



宮崎大学学術情報リポジトリ

University of Miyazaki Academic Repository

地盤・基礎・構造物系の地震時相互作用～解析法と耐震設計への導入～

|       |   |
|-------|---|
| メタデータ | 言語: ja<br>出版者:<br>公開日: 2023-12-13<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者: 原田, 隆典, 本橋, 英樹<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="http://hdl.handle.net/10458/0002000369">http://hdl.handle.net/10458/0002000369</a>               |

# 地盤・基礎・構造物系の地震時相互作用

## ～解析法と耐震設計への導入～

原田隆典・本橋英樹

2024年3月 Ver. 2

原田隆典（はらだ たかのり）

1952年 山口県生まれ

1980年 東京大学大学院工学研究科博士課程修了(土木工学専攻、工学博士)

2018年 宮崎大学名誉教授

本橋英樹（もとはし ひでき）

1973年 中国遼寧省生まれ(旧名：王宏沢（おう こうたく）)

2006年 宮崎大学大学院工学研究科博士後期課程修了(システム工学専攻、博士(工学))

2009年 帰化（日本名：本橋英樹）

2017年 ㈱IABC 地震・津波研究室取締役室長



## まえがき

著者の一人は、恩師久保慶三郎東京大学名誉教授(故)とまとめた『耐震設計における地盤と構造物の動的相互作用』(株)環境防災総合研究所報告書(1992年10月)第1章の最初と最後に先生の手書された以下のことが忘れられないで居る。

『一般に構造物は地上部分と地下部分、いわゆる上部構造と下部構造とに別けられるが、地盤面より下の部分の震害については大変調査しにくく、わずかに上部構造が沈下したり、傾斜したりすると、下部構造に震害が発生している危険性が高いと考える程度であった。しかし実際に地下部分を掘削して調査するとなると、莫大な経費が必要になるので、地下部分の震害データは極めて少ないのが現状である。以下2, 3の例で橋梁基礎の震害を述べる』。震害例の詳細は(浜田(2013))を参照するとよい。中略。『実際に杭または井筒の震害を詳細に調査していないことは最初に述べたとおりであるが、第1節で述べた震害事例は特殊なもので、一般には地盤内の構造物は、地盤が断層または液化等による大変形を生じない限り、極めて軽微な被害しか発生しないのではないかと思われる。日本道路協会は昭和55年に道路橋示方書を改定する時に、井筒、杭、ケーソン等に作用する地震荷重については、水平設計震度=0としてもよいことにした。この考え方は、土質工学、地震工学が近年かなり進歩してきたため、地盤の抵抗力の評価、地盤定数の決定が合理化され、それ以前に比して耐震安全性が高くなったと考えられる



ので、物部公式で述べた杭長に関する矛盾を解除するためである』。注釈：物部公式で述べた杭長に関する矛盾とは、「杭の地中部分には地震荷重(=杭の単位長さ当たりの質量×設計震度)を作用させるために、支持力が不足する場合、杭の長さを長くする必要があり、これにより、それだけ杭自身の地震荷重も増加することになり、工学的常識から判断して、不経済な杭長の基礎を設計することになっている」。

以上の久保慶三郎先生のご経験やその後の基礎の震害等(阪神・淡路大震災、熊本地震、東日本大震災)を見てきたことを総合すると、以下のように上部構造と下部構造の耐震設計に関する考え方は、まとめられると思う。

基礎は地中に埋設されるので、上部工と比較すれば基礎工の地震被害の発見は遅れる。このような考え方と共に、基礎工は地盤という材料特性や鉛直・水平方向の支持力特性が上部工の鉄筋コンクリートや鋼材に比べると圧倒的に不確実な材料に支持されるため、基礎工は地震時にも健全であるよう丈夫に設計するという考え方が広く受け入れられている。そして、基礎工の設計は、一般的には、上部工の設計とは独立に進められる。

有限要素法等の数値解析手法が手軽に使えるようになり、地盤・基礎・構造物系の全体解析ができる現代においても、上部工の材料構成則に比べると地盤や岩盤材料の構成則は不確実なため、全体系解析結果の信頼性は地盤や岩盤の構成則に依存して低い。これらの点を補うために実験も行われ、設計法が改善されてきている。しかし、1995年

兵庫県南部地震や2016年熊本地震の断層近傍では、最新の耐震設計法による構造物の基礎工や上部工への被害が生じている。

設計荷重以上の荷重(静的や動的)を構造物に作用させて損傷がどのように進行するかを調べるストレステストも実施されるようになってきているが、大抵は基礎固定とした上部構造物を対象にしており、地盤・基礎・上部構造物全体系のストレステストの事例はない。その原因は、地盤・基礎・上部構造物全体系の適切な非線形モデルが無いことにある。

適切な非線形モデルの開発に当たって、次の2つの考え方があると思われる。

- (1) 地盤・基礎は等価線形化モデル程度(局部的浮き上がりや剥離を許容し履歴減衰と地下逸散減衰を考慮する)とし、上部構造物は免震装置や部材の非線形性を考慮したモデル化とする。このモデルによる全体系の終局安全性の最適配分をする。
- (2) 基礎の浮き上がりや地盤の局部的損傷と共に杭基礎や深礎杭の損傷を考慮した非線形モデルとし、上部構造物は(1)と同じ非線形モデルとし、全体系の終局安全性の最適配分をする。

本書では、(1)の考え方の基礎的事項を解説する。すなわち、基礎本体への損傷はないが、基礎周辺地盤の局部的剥離を許容し、この基礎周辺地盤の履歴減衰と基礎の振動

エネルギーの地下逸散減衰を考慮し、上部構造物の免震装置や履歴減衰を考慮した非線形モデルにより、ストレステスト等によって全体系の終局安全性の最適配分をする。

本書の内容の中で第一著者の提案した『有効入力地震動』と『複素ばね係数』の考え方は、大型実験や有限要素法等でも検証され、本州四国連絡橋の耐震設計に採用されている。この方法で設計された世界最長の明石海峡大橋が 1995 年兵庫県南部地震に耐えたことは、実検証の 1 つとして挙げられる。

久保慶三郎東京大学名誉教授(故)が書いておられるように『本書の内容は、もっぱら有限要素法の解を拠りどころとしている。今後の課題としては、本書の内容や手法を広く実設計に適用するためには、実験的検証を伴った理論武装の確立が望まれる。精度の高い精密な実験結果も経費面、動員する研究組織面から、かなり実行困難な面もあるので、有限要素法の解析結果を利用しなければならないが、この方法も非線形挙動の解析となると、全てがオーソライズされているわけでもなく課題が多い。このように考えると、この研究の深度化のためには、官学民合同の大きい研究組織の設置が第一義的に必要になると思われる』。

以上のように 20 世紀最後の頃には、地盤・基礎・構造物の地震時相互作用の研究の急速な進展があったにもかかわらず、21 世紀になってからは、制震・免震装置の開発により、極端ではあるが、下部構造の影響は集約線形ばね程度の簡単なモデルにして、上部構造物の非線形解析から耐震安全性を論じているので過大設計傾向である。本書の

内容を適用して、動的相互作用(基礎周辺地盤の履歴減衰と基礎の振動エネルギーの地下逸散減衰のため応答はかなり低減される)を考慮し、上部構造物の免震装置や履歴減衰を考慮した非線形モデルにより、ストレステスト等によって全体系の終局安全性の最適配分を考えた正道の耐震安全性の議論が復活することを念願してやまない。

動的相互作用の研究は、研究者として最初に取り組んだ弾性波動理論を用いた課題である。その後は、弾性波動理論と近代地震学の成果である運動学的断層モデルを組み合わせた断層から地表面の永久変位を含む地震動の合成法に取り組んだ。その理由は、本州四国連絡橋や東京湾横断道路橋の耐震設計が終わり、第2国道軸構想では、更に断層に近い場所に長大橋等を建設するので、断層近傍の地震動予測が重要となるからである。また、既存の重要橋梁も断層近傍に位置しているが、これらの耐震安全性も断層近傍の地震動予測技術が未熟なために放置されてきたからでもある。更に、ライフライン等の線状施設の地震時安全性も地震動の空間的変動量の予測が必要であり、この地震動予測も震源断層からの地震動予測法で解決できるからでもある。これらの理論と応用を以下の6つの専門書にまとめた。

- (1) 入門・弾性波動理論 (株)現代図書 2017年12月～震源断層・多層弾性体の地震動や地盤振動問への応用～原田隆典・本橋英樹著、11000円(税込) B5ハードカバーカラー刷り、ISBN978-4-434-23955-7.
- (2) 入門・数理地震工学 (株)技報堂出版) 2020年4月～生産・社会インフラ施設の地震・津波対策の基礎知識と数学的方法～原田隆典・本橋英樹著、3850円(税込) B5版白黒刷り、ISBN978-4-7655-1869-7.

- (3) フーリエ変換と応用 (株)現代図書 2021年9月～地震動・ランダム波動場の解析と数値計算法～原田隆典・本橋英樹著、3850円(税込) A5版白黒刷りハードカバー278頁、ISBN978-4-434-29356-6.
- (4) 土木環境数学 I (株)現代図書 2021年10月～1変数と多変数の初等関数の微分と積分～原田隆典・本橋英樹著、2200円(税込) B5版白黒刷りソフトカバー119頁、ISBN978-4-434-29467-9.
- (5) 土木環境数学 II (株)現代図書 2021年10月～時間と振動数・波数領域による定数係数の微分方程式波動方程式の解法～原田隆典・本橋英樹著、2750円(税込) B5版白黒刷りソフトカバー164頁、ISBN978-4-434-29468-6,
- (6) 差分法の基礎と応用～地震動・波動場や弾性振動解析～原田隆典・本橋英樹著、宮崎大学学術情報リポジトリ、<http://hdl.handle.net/10458/00010427>.

本書の引用では、以下の宮崎大学学術情報リポジトリをお使いください。

原田隆典・本橋英樹(2023): 地盤・基礎・構造物系の地震時相互作用～解析法と耐震設計への導入～, 宮崎大学学術情報リポジトリ,  
<http://hdl.handle.net/10458/0002000369>.

