, 2, 6$ を含む $(2, 3)$ 型の非自明なパターン

ここでは，3つのタイプの求め方を示しておく。

(1) 都合のよいパターン(試行錯誤的)

$9, 10; 1, 6, 12$ も $(2, 3)$ 型の非自明な解である。しかも，次の関係が成り立っている。

$$4 \times 10 + 5 \times 9 = 1 \times 1 + 2 \times 6 + 6 \times 12$$

従って，直ちに次の等式を得る。

$$(10m + 4n)^2 + (9m + 5n)^2 = (m + n)^2 + (6m + 2n)^2 + (12m + 6n)^2$$

これから，$4, 5; 1, 2, 6$ を含む $(2, 3)$ 型の次の非自明なパターンを構成できる。

$$(10n - 6)^2 + (9n - 4)^2 = n^2 + (6n - 4)^2 + (12n - 6)^2$$

(2) 1を固定するパターン

n に関する等式

$$(an + 4)^2 + (bn + 5)^2 = 1^2 + (an + 2)^2 + (bn + 6)^2$$

を考えてみる。このとき，$b = 2a$ となることが分かる。

従って，$4, 5; 1, 2, 6$ を含む $(2, 3)$ 型の次の非自明なパターンを構成できる。

$$(n + 3)^2 + (2n + 3)^2 = 1^2 + (n + 1)^2 + (2n + 4)^2$$

(3) (1)の一般化

(1)を一般化して，次の関係式を満たすような解を探す。

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 + w^2 \qquad x + y = u + v + w \qquad 4x + 5y = u + 2v + 6w$$

このとき，

$$x = 4u + 3v - w \qquad y = -3u - 2v + 2w$$

となるから，最初の式に代入して次の等式を得る。

$$(6u + 3v - 2w)(2u + 2v - w) = 0$$

1) $w = 2u + 2v$ のとき

このとき，$x = 2u + v$, $y = u + 2v$ となるから，次の等式を得る。

$$((2u + v)n + 4)^2 + ((u + 2v)n + 5)^2 = (un + 1)^2 + (vn + 2)^2 + ((2u + 2v)n + 6)^2$$

ここで，$un + 1$ を m とそして $vn + 2$ を改めて n とおくと，等式

$$(2m + n)^2 + (m + 2n)^2 = m^2 + n^2 + (2m + 2n)^2$$

を得る。

2) $2w = 6u + 3v$ のとき

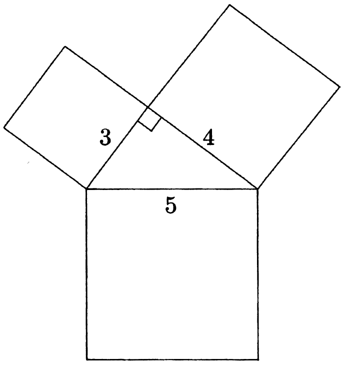
このときも同様にして考察していくと，次の等式を得る。

$$(m + 3n)^2 + (3m + 2n)^2 = m^2 + (2n)^2 + (3m + 3n)^2$$

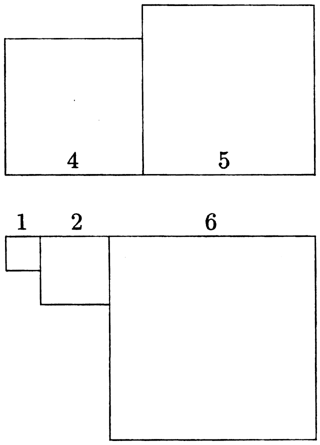
なお，これらの関係式は先の(1), (2)を含んでいる。

資料 3

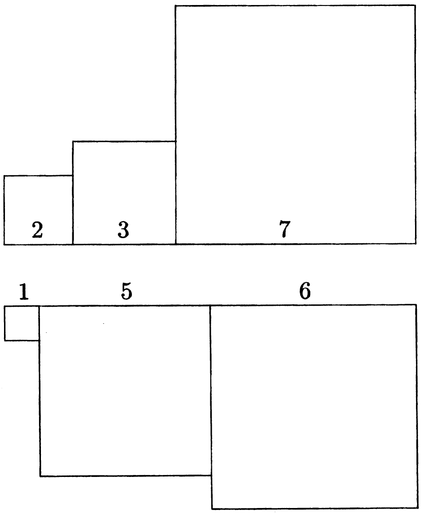
和と平方和の図的解釈



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$



$$4^2 + 5^2 = 1^2 + 2^2 + 6^2$$



$$2^2 + 3^2 + 7^2 = 1^2 + 5^2 + 6^2$$