# 目次

|  |    |
|--|----|
| まえがき                                       | 3  |
| 1章 地震時相互作用の概要                              | 12 |
| 1.1 地震時相互作用の効果                             | 12 |
| 1.2 線形系の地震時相互作用の物理的解釈<br>(接触面型(境界法, 切欠き型)) | 14 |
| (1) 接触面型による線形系の地震時相互作用の物理的解釈               | 15 |
| (2) 非線形モデル(近似モデル)の概要                       | 18 |
| 1.3 有効入力地震動                                | 19 |
| 1.4 複素ばね係数の概要                              | 20 |
| (1) 弾性波動理論による剛体円盤基礎の複素ばね係数の概要              | 20 |
| (2) 地盤反力係数と弾性波動理論による剛体円盤基礎のばね係数            | 24 |
| 1.5 地震時相互作用と応答スペクトルの概要                     | 27 |
| 2章 地震時相互作用の簡単な歴史と定式化                       | 30 |
| 2.1 簡単な研究歴史                                | 31 |
| 2.1 補助記事1 連続体系による定式化                       | 33 |
| (1) 基礎式                                    | 33 |
| (2) 有効入力地震動と複素地盤ばね係数                       | 36 |
| (3) ドライビング力と複素地盤ばね係数                       | 39 |
| 2.1 補助記事2 入射SH波を受ける半円中剛体基礎の解析解             | 41 |
| 2.2 境界法(切欠き型)による定式化                        | 49 |
| (1) 一般的定式化                                 | 49 |
| (2) 自然地盤を用いた有効入力地震動と複素ばね剛性行列               | 53 |
| 2.3 容積法による定式化                              | 58 |
| 3章 剛体基礎                                    | 62 |
| 3.1 質点系と剛体の並進・回転の連成運動方程式                   | 63 |
| 3.1 補助記事1 剛体の並進・回転連成方程式の幾何学的関係             | 66 |
| 3.2 埋設基礎の複素ばねと有効入力地震動の具対例                  | 67 |
| (1) 有限要素法による切欠き型境界法の計算例                    | 67 |
| (2) 複素ばね係数の評価式                             | 73 |
| (3) 有効入力地震動の評価式                            | 80 |
| 3.3 複素ばね係数と付加質量                            | 81 |
| 3.3 補助記事1 流体中の円柱基礎の地震時運動方程式                | 84 |
| 3.4 地震時相互作用を考慮した等価1質点系モデル                  | 85 |
| (1) 直接基礎、杭基礎を含み基礎の質量が小さい場合                 | 91 |

|  |     |
|--|-----|
| (2) 埋設深 5m以上の深いケーソン基礎の場合 .....             | 93  |
| 3.5 有効入力地震動を考慮した応答スペクトル .....              | 96  |
| 3.6 Winkler ばねモデルの改良.....                  | 100 |
| 3.6 補助記事 1 円筒剛体基礎の複素ばね係数の導出 .....          | 105 |
| 4 章 杭基礎.....                               | 110 |
| 4.1 容積法による群杭・構造系の多質点運動方程式 .....            | 110 |
| (1) 定式化.....                               | 110 |
| (2) 半無限弾性体中の群杭の水平集約複素ばね係数の計算例.....         | 113 |
| (3) 半無限弾性体中の群杭の水平集約複素ばね係数の近似計算法 .....      | 115 |
| 4.1 補助記事 1 調和振動荷重による単杭の応答変位解の導出.....       | 123 |
| 4.1 補助記事 2 調和振動荷重の杭 1 による杭 2 の応答変位解.....   | 127 |
| 4.2 群杭の単杭への集約化 .....                       | 130 |
| (1) 定式化.....                               | 130 |
| (2) 集約化の精度.....                            | 132 |
| 4.3 単杭・上部構造系の多質点運動方程式.....                 | 134 |
| (1) モデル化の概要 .....                          | 134 |
| (2) 容積法による改良型 Winkler ばねモデルの多質点運動方程式 ..... | 135 |
| 4.4 静的設計に用いる群杭の集約ばね係数.....                 | 140 |
| 5 章 地盤の非線形ばねモデル.....                       | 143 |
| 5.1 非線形地盤ばね係数モデル .....                     | 143 |
| (1) 特徴 .....                               | 143 |
| (2) 非線形地盤ばね係数モデル .....                     | 144 |
| 5.1 補助記事 1 ジョイント要素との関係.....                | 148 |
| (3) 直接基礎の非線形集約回転ばねと実験結果との定性的比較.....        | 149 |
| 5.2 提案モデルによる長大橋の解析例.....                   | 153 |
| (1) 長大橋モデルおよび解析方法 .....                    | 153 |
| (2) 解析結果 .....                             | 155 |
| 5.3 杭基礎を有する高炉ガスホルダー試算例.....                | 159 |
| (1) 高炉ガスホルダーの概要.....                       | 159 |
| (2) BFG ホルダーのモデル化 .....                    | 160 |
| (3) 地盤と基礎の非線形相互作用の影響 .....                 | 162 |
| 5.4 大型ボックスカルバート道路高架橋の試算例.....              | 166 |
| (1) 解析用の橋梁概要.....                          | 166 |
| (2) 対象橋梁のモデル化の概要 .....                     | 167 |
| (3) 隣接ボックス間の衝突モデル .....                    | 169 |
| (4) 地盤の応力レベルの Winkler ばねモデル .....          | 171 |

|  |     |
|--|-----|
| (5) 地盤の応力レベルの Winkler ばねモデルの FEM による検証 ..... | 174 |
| 6 章 有限要素法による 3 次元地盤・基礎・構造物系の解析 .....         | 186 |
| 6.1 地盤・基礎系の等価線形化レベルの 3 次元有限要素法 .....         | 187 |
| (1) 震源断層・不整形地盤系の地震動 .....                    | 188 |
| 6.2 地盤・基礎・構造物系の非線形 3 次元有限要素法 .....           | 193 |
| (1) OpenSees の概要 .....                       | 193 |
| (2) 地盤・群杭・橋梁系の地震応答解析例 .....                  | 194 |
| 参考文献 .....                                   | 201 |



# 1 章 地震時相互作用の概要

地盤と基礎と構造物全体系の地震応答と、基礎固定の構造物だけの地震応答の違いを地震時相互作用の影響(効果)と呼ぶ。ここでは、簡単のため2次元有限要素法による全体系の地震応答と基礎固定の地震応答の違いを定量的に示す。その数値計算結果から、基礎固定の構造物の地震応答に比べると、地震時相互作用を考慮すると、地震応答の最大値が約半分に低減したことを示す。また、地震時相互作用の物理的解釈から、地盤・基礎系が線形系の場合の地震時相互作用は、『有効入力地震動』と『複素ばね係数』の2つの物理量を取り入れた基礎・構造物系だけの質点・ばね系モデルで考慮できることを示す。さらに、この2つの物理量の解釈を拡張した地震時非線形相互作用モデルの概要を説明する。

『有効入力地震動』と『複素ばね係数』の2つの物理量の概要を示し、実務で多用される『地盤反力係数』と弾性体モデルの『複素ばね係数』の関係を示す。

## 1.1 地震時相互作用の効果

地盤・基礎・構造物系の地震時相互作用の上部構造物への影響は、基礎を固定した基礎・構造物の地震応答を地盤・基礎・構造物系の地震応答との比較から求められる。こ

ここでは、その比較例として有限要素法による数値解析結果(原田ら(1990))を図 1.1-1 に示す。

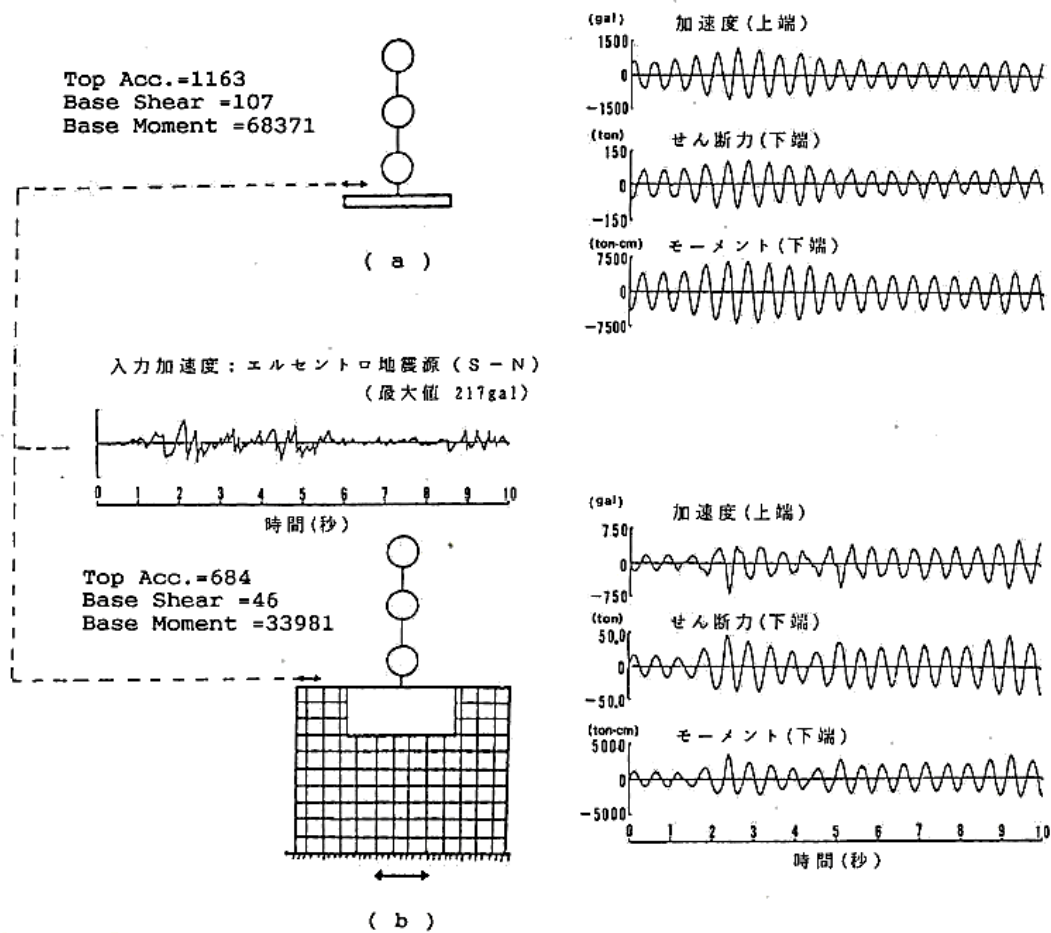


図 1.1-1 基礎固定モデル(a)と地盤・基礎・構造物全体系モデル(b)の地震応答の比較

図 1.1-1(a)は、基礎固定の上部 3 質点のせん断振動モデルに固定基礎から地表面の地震動加速度波形を入力し、上端の加速度応答波形や下端のせん断力とモーメント力の応答波形を示す。一方、図 1.1-1(b)は、基礎・地盤系を加えた全体系の地震応答を 2 次元有限要素法(境界には波動の反射を取り除くために伝達境界を用いている)で解析した

結果を示す。基礎より十分離れた地表面地震動は両モデルで等しいので、両モデルの応答の差が、地盤・基礎系が上部構造物の応答へ影響した量(効果)である。

図 1.1-1(a)(b)には、応答波形とともにそれらの最大値も示している。図 1.1-1(a)(b)の比較から、地震時相互作用の効果として、以下の 2 点を読み取ることができる。

- (1) 地震応答の最大値で約 1/2 に減少すること
- (2) 応答波形の様子も異なること

## 1.2 線形系の地震時相互作用の物理的解釈 (接触面型(境界法, 切欠き型))

前節の全体系モデルと基礎固定モデルの比較からわかった地震時相互作用の効果について、ここでは、簡単に研究の歴史とその物理的解釈を述べる。

地盤と基礎の地震時相互作用の研究は、線形系において 1970 年代に研究が完成した。FEM による地盤・基礎・構造物の全体解析においては、計算機容量の制限から、要素サイズを粗くする必要があり、微小要素分割での詳細解析とパラメータ解析による多数の計算回数を必要とする実務への適用のハードルは高かった。そのため、地盤と基礎を分割して解く部分解析法(動的サブストラクチャー法)が開発された。この解析法は、地盤と基礎の接触面を分割する接触面型(境界法、または切欠き型)と、地盤のみの解析と、基礎の根入れ部地盤物性値だけ低減した基礎部の解析を足し合わせる接触体型(容積

法)の2つの方法がある。詳細な定式化等は、2章以下に示す(土木学会(1989), 建築学会(1996))。

ここでは、接触面型の物理的考察を記述する。その拡張として、近似的な非線形動的相互作用モデルを導入し、応力レベルの Winkler モデルを説明する。

### (1) 接触面型による線形系の地震時相互作用の物理的解釈

ここでは、簡単化のために上部構造物の無い地盤・基礎系を取り上げて、地震時相互作用の物理的解釈を述べる。構造物も含めた厳密な定式化は2章以降に記述する。

自然地盤の地震動と地盤・基礎系での基礎の地震動が違う現象を地盤と基礎の地震時相互作用と呼ぶ。地盤と基礎のみの地震動観測記録は滅多にないが、構造物の影響を取り除いても、自然地盤と基礎の地震動は違う。この地盤と基礎と地震時相互作用の物理的解釈を以下に説明する。

地震時の自然地盤の運動変位を図 1.2-1 に示す  $u_A$  とする。この自然地盤の運動による『無質量基礎』の運動変位は、基礎の剛性のみの影響を受けるので(基礎は無質量なので慣性力は零)、自然地盤の運動変位とは違う。無質量基礎の運動変位を図 1.2-1 に示す  $u_K$  (有効入力地震動変位)とする。

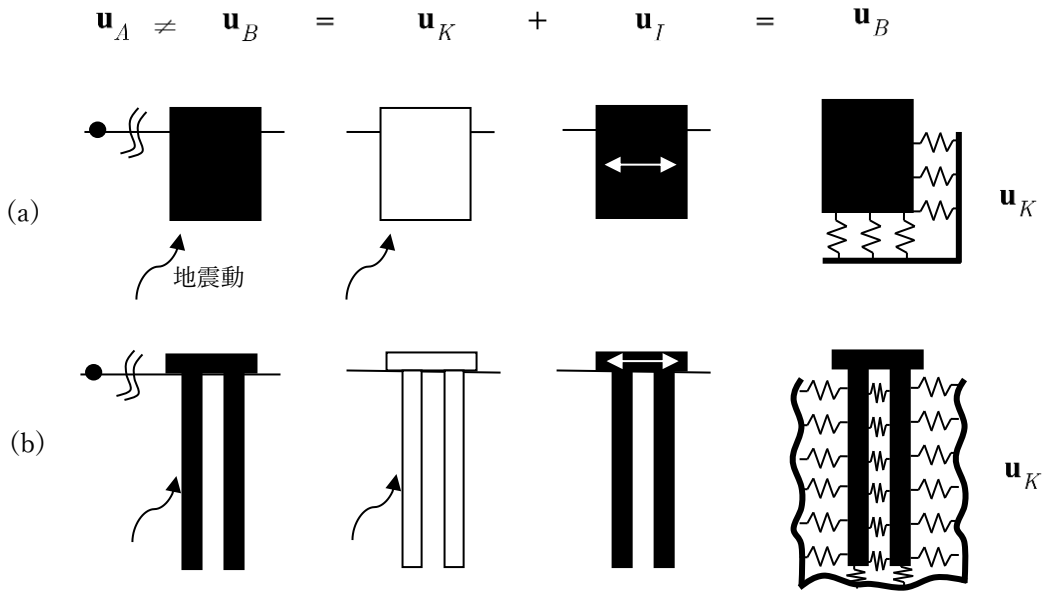


図 1.2-1 剛体基礎および杭基礎における地震時相互作用の解析モデル  
 ((a)剛体基礎、(b)杭基礎)

慣性力による付加的運動変位を  $\mathbf{u}_I$  とすると、基礎の運動変位  $\mathbf{u}_B$  は、次式で表される。

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_K + \mathbf{u}_I \quad (1.2-1)$$

上式の地震時基礎の運動変位を、無質量基礎の地震時運動変位と、地震動の無い地盤の基礎(質量有)に外力を作用させた時の基礎の運動変位の2つの和として記述する方法は、地震時の地盤と基礎の動的相互作用を基礎入力地震動相互作用(キネマティック相互作用)と慣性力相互作用(イナーシャル相互作用)に分割する方法である。

ここで、基礎変位に比例する線形地盤ばね係数(複素ばね係数、複素剛性)  $\mathbf{K}$  と、基礎質量  $\mathbf{M}_F$  と剛性  $\mathbf{K}_F$  を導入すると、慣性力と基礎剛性による復元力と地盤反力のつり合い式より、次式のように書ける。

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_B + \mathbf{K}_F \mathbf{u}_I + \mathbf{K} \mathbf{u}_I = 0 \quad (1.2-2)$$

この式に式(1.2-1)を代入すると、次式が得られる。

$$\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_I + (\mathbf{K}_F + \mathbf{K}) \mathbf{u}_I = -\mathbf{M}_F \ddot{\mathbf{u}}_K \quad (1.2-3)$$

剛体基礎では、基礎剛性による復元力はないので、上式で  $\mathbf{K}_F \mathbf{u}_I = \mathbf{0}$  となる。

式(1.2-3)の運動方程式によると、基礎質量と剛性の他に、地盤の複素剛性  $\mathbf{K}$  と有効入力地震動変位  $\mathbf{u}_K$  の2つの物理量が必要となる。有効入力地震動は、自然地盤の変位とは違う。図 1.2-1(b)のような杭基礎では、その違いは小さいので  $\mathbf{u}_K \simeq \mathbf{u}_A$  として、自然地盤の運動変位を使うことができる。

以上をまとめると、地盤と基礎の地震時相互作用を考慮するためには、

(a) 無質量基礎(剛性のみ)の地震応答として求められる有効入力地震動変位

$$\mathbf{u}_K$$

(b) 地震動の無い状態で基礎に荷重を作用させた時の地盤反力と基礎の変位の関係か

ら求められる複素ばね係数  $\mathbf{K}$

の2つの物理量を用いた運動方程式(1.2-3)を解くことと等価である。

このことが定式化される以前(1970年代後半)までは、杭基礎に代表される Penzien モデル(1964)のように地盤ばねに支持された杭基礎モデルに自然地盤の地震動を作用させるモデルが主流であった。また、自然地盤の地震動に代わり地盤ばねの支持点に質量を考慮した入力地震動の改良モデル等が提案されてきたが、支持点に付加する質量をどのような基準で決めるか等は曖昧であった。

## (2) 非線形モデル(近似モデル)の概要

地震動が大きくなると、基礎の運動も大きくなる。この場合、土の応力・歪関係の非線形性を考慮した解析モデルが必要になる。強震時の自然地盤歪は大きくなるが、基礎近傍地盤の歪は、慣性力による付加的運動変位のため、さらに大きな歪となる。このため、基礎根入れ上下端部の地盤に局所的剥離や降伏領域が発生する。この状況を模式的に示すと、図 1.2-2 のようになる。

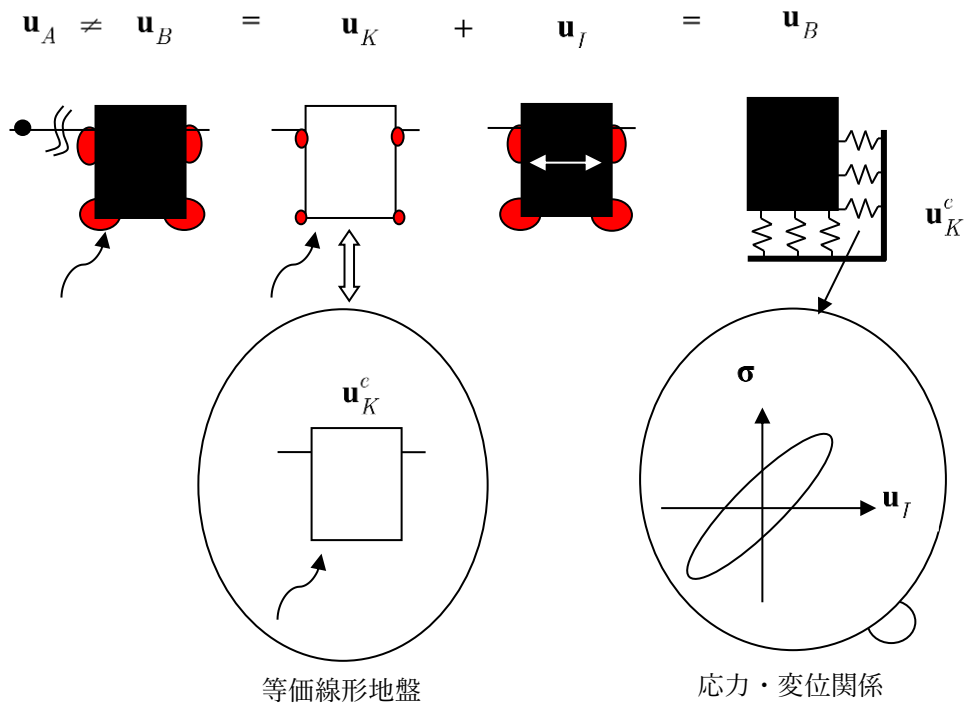


図 1.2-2 有効入力地震動と複素地盤ばね係数を拡張した非線形地震時相互作用モデルの概念図

一般に、重要構造物の基礎では、残留変位が生じないか、許容残留変位内になるように基礎を設計する。このことを考慮すると、図 1.2-2 の有効入力地震動と複素剛性のモデルを拡張した近似的非線形地震時相互作用モデルが使える。

無質量基礎は、地盤の運動変位に追従するので、局部的剥離や降伏域が基礎の寸法と地震動の主要な波長に比べて短い場合には、これらの影響は小さい。したがって、有効入力地震動は、局部的剥離や降伏域を無視して、自然地盤の地震時地盤歪レベルに対応する物性値を使った等価線形地盤から求められる。しかし、複素地盤ばね係数は、基礎近傍地盤の材料定数に大きく依存するので、局部的剥離や降伏域の影響を考慮して求める必要がある。このためのモデルとして、5 章に説明する応力レベルの Winkler モデルがある(原田ら(2007), 原田・本橋(2017), (2020))。

### 1.3 有効入力地震動

基礎の剛性に比べると地盤の剛性は小さいので、さざ波(波長の短い波)に対して大型船が揺れない現象と同様に、無質量基礎(剛性のみ)の地震応答として求められる有効入力地震動は、短周期地震動(基礎の代表長さに比べて短波長の地震動)では小さくなる。

図 1.3-1 は、直接基礎、剛体埋設基礎(ケーソン基礎)、杭基礎における有効入力地震動の高振動数低減特性の概略を示す。有効地震動の振動数依存性の詳細は、有限要素法等による数値解析から求められる。



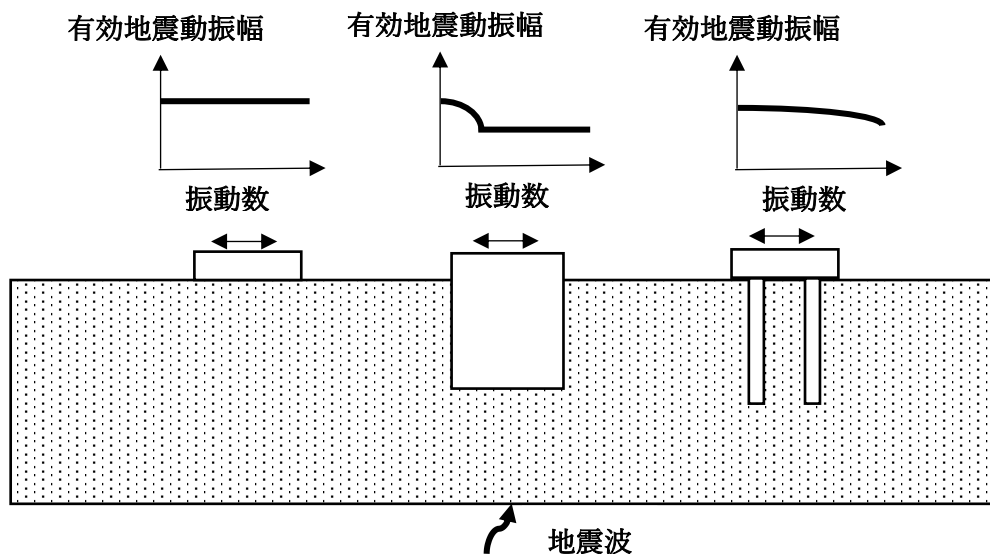


図 1.3-1 基礎質量零とし、基礎剛性のみ基礎の地震応答である直接基礎、剛体埋設基礎(ケーソン基礎)、杭基礎の有効入力地震動の高振動数低減特性の概略

## 1.4 複素ばね係数の概要

### (1) 弾性波動理論による剛体円盤基礎の複素ばね係数の概要

風や自動車・列車等による動的荷重が構造物に作用すると、構造物が振動し、その振動は基礎を通して地盤を振動させる。基礎や構造物を設計する技術者の感心事は、この地盤振動が周辺に与える影響が無いことや基礎・構造物を安全かつ安価に設計することである。理想的には、地盤・基礎・構造物系を有限要素法等で離散化して3次元全体系を数値解析すると、周辺地盤振動の影響までを再現できる。しかし、地盤は広いので離散化による要素数は基礎・構造物系に比べ膨大になる。

そこで、地盤の影響をばねと減衰器(ダッシュポット)を並列に設置したフォークトモデル(Voigt Model)に置き換え、この地盤のフォークトモデルを基礎に取り付けて基礎・構造物系応答を調べ設計する方法が採用される。他方、地盤振動の方は、地盤のフォークトモデルの動的反力を地盤のみの離散化モデルに作用させて地盤の振動伝達特性を把握することができる。一般に基礎を重くする程、地盤振動は小さくなる。

動的荷重を受ける地盤のフォークトモデルは、地盤を半無限弾性体とみなしその地表面に半径 $r_0$ の剛体直接基礎に、例えば、上下方向の調和振動荷重 $P_0 e^{i\omega t}$  ( $P_0$ :荷重の振幅、 $\omega$ :振動数、 $t$ :時間)を加えた時、剛体直接基礎の地盤からの反力分布を一定と仮定して剛体直接基礎中心点の上下変位 $w_0$ と調和振動荷重の関係を次式のように求めたReissner(1933)式から求められる。

$$w_0 = \frac{P_0 e^{i\omega t}}{Gr_0} (f_1 + if_2) \quad (1.4-1a)$$

ここに、 $G$ は半無限弾性体のせん断剛性を、また、変位関数 $f_1, f_2$ はポアソン比 $\nu$ と次式の無次元振動数の関数である。

$$a_0 = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\omega r_0}{C_s}, \quad C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (1.4-1b)$$

ここに、 $\rho, C_s$ は弾性体の密度とS波速度である。上式より複素ばね(基礎の単位変位に必要な力 $K = P_0 / w_0$ )を求めると、次式が得られる。

$$K = \frac{P_0}{w_0} = \frac{Gr_0}{f_1^2 + f_2^2} (f_1 - if_2) \quad (1.4-1c)$$

ここで、質量  $m$  とフオークトモデル(ばね係数  $k$  と減衰係数  $c$  のばねと減衰器の列配置モデル)の反力を持つ次式の線形 1 自由度の運動方程式との関係を考える。

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = P(t) \quad (1.4-1d)$$

調和振動荷重  $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$  とその応答  $w(t) = w_0 e^{i\omega t}$  とすれば、上式は次式のような振動数領域の運動方程式となる。

$$(-m\omega^2 + ic\omega + k)w_0 = (-m\omega^2 + K)w_0 = P_0 \quad (1.4-1e)$$

ここに、複素ばね係数  $K = k + ic\omega$  とすると、ばね係数  $k$  と減衰係数  $c$  は、次式で与えられる。

$$k = \frac{Gr_0}{f_1^2 + f_2^2} f_1, \quad c\omega = \frac{Gr_0}{f_1^2 + f_2^2} f_2 \quad (1.4-1f)$$

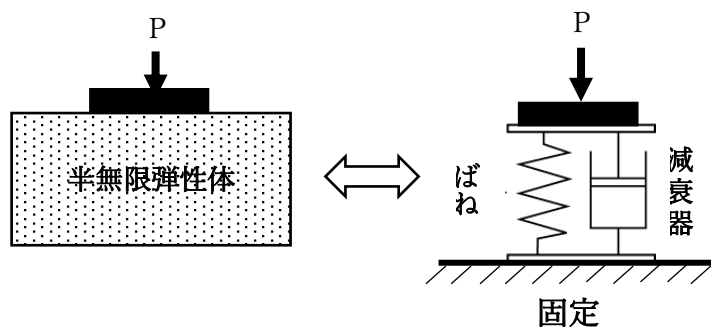


図 1.4-1 半無限弾性体上基礎の反力と等価複素ばね

表 1.4-1 半無限弾性体上の円形剛体直接基礎のばね係数と減衰係数

| 振動モード | ばね係数                                  | 減衰係数   |
|-------|---------------------------------------|--|
| 水平    | $k_x = \frac{32(1-\nu)Gr_0}{7-8\nu}$  | $c_x = 0.576k_x r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$                             |
| 回転    | $k_\theta = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$ | $c_\theta = \frac{0.3}{1+B_\theta} k_\theta r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ |
| 上下    | $k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu}$           | $c_z = 0.85k_z r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$                              |
| ねじれ   | $k_t = \frac{16Gr_0^3}{3}$            | $c_t = \frac{\sqrt{k_t I_t}}{1+2I_t / \rho r_0^5}$                     |

(注)  $\nu$ :地盤のポアソン比,  $G$ :地盤のせん断剛性係数,  $\rho$ :地盤の密度,

$r_0$ :基礎の半径,  $I_t$ :基礎の極質量慣性モーメント,  $I_0$ :基礎の基礎面回りの質量慣性モーメント,

$$B_\theta = \frac{3(1-\nu)I_0}{8\rho r_0^5}$$

以上のような Reissner(1933)による半無限弾性体上の剛体直接基礎の調和振動解とフォークトモデルの振動数領域解との比較により、半無限地盤の剛体直接基礎への反力は、上式のばね係数 $k$ と減衰係数 $c$ のフォークトモデルにモデル化できる。このことは、図 1.4-1 に示すように半無限地盤が複素ばねとしてモデル化できることを意味する。

Lysmer(1965)は、上式の変位関数 $f_1, f_2$ の代わりに次式の新しい変位関数 $F$ を導入すると、実質的にこの変位関数 $F_1, F_2$ がポアソン比に無関係な関数になることを見つけた。

$$F = \frac{4}{1-\nu} f = F_1 + iF_2 \quad (1.4-2a)$$

また、無次元振動数  $a_0$  の影響を調べ、直接剛体基礎の鉛直ばね係数と減衰係数が、次式のように  $0 \leq a_0 \leq 1.0$  では振動数に依存しない値で近似できることを見つけた。

$$k = \frac{4Gr_0}{1-\nu}, \quad c = 0.85kr_0\sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (1.4-2b)$$

表 1.4-1 には、半無限弾性体上の円形剛体直接基礎のばね係数と減衰係数の近似式を示す(土木学会(1989))。

## (2) 地盤反力係数と弾性波動理論による剛体円盤基礎のばね係数

設計では、直径  $0.3\text{m}(= 2r_0)$  の剛円盤に静的荷重  $P$  を加えてその変位  $\delta$  と荷重の関係から、次式の単位面積当たりのばね係数(地盤反力係数  $k_0$  :  $\text{kgf}/\text{m}^3$ )を使うことが多い。

$$k_0 = \frac{P}{\pi r_0^2 \delta} \quad (1.4-3a)$$

上式の地盤反力係数は、図 1.4-2 に示すように地盤反力分布が等分布であると仮定した ( $\sigma = P / \pi r_0^2$ ) 荷重と剛体円盤の変位の関係である。

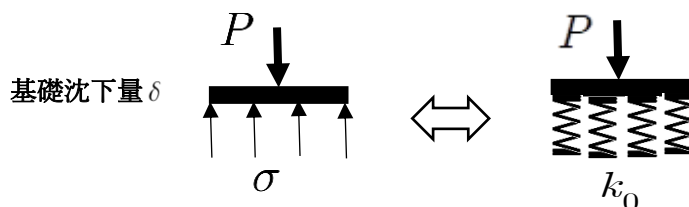


図 1.4-2 平板載荷の地盤反力分布の仮定と地盤反力係数

直径 0.3m 以上の剛体円盤 (=  $2r$ ) の地盤反力係数は、実験による経験式として次式が使われる。

$$k_{2r} = k_0 \left( \frac{2r}{0.3} \right)^{-3/4} \quad (1.4-3b)$$

地盤ばね係数 (kgf/m) は、次式のように荷重と基礎沈下量で定義される。

$$k = \frac{P}{\delta} \quad (1.4-3c)$$

したがって、地盤ばね係数と地盤反力係数には、次式の関係が成立する。

$$k = \pi r_0^2 k_0 \quad (1.4-4)$$

半無限弾性体上の剛体円盤基礎の上下方向の地盤ばね係数は、表 1.4-1 に示すように振動数に依存しない静的ばね係数で近似できる。

$$k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad (1.4-5)$$

上式の地盤ばね係数から式(1.4-4)の関係式を使い地盤反力係数を求めると、次式のように半無限弾性体上の剛体円盤基礎の上下方向の地盤反力係数が求められる。

$$k_{0z} = \frac{k_z}{\pi r_0^2} = \frac{4G}{\pi r_0(1-\nu)} \quad (1.4-6a)$$

任意の直径  $2r$  の剛体円盤の地盤反力係数は、次式で与えられる。

$$k_{2rz} = \frac{k_z}{\pi r^2} = \frac{4G}{\pi r(1-\nu)} \quad (1.4-6b)$$

したがって、式(1.4-6a)と式(1.4-6b)から、弾性理論による地盤反力係数の基礎直径(または基礎半径)による違いは、次式で与えられる。

$$k_{2rz} = k_{0z} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1} \quad (1.4-6c)$$

実験による経験式では、円盤の大きさの補正値は式(1.4-3b)のように(-3/4)乗に比例している。半無限弾性体の理論では、上式のように(-1)乗に比例する。

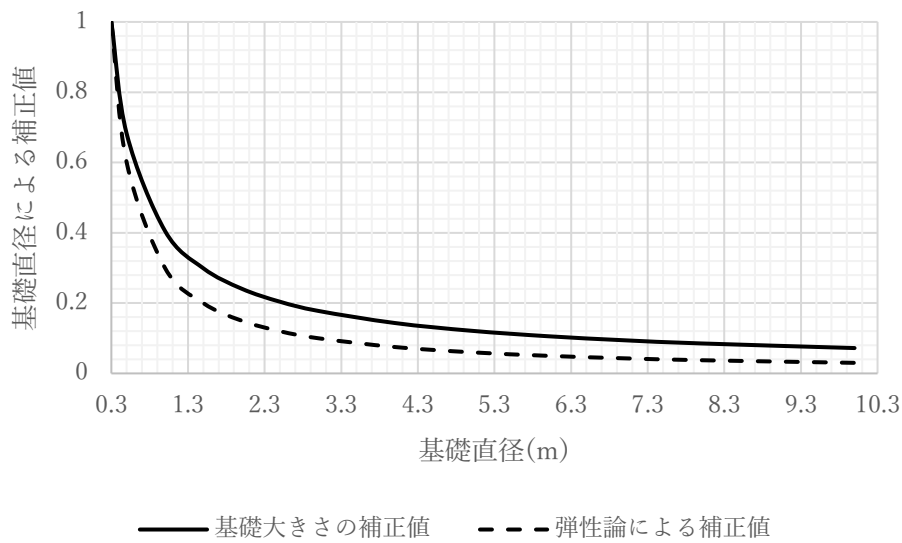


図 1.4-3 経験式と半無限弾性体の理論による地盤反力係数の剛体円盤基礎の大きさの補正値の違い

図 1.4-3 は、経験式と半無限弾性体の理論による地盤反力係数の剛体円盤基礎の大きさの補正値の違いを示す。この図から、半無限弾性体の理論による地盤反力係数の基礎の大きさの補正値は、経験式よりもやや小さめの補正値となるが、傾向は両者で同じであることがわかる。実用的には、直径 0.5m 程度であれば、両者の違いは少ない。

## 1.5 地震時相互作用と応答スペクトルの概要

ここでは、地震時相互作用と応答スペクトルの概要を説明する。応答スペクトルは、  
 図 1.5-1 の左図のように基礎固定の 1 質点振動系(固有周期 $T_0$ と減衰定数 $h_0$ )に地震動  
 加速度波形を入力した時の絶対加速度応答値を固有周期 $T_0$ と減衰定数 $h_0$ の関係として  
 図示したものである。

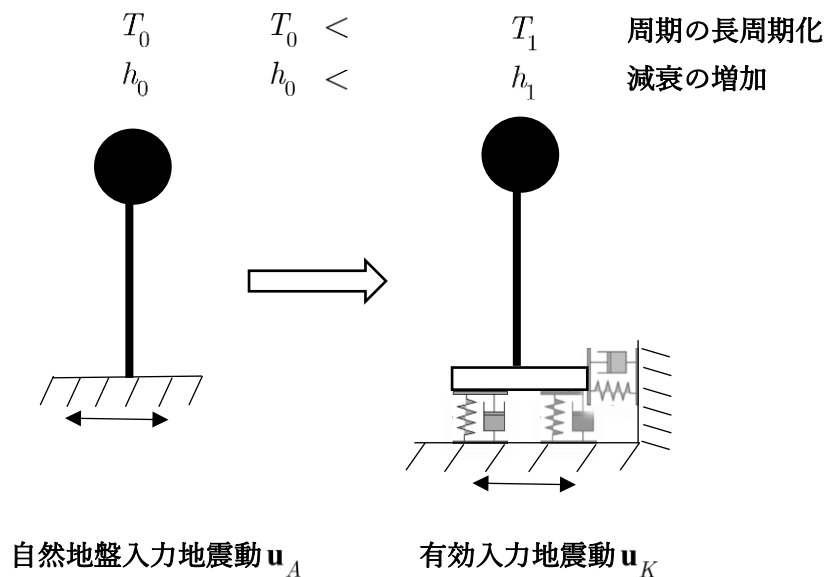


図 1.5-1 地震時相互作用効果による構造物の固有周期と減衰定数の変化  
 (左図：基礎固定モデル，右図：地震時相互作用を考慮したモデル)

一方、地震時相互作用を考慮した 1 質点振動系の絶対加速度応答値は、図 1.5-1 の右  
 図のように複素ばね係数で支持された基礎上の 1 質点振動系の絶対応答加速度値を固



有周期と減衰定数の関係で与えられる。ただし、図 1.5-1 の右図では、基礎上の 1 質点の質量は、基礎の質量に比べると大きいものとして、基礎の質量は無視している。

自然地盤の入力地震動による減衰定数  $h_0$  の加速度応答スペクトル  $S_{0a}(T_0, h_0)$  が、図 1.5-2 の波線のようにモデル化できた場合を使って、地震時相互作用の応答スペクトルへの効果を説明する。

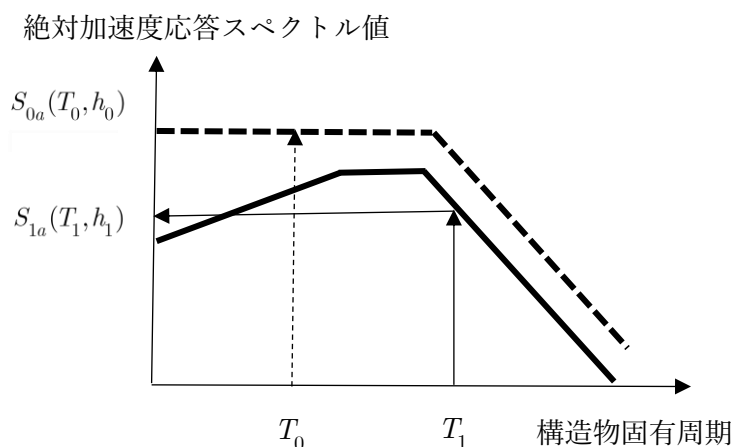


図 1.5-2 地震時相互作用を考慮した加速度応答スペクトル(実践)と自然地盤地震動の加速度応答スペクトル(破線)の比較の概要図

複素ばね係数により構造物の固有周期が長周期化( $T_0 \rightarrow T_1$ )し、かつ減衰定数が地下逸散減衰のため増加( $h_0 \rightarrow h_1$ )するため、加速度応答スペクトルの振幅は小さくなる。加速度応答スペクトルは、一般に減衰定数 5% で与えられる。任意の減数定数による加速度応答スペクトルは、減衰定数のみに依存する補正值を用いて、次式(1.5-1)で与えられる(土木学会(1989))。

$$S_a(T, h) = \beta(h)S_a(T, h = 0.05) \quad (1.5-1)$$

$$\beta(h) = \frac{1.5}{40h + 1} + 0.5$$

図 1.5-3 は減衰定数による加速度応答スペクトルの補正值  $\beta(h)$  を示す。

地下逸散減衰による減衰定数の増加に加えて、有効入力地震動では、短周期地震動が減少するため、有効地震動と複素ばねを考慮した時の加速度応答スペクトル  $S_{1a}(T_1, h_1)$  は、図 1.5-2 の実線のように振幅が小さくなり、かつ短周期が減少したものとなる。

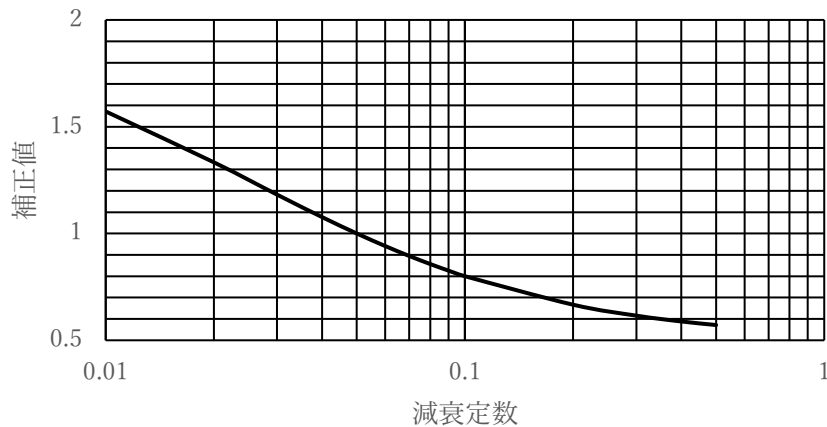


図 1.5-3 加速度応答スペクトル(5%減衰定数)の減衰定数による補正值

したがって、地震時相互作用を考慮すると、絶対加速度応答スペクトル値は  $S_{0a}(T_0, h_0) \rightarrow S_{1a}(T_1, h_1)$  と小さくなるので、構造物への地震荷重  $mS_{1a}(T_1, h_1)$  は小さくなる ( $m:1$  質点の質量)。

## 2章 地震時相互作用の簡単な歴史と定式化

ここでは、簡単な研究歴史を述べる。そして、1.2節と1.3節で説明した境界法(切欠き型境界法)の有限要素法による一般的定式化を説明する。定式化の研究歴史に沿って境界法の別方法(2.2節の境界法の(2)項)と容積法(接触体型容積法)の定式化を説明する。重要な点は、著者らは以下のように考えていることである。

境界法の別方法と容積法は、境界法の一般的定式で使う切欠き地盤を用いないで、自然地盤を用いて地盤の複素ばね剛性行列や基礎への入力地震動あるいはドライビング力を求めるために1970年代後半から1980年代初頭に開発された方法である。

2000年代の現代(2020年)では、計算機性能は当時に比べると格段に向上しているので、自然地盤(例えば、水平成層地盤)の解析解を用いて計算機負担を軽減するという動機は薄れている。

このような理由から、1.2節と1.3節で説明した物理的解釈または、2.2節(1)項の有限要素法による一般的定式化に従って、切欠き型境界法による地盤の複素ばね剛性と有効入力地震動を使った基礎・構造物系の地震応答を求める方法がわかり易く、かつ簡単である。

## 2.1 簡単な研究歴史

Housner(1954, 1957)は、地盤を回転ばねにモデル化して、建物の地震応答解析を行った。また、1957年には、建物基礎版上の地震動とその近傍地盤上の地震動が異なるという観測事実を次のように解釈している。地表が平面的に異なる動きをする時、建物基礎が長く剛体的であれば、基礎は地盤の動きを拘束するので、基礎の運動は地盤の動きよりも小さくなる。この解釈は、1.2節と1.3節の有効入力地震動の解釈に相当する。

その後、山原(1969)は、八戸での建物の地震観測結果を整理し、この現象を基礎版による『入力損失』と呼んだ。また、松島(1975)は、確率過程理論を使いこの現象を研究した。

米国では、原子力発電所の耐震設計問題と絡んで、入力損失の研究が活発化した。例えば、Newmarkら(1977)は、Hollywood Storage ビルの地震記録を用いて、入力損失の実証を試みた。しかし、当時は、有限要素法等を使った数値解析法によって地震時相互作用問題を解析することが主流であったこともあり、基礎版の入力損失をどのようにモデルに組み込むか等、地震時相互作用問題と入力損失の関係は曖昧だった。この当時の曖昧な研究状況に関しては、弾性波動理論による複素ばねを用いた質点-ばねモデルと地盤・基礎・構造物の全体系解析を行う有限要素法モデルを比較検討した Hadjian ら(1974)の論文から明確に読み取ることができる。

しかし、1970年代後半から1980年初頭には、Kauselら(1977)やGutierrez(1976)の有限要素法やHaradaら(1980, 1983)の弾性波動理論を用いた地震時相互作用の定式化(2.1 補助記事1、2 参照)が発表され、しだいに有効地震動や複素ばね係数の物理的意味と地震時相互作用問題における位置づけが明確になってきた。地盤が粘弾性体であれば、1.2 節の有効入力地震動と複素ばね係数を使った質点・ばね系モデルにより地震時相互作用を考慮できることが、これらの研究により数学的に証明された。

Kinematic interaction, Inertial interaction という言葉は、Kauselら(1977)のMIT 研究グループが名づけたものであるが、当初はKinematicの代わりにInterface interactionと呼んでいた。しかし、この場合、基礎の運動のみ取り扱っているのでKinematics(運動学)にちなんでKinematic interactionと呼んだそうである。地震時相互作用モデルを有効入力地震動またはキネマティック相互作用と複素ばね係数またはイナーシャル相互作用の2つに分離する方法を、Gutierrez(1976)は有限要素法による定式化の中で境界法(Boundary method)またはサブストラクチャー法と呼んでいる。その後、有限要素法等による数値計算法において色々な工夫がされるようになり、Lysmerら(1981)の容積法(Volume method)やGuptaら(1980)のハイブリッド法(Hybrid method)が開発されている。

1980年代では、計算機の容量が大きくなかったので、有限要素法等の数値計算法に工夫をして体積法やハイブリッド法が開発された。しかし、現在の計算機性能は当時に

比べると格段の性能性を有する。このため、全体系解析も可能であるが、設計では数十回以上のパラメータ解析が必要となるので、著者らは、1.2 節から 1.4 節で述べた境界法による有効入力地震動と複素ばね係数を求める方法による地震時相互作用を考慮した上部構造物の数値計算法がわかり易く簡単かつ厳密であると思う。ただし、2 章には研究のレビューをするために有限要素法による境界法と容積法の定式化の説明をする。さらに、3 章に具体例を示すが、1.2 節で述べた近似非線形地震時相互作用モデルにも拡張し易い。現代は、非線形地震時相互作用モデルの実用化を目指す時であるが、地盤の非線形モデルは確立していないことも考慮すると、線形地震時相互作用モデルを基礎に据えて、非線形地震時相互作用モデルを開発するのが正道である。

## 2.1 補助記事 1 連続体系による定式化

### (1) 基礎式

図 A2.1-1-1 のような入射波が作用する弾性体中剛体に作用する力を定式化する。

剛体の無い自然地盤の変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(f)}$  は、入射波変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(i)}$  と地表面からの反射波変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(r)}$  の和として次式のように与えられる。

$$\mathbf{u}^{(f)} = \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{u}^{(r)} \quad (\text{A2.1.1-1a})$$

ここに、自然地盤の変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(f)}$  と応力テンソル  $\boldsymbol{\tau}^{(f)}$  は既知とする。もし剛体が存在すれば、剛体からの放射波変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(s)}$  のため、波動場  $\mathbf{u}$  は自然地盤の変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(f)}$  と放射波変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(s)}$  の和として次式のように与えられる。

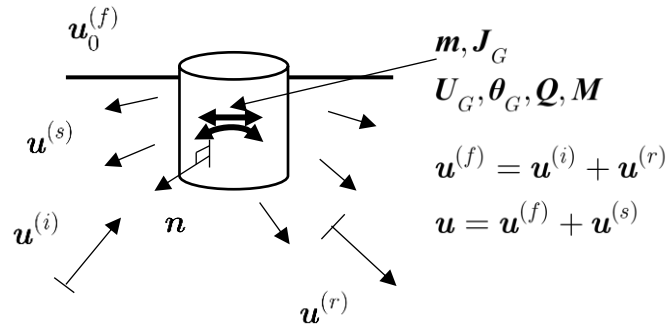


図 A2.1-1-1 入射波を受ける弾性体地盤中の剛体基礎と記号

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)} \quad (\text{A2.1.1-1b})$$

同様に、応力テンソルは次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)} \quad (\text{A2.1.1-1c})$$

上記の剛体が存在する波動場の変位ベクトルは、剛体表面(単位法線ベクトル： $\mathbf{n}$ )では、剛体変位(式(A2.1.1-2d) 参照)と同じでなければならない(弾性体地盤と剛体表面の完全接触条件)。また、地表面(単位法線ベクトル： $\mathbf{n}_{freeS}$ )では地表面の応力ベクトル(トラクション)は零でなければならない。これらの境界条件は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)})_S &= \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x}) && \text{: 剛体表面} \\ (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)}) \cdot \mathbf{n}_{freeS} &= \mathbf{0} && \text{: 地表面} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.1-1d})$$

自然地盤の変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(f)}$  と応力テンソル  $\boldsymbol{\tau}^{(f)}$  は既知であるため、放射波変位ベクトル  $\mathbf{u}^{(s)}$  とその応力テンソル  $\boldsymbol{\tau}^{(s)}$  は、波動方程式と放射波条件(遠方で零)および上式の境界条件を満たすように求められる。

ここで、剛体重心点の直交座標軸  $(x, y, z)$  方向の変位ベクトルと各軸回りの回転角ベクトルを  $\mathbf{U}_G, \boldsymbol{\theta}_G$  とし、その成分で表すと次式のようなになる。

$$\mathbf{U}_G = \begin{pmatrix} U_{Gx} \\ U_{Gy} \\ U_{Gz} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_G = \begin{pmatrix} \theta_{Gx} \\ \theta_{Gy} \\ \theta_{Gz} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-2a})$$

また、剛体表面の変位ベクトル  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  は、剛体重心点から剛体表面までの距離ベクトル  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (x, y, z)^T$  を使うと、次式のように求められる。

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_G + \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_G = \mathbf{U}_G + \begin{pmatrix} z\theta_{Gy} - y\theta_{Gz} \\ -z\theta_{Gx} + x\theta_{Gz} \\ y\theta_{Gx} - x\theta_{Gy} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-2b})$$

上式右辺第 2 項は、次式の距離ベクトルと回転角ベクトルの外積になっている。

$$\boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \theta_{Gy}z - \theta_{Gz}y \\ \theta_{Gz}x - \theta_{Gx}z \\ \theta_{Gx}y - \theta_{Gy}x \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-2c})$$

したがって、剛体表面の変位ベクトル  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  は、次式のように表現できる。

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.1.1-2d})$$



ここで、剛体に作用する力から剛体重心点の運動方程式を考察する。剛体に作用する力は、外力 $\mathbf{Q}, \mathbf{M}$ と慣性力と弾性体地盤からの反力 $\mathbf{Q}_b, \mathbf{M}_b$ のつり合いから次式のよ  
うに求められる。

$$\begin{pmatrix} m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_G \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_b \\ \mathbf{M}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-3a})$$

ここに、 $m, \mathbf{J}_G$ は次式のような剛体の質量と重心点の各軸回りの慣性質量モーメント  
行列を表す。

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ & m & 0 \\ \text{sym.} & & m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_G = \begin{pmatrix} J_{Gx} & 0 & 0 \\ & J_{Gy} & 0 \\ \text{sym.} & & J_{Gz} \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-3b})$$

また、弾性体地盤からの反力 $\mathbf{Q}_b, \mathbf{M}_b$ は、剛体表面(単位法線ベクトル： $\mathbf{n}$ )に作用する  
単位面積当たりの応力ベクトル(トラクション)  $-(\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)})_S \cdot \mathbf{n}$ とそれによる重  
心点回りの回転力  $-\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)})_S \cdot \mathbf{n}$ の総和として次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_b &= -\int_S (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)})_S \cdot \mathbf{n} dS \\ \mathbf{M}_b &= -\int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)})_S \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (\text{A2.1.1-3c})$$

## (2) 有効入力地震動と複素地盤ばね係数

ここでは、放射波動場 $\mathbf{u}^{(s)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)}$ を次式のように2つに分解し、弾性体地盤反力式  
(A2.1.1-3c)の物理的解釈をする。

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{u}^{(s)(1)} + \mathbf{u}^{(s)(2)} \quad (\text{A2.1.1-4a})$$

弾性体地盤と剛体表面の完全接触条件式(A2.1.1-1d)は次式のように表される。

$$(\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)(1)})_S + (\mathbf{u}^{(s)(2)})_S = \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.1.1-4b})$$

さらに、1番目の放射波動場 $\mathbf{u}^{(s)(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)(1)}$ は、次式の境界条件を満たす解とする。

$$(\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)(1)})_S = \mathbf{U}'_G + \boldsymbol{\theta}'_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{Q}_b^{(1)} = - \int_S (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)(1)})_S \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (\text{A2.1.1-4c})$$

$$\mathbf{M}_b^{(1)} = - \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)(1)})_S \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{0}$$

この条件下では、2番目の放射波動場 $\mathbf{u}^{(s)(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)(2)}$ は、次式の条件を満たす解となる。

$$(\mathbf{u}^{(s)(2)})_S = \mathbf{U}_G - \mathbf{U}'_G + (\boldsymbol{\theta}_G - \boldsymbol{\theta}'_G) \times \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b^{(2)} = - \int_S (\boldsymbol{\tau}^{(s)(2)})_S \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A2.1.1-4d})$$

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b^{(2)} = - \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(s)(2)})_S \cdot \mathbf{n} dS$$

弾性体地盤と剛体表面の完全接触条件を満たし、2番目の放射波動場 $\mathbf{u}^{(s)(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)(2)}$ のみによる弾性体地盤の反力は、線形弾性体の構成則と変位と歪関係式が全て線形であるため、振動数領域( $\mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b(\omega)e^{-i\omega t}, \mathbf{U}_G = \mathbf{U}_G(\omega)e^{-i\omega t}, \dots$ )の剛体変位と回転角の線形関係として次式のように表される。

$$\mathbf{Q}_b(\omega) = \mathbf{K}_{11}(\omega)(\mathbf{U}_G(\omega) - \mathbf{U}'_G(\omega)) + \mathbf{K}_{12}(\omega)(\boldsymbol{\theta}_G(\omega) - \boldsymbol{\theta}'_G(\omega)) \quad (\text{A2.1.1-4e})$$

$$\mathbf{M}_b(\omega) = \mathbf{K}_{12}(\omega)(\mathbf{U}_G(\omega) - \mathbf{U}'_G(\omega)) + \mathbf{K}_{22}(\omega)(\boldsymbol{\theta}_G(\omega) - \boldsymbol{\theta}'_G(\omega))$$

ここに、地盤反力と剛体変位の線形関係を関係づける係数  $\mathbf{K}_{ij}(\omega)$  は『複素地盤ばね係数行列』と解釈できる。

したがって、振動数領域では、式(A2.1.1-3a)の剛体の運動方程式は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left( -\omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\omega) & \mathbf{K}_{12}(\omega) \\ \mathbf{K}_{12}(\omega) & \mathbf{K}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{U}_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}_G(\omega) \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\omega) & \mathbf{K}_{12}(\omega) \\ \mathbf{K}_{12}(\omega) & \mathbf{K}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}'_G(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\omega) \\ \mathbf{M}(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.1-5a})$$

上式を相対変位  $\mathbf{x}_G = \mathbf{U}_G(\omega) - \mathbf{U}'_G(\omega)$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_G = \boldsymbol{\theta}_G(\omega) - \boldsymbol{\theta}'_G(\omega)$  で表すと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \left( -\omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\omega) & \mathbf{K}_{12}(\omega) \\ \mathbf{K}_{12}(\omega) & \mathbf{K}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_G(\omega) \\ \boldsymbol{\varphi}_G(\omega) \end{pmatrix} = \\ -\omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_G(\omega) \\ \boldsymbol{\varphi}_G(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\omega) \\ \mathbf{M}(\omega) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.1-5b})$$

上式の運動方程式において、剛体の質量を零とし、かつ外力も零とすると、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}_G(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}'_G(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-6})$$

この式は、外力の作用しない質量零の剛体に入射波が作用し剛体表面からの散乱波による波動場  $((\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)(1)})_S$ ; 式(A2.1.1-4c)) による剛体の応答変位が、 $\mathbf{U}'_G(\omega), \boldsymbol{\theta}'_G(\omega)$  であることを意味する。 $\mathbf{U}'_G(\omega), \boldsymbol{\theta}'_G(\omega)$  を『有効入力地震動変位』と呼ぶ。

以上の振動数領域の運動方程式(A2.1.1-5)を図的に説明すると、図 A2.2.1-2 のように地震動を受ける弾性体地盤中の剛体の運動方程式は、右図のように『複素地盤ばね係数』とその支点到『有効入力地震動』を作用させるモデルと同じであるということになる。

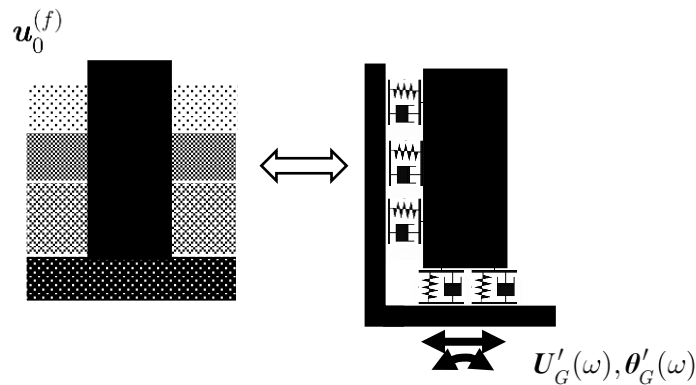


図 A2.2.1-2 地震動を受ける弾性体地盤中の剛体基礎の等価運動方程式の説明図

### (3) ドライビング力と複素地盤ばね係数

(2) 項のような放射波動場の分解とは異なり Thau(1967)は、放射波動場  $\mathbf{u}^{(s)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)}$  を次式のように2つに分解し、ドライビング力と複素地盤ばね係数行列を求めている。

$$\mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{u}^{(s)(3)} + \mathbf{u}^{(s)(4)} \quad (\text{A2.1.1-7a})$$

弾性体地盤と剛体表面の完全接触条件式(A2.1.1-1d)は次式のように表される。

$$(\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)(3)})_S + (\mathbf{u}^{(s)(4)})_S = \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.1.1-7b})$$

ここで、3番目の放射波動場  $\mathbf{u}^{(s)(3)}, \boldsymbol{\tau}^{(s)(3)}$  は、次式の境界条件を満たす解とする。

$$(\mathbf{u}^{(f)} + \mathbf{u}^{(s)(3)})_S = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{Q}_b^{(3)} = - \int_S (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)(3)})_S \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A2.1.1-7c})$$

$$\mathbf{M}_b^{(3)} = - \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(f)} + \boldsymbol{\tau}^{(s)(3)})_S \cdot \mathbf{n} dS$$

この条件下では、4番目の放射波動場  $\mathbf{u}^{(s)(4)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}^{(s)(4)}$  は、次式の条件を満たす解となる。

$$(\mathbf{u}^{(s)(4)})_S = \mathbf{U}_G + \boldsymbol{\theta}_G \times \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{Q}_b^{(4)} = - \int_S (\boldsymbol{\tau}^{(s)(4)})_S \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{A2.1.1-7d})$$

$$\mathbf{M}_b^{(4)} = - \int_S \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\tau}^{(s)(4)})_S \cdot \mathbf{n} dS$$

第(1)項と同様に振動数領域では、複素地盤ばね係数行列を用いると、放射波動場  $\mathbf{u}^{(s)(4)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}^{(s)(4)}$  のみによる地盤反力は、次式のように表すことができる。

$$\mathbf{Q}_b^{(4)}(\omega) = \mathbf{K}_{11}(\omega) \mathbf{U}_G(\omega) + \mathbf{K}_{12}(\omega) \boldsymbol{\theta}_G(\omega) \quad (\text{A2.1.1-7e})$$

$$\mathbf{M}_b^{(4)}(\omega) = \mathbf{K}_{12}(\omega) \mathbf{U}_G(\omega) + \mathbf{K}_{22}(\omega) \boldsymbol{\theta}_G(\omega)$$

また、弾性体地盤反力は、次式のように2つの波動場の和で与えられる。

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b^{(3)} + \mathbf{Q}_b^{(4)} \quad (\text{A2.1.1-7f})$$

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_b^{(3)} + \mathbf{M}_b^{(4)}$$

上式を剛体の運動方程式(A2.1.1-3a)に代入すると、振動数領域の運動方程式は次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\omega) & \mathbf{K}_{12}(\omega) \\ \mathbf{K}_{12}(\omega) & \mathbf{K}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}_G(\omega) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_b^{(3)}(\omega) \\ \mathbf{M}_b^{(3)}(\omega) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\omega) \\ \mathbf{M}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-8})$$

上式と第（１）項の運動方程式(A2.1.1-5)の比較から、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_b^{(3)}(\omega) \\ \mathbf{M}_b^{(3)}(\omega) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11}(\omega) & \mathbf{K}_{12}(\omega) \\ \mathbf{K}_{12}(\omega) & \mathbf{K}_{22}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}'_G(\omega) \\ \boldsymbol{\theta}'_G(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{A2.1.1-9})$$

ここに、右辺の負記号は地盤から剛体への反力とは逆向きの力を剛体に作用させる力であることを意味する。すなわち、３番目の放射波動場  $\mathbf{u}^{(s)(3)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}^{(s)(3)}$  からは、質量零の剛体の地震応答変位を零にするという条件(式(A2.1.1-7c)の上段式)のために必要な力(式(A2.1.1-7c)の中・下段式)を求めることができる。この力  $\mathbf{Q}_b^{(3)}(\omega)$ ,  $\mathbf{M}_b^{(3)}(\omega)$  をドライビング力と呼ぶが、有効入力地震動と複素地盤ばね係数行列との関係は、式(A2.1.1-9)である。

## 2.1 補助記事2 入射 SH 波を受ける半円中剛体基礎の解析解

地下逸散減衰の研究のために妹澤・金井(1935)が用いたモデルであるが、ここでは、図 A2.1.2-1 に示すような Luco(1969)による入射 SH 波を受ける半円中剛体基礎の解析解を用いて、有効入力地震動と複素地盤ばね係数の例を示す。

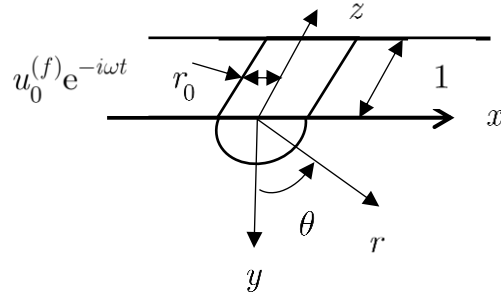


図 A2.1.2-1 入射 SH 波を受ける半円中剛体基礎と記号

先ず、振動数・波数領域 $(\omega, \kappa)$ の鉛直下方からの入射(上昇)SH 波を次式のように与える。

$$u_z^0 = u_z^0(\kappa, \omega) e^{-i(\kappa y + \omega t)}, \quad \kappa = \frac{\omega}{C_S} \quad (\text{A2.1.2-1})$$

ここに、 $C_S$  は S 波速度を表す。

SH 波問題での SH 波振幅  $u_z$  は、弾性体地盤領域  $r \geq r_0, |\theta| \leq \pi/2$  において、次式の波動方程式を満たす。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{C_S^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (\text{A2.1.2-2a})$$

また、SH 波振幅  $u_z$  は、次式の境界条件(地表面応力が零と剛体基礎との完全接触条件)を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= -\frac{\mu_S}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0, \quad r \geq r_0, \theta = \pm \frac{\pi}{2} \\ u_z &= U_G e^{-i\omega t}, \quad r = r_0, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2-2b})$$

ここに、 $\mu_S$  は弾性体地盤のせん断剛性( $\mu_S = \rho C_S^2$ ;  $\rho$  = 地盤の密度)、 $r_0, U_G$  は剛体基礎の半径と変位振幅を表す。

鉛直下方からの入射 SH 波を受ける剛体基礎の無い自然地盤の変位  $u^{(f)}$  は、入射波と地表面での反射波の和として、次式で与えられる。

$$u^{(f)} = u_z^0(\kappa, \omega) e^{-i\omega t} (e^{-i\kappa y} + e^{i\kappa y}) \quad (\text{A2.1.2-3a})$$

ここに、地表面変位は  $y = 0$  と置き、 $u_0^{(f)}(\kappa, \omega) = 2u_z^0(\kappa, \omega)$  である。

ここで、 $y = r \cos \theta$  と次式のベッセル関数(次数  $2n$  の第 1 種ベッセル関数)による級数展開式を用いる。

$$\begin{aligned} e^{-i\kappa y} + e^{i\kappa y} &= 2 \cos(\kappa r \cos \theta) \\ &= 2 \left( J_0(\kappa r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\kappa r) \cos 2n\theta \right) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2-3b})$$

上式を用いると、 $u^{(f)}$  は次式のように表される。

$$u^{(f)} = u_z^0(\kappa, \omega) e^{-i\omega t} \left( 2J_0(\kappa r) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\kappa r) \cos 2n\theta \right) \quad (\text{A2.1.2-3c})$$

この自然地盤の変位場は、地表面応力が零という境界条件(式(A2.1.2-2b)の上段式)を満たす解である。

この自然地盤の変位場  $u^{(f)}$  に剛体運動による放射波動場  $u^{(s)}$  を加えた波動場  $u_z$  は、次式のように表される。

$$u_z = u^{(f)} + u^{(s)} \quad (\text{A2.1.2-4a})$$



SH 波の放射波動場  $u^{(s)}$  は、一般に次式のように  $m$  次の第 1 種ハンケル関数の級数和で表すことができる。

$$u^{(s)} = e^{-i\omega t} \left( a_0 H_0^{(1)}(\kappa r) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m H_m^{(1)}(\kappa r) \cos m\theta \right) \quad (\text{A2.1.2-4b})$$

上述したように自然地盤の変位場  $u^{(f)}$  は、地表面応力が零という境界条件(式(A2.1.2-2b)の上段式)を満たしているので、放射波動場  $u^{(s)}$  も地表面応力が零という境界条件を満たす必要がある。この条件式は、 $\partial u^{(s)} / \partial \theta = 0, r \geq r_0, \theta = \pm \pi / 2$  となるので、式(A2.1.2-4b)より、放射波動場  $u^{(s)}$  は次式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \theta} = e^{-i\omega t} \left( - \sum_{m=1}^{\infty} a_m m H_m^{(1)}(\kappa r) \sin m\theta \right) = 0, r \geq r_0, \theta = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{A2.1.2-4c})$$

上式を満たすためには、 $\sin m\pi / 2 = 0$  なので、次数  $m$  は次式のようなになる。

$$\frac{m\pi}{2} = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A2.1.2-4d})$$

したがって、地表面応力が零という境界条件を満たす放射波動場  $u^{(s)}$  は、次式のように求められる。

$$u^{(s)} = e^{-i\omega t} \left( a_0 H_0^{(1)}(\kappa r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n H_{2n}^{(1)}(\kappa r) \cos 2n\theta \right) \quad (\text{A2.1.2-4f})$$

上式の係数  $a_n$  は、波動場  $u_z$  の完全密着条件(式(A2.1.2-2b)の下段式)より、次式のように求められる。

$$a_0 = \frac{U_G - 2J_0(\kappa r_0)u_z^0(\kappa, \omega)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} \quad (\text{A2.1.2-4g})$$

$$a_0 = 4(-1)^{n+1} \frac{J_{2n}(\kappa r_0)u_z^0(\kappa, \omega)}{H_{2n}^{(1)}(\kappa r_0)}$$

以上のように境界条件を満たす波動場  $u_z = u^{(f)} + u^{(s)}$  の解が求まったので、単位長さ当たりの剛体基礎表面に作用する力は、次式のように剛体表面の応力を積分して求めることができる。

$$Q_z = -2r_0 \int_0^{\pi/2} \sigma_{rz} \Big|_{r=r_0} d\theta = -2\mu_S r_0 \int_0^{\pi/2} \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=r_0} d\theta \quad (\text{A2.1.2-5a})$$

上式に境界条件を満たす波動場  $u_z = u^{(f)} + u^{(s)}$  の解(式(A2.1.2-3a)と式(A2.1.2-4f))を代入すると、 $Q_z$  は次式のように求められる。

$$Q_z = -\mu_S \kappa r_0 \pi e^{-i\omega t} \left( -U_G \frac{H_1^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + 2u_z^0(\kappa, \omega) \frac{J_0'(\kappa r_0)H_0^{(1)}(\kappa r_0) - J_0(\kappa r_0)H_0'^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} \right)$$

$$= \frac{2\omega^2 M_S}{\kappa r_0} e^{-i\omega t} \left( U_G \frac{H_1^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} + u_z^0(\kappa, \omega) \frac{4i}{\pi \kappa r_0 H_0^{(1)}(\kappa r_0)} \right) \quad (\text{A2.1.2-5b})$$

ここに、 $J_0'(\kappa r_0), H_0'^{(1)}(\kappa r_0)$  は変数での微分を意味する。また、右辺の上段式から下段式を導くに当たり、次式の次式のベッセル関数とハンケル関数に関する関係式を用いた。

$$J'_0(\kappa r_0)H_0^{(1)}(\kappa r_0) - J_0(\kappa r_0)H_0'^{(1)}(\kappa r_0) = -\frac{2i}{\pi\kappa r_0} \quad (\text{A2.1.2-5c})$$

ここに、 $M_S$  は次式のように定義される単位長さ当たりの剛体基礎部の弾性体地盤の質量を表す。

$$M_S = \frac{1}{2}\pi r_0^2 \rho \quad (\text{A2.1.2-5d})$$

半円中剛体の質量を  $m$  とすると、その重心点 ( $y = 4r_0 / (3\pi)$ ) の運動方程式は、慣性力と地盤反力  $Q_z$ 、外力  $Q$  との力のつり合い式より次式で与えられる。

$$-\omega^2 m U_G + Q_z = Q \quad (\text{A2.1.2-6})$$

上式に式(A2.1.2-5b)の地盤反力を代入し、ドライビング力と複素地盤ばね係数および有効入力地震動の関係式  $Q_b^{(3)}(\omega) = -K_{11} U'_G$  を考慮して整理すると、簡単のため  $e^{-i\omega t}$  を省略するが、次式の振動数・波数領域の運動方程式が得られる。

$$(-\omega^2 m + K_{11})U_G = -Q_b^{(3)} + Q = K_{11}U'_G + Q \quad (\text{A2.1.2-7a})$$

ここに、 $K_{11}, Q_b^{(3)}, U'_G$  は複素地盤ばね係数、ドライビング力および有効入力地震動変位を表し、次式で与えられる。

$$K_{11} = \frac{2\omega^2 M_S}{\kappa r_0} \frac{H_1^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} = \mu_S \pi \kappa r_0 \frac{H_1^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)}$$

$$\begin{aligned} Q_b^{(3)} &= \mu_S \pi \kappa r_0 \frac{4i}{\pi \kappa r_0 H_0^{(1)}(\kappa r_0)} u_z^0(\kappa, \omega) \\ &= \mu_S \pi \kappa r_0 \frac{2i}{\pi \kappa r_0 H_0^{(1)}(\kappa r_0)} u_0^{(f)}(\kappa, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2-7b})$$

$$U'_G = -\frac{2i}{\pi \kappa r_0 H_1^{(1)}(\kappa r_0)} u_0^{(f)}(\kappa, \omega)$$

ここに、自然地盤の地表面変位と入射波の変位の関係  $u_0^{(f)}(\kappa, \omega) = 2u_z^0(\kappa, \omega)$  を用いた。

ここでは、式(A2.1.2-5b)のように自然地盤の波動場と放射波動場の境界条件を満たす剛体に作用する力を求めているので、簡単のために式(A2.1.2-7)における複素地盤ばね係数、ドライビング力および有効入力地震動変位は、運動方程式から求めた。2.1 補助記事 1 で記述したような放射波動場  $u^{(s)}$  を 2 つに分割し、それぞれの境界条件に従った放射波動場の解から複素地盤ばね係数、ドライビング力および有効入力地震動変位が求められるが(この方法から求めた解は式(A2.1.2-7b)と同じになる)、数式が羅列することになるので、これらの方法からの解の導出を省略した。

第 1 種ハンケル関数は無次元振動数=零では無限大となるので、零点回りの次式の近似式を用いて複素地盤ばね係数と有効地震動の零点近傍の特性を調べておく。

$$H_0^{(1)}(x) \simeq 1 + i \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2}, \quad H_1^{(1)}(x) \simeq \frac{x}{2} - i \frac{2}{\pi x} \quad x \rightarrow 0 \quad (\text{A2.1.2-8a})$$

上式より、複素地盤ばね係数と有効地震動の零点近傍特性は、次式のようにになる。

$$\frac{K_{11}}{\mu_S} = \pi \kappa r_0 \frac{H_1^{(1)}(\kappa r_0)}{H_0^{(1)}(\kappa r_0)} \simeq \frac{\pi(\kappa r_0)^2 / 2 - i2}{1 + i \frac{2}{\pi} \log(\kappa r_0 / 2)}$$

$$\simeq \frac{-\pi}{\log(\kappa r_0 / 2)} \simeq 0 \quad (\text{A2.1.2-8b})$$

$$\frac{U'_G}{u_0^{(f)}(\kappa, \omega)} = -\frac{2i}{\pi \kappa r_0 H_1^{(1)}(\kappa r_0)} \simeq -\frac{2i}{\pi(\kappa r_0)^2 / 2 - i2} \simeq 1$$

図 A2.1.2-2 は、半円中剛体基礎の複素地盤ばね係数  $K_{11}$  の実部と虚部の無次元振動数  $\kappa r_0 = \omega r_0 / C_S$  との関係を示す。実部は低振動数から徐々に増加し高振動数で一定値を示す。一方、虚部は振動数と共に減少する。本例題では、調和振動  $e^{-i\omega t}$  を仮定しているため、 $K_{11}(\omega) = \text{Re}(K_{11}) + i\text{Im}(K_{11}) = k(\omega) - i\omega c(\omega)$  となるので、虚部の振動数による減少特性は、減数係数がほぼ一定値の地下逸散減衰を意味する。

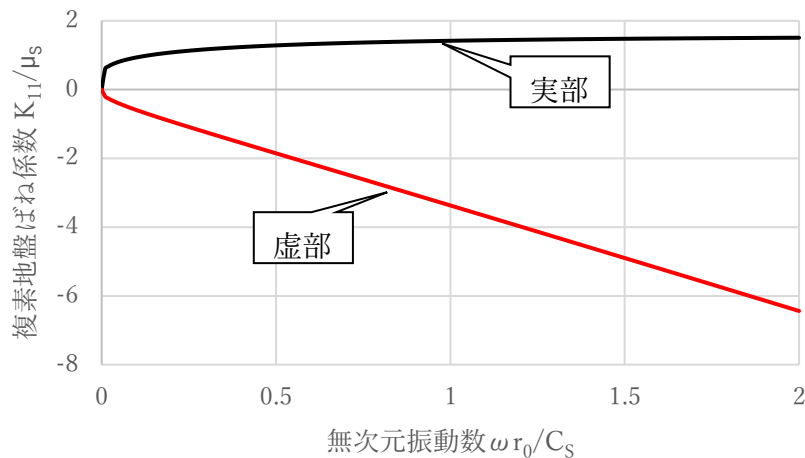
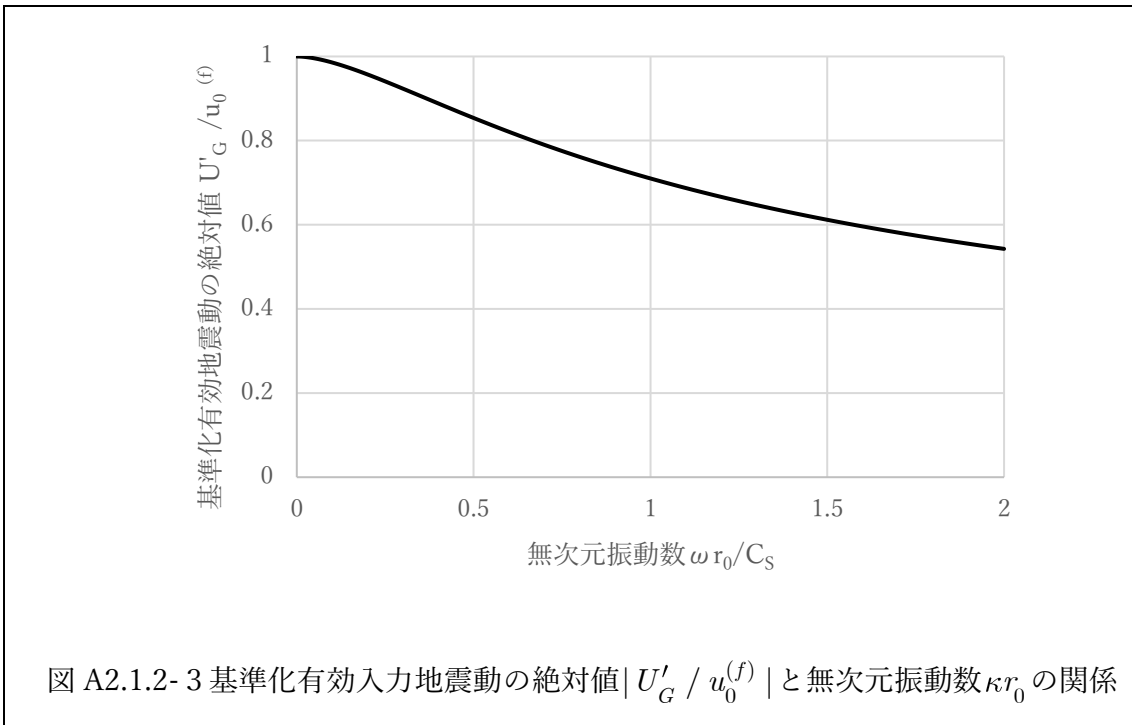


図 A2.1.2-2 複素地盤ばね係数  $K_{11} / \mu_S$  の実部と虚部の無次元振動数  $\kappa r_0$  の関係

図 A2.1.2-3 は、自然地盤の地表面変位で基準化した有効入力地震動の絶対値と無次元振動数の関係を示す。振動数零では、有効入力地震動の絶対値は地表面変位と同じであるが、振動数と共に緩やかに減少している。



## 2.2 境界法(切欠き型)による定式化

### (1) 一般的定式化

次式の変位行列  $\mathbf{D}$  を定義して振動数領域の定式化を説明する。

$$\mathbf{D} = -\omega^2 \mathbf{m} + i\omega \mathbf{c} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{D}\mathbf{r}(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (2.2-1a)$$

ここに、 $\mathbf{m}, \mathbf{c}, \mathbf{k}$  は質量・減衰係数・剛性の行列、 $\omega$  は振動数、 $\mathbf{F}(\omega)$  は振動数領域の外

力、 $\mathbf{r}(\omega)$  は振動数領域の変位を意味する。時間領域の運動方程式は、次式に相当する。

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{k}\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) \quad (2.2-1b)$$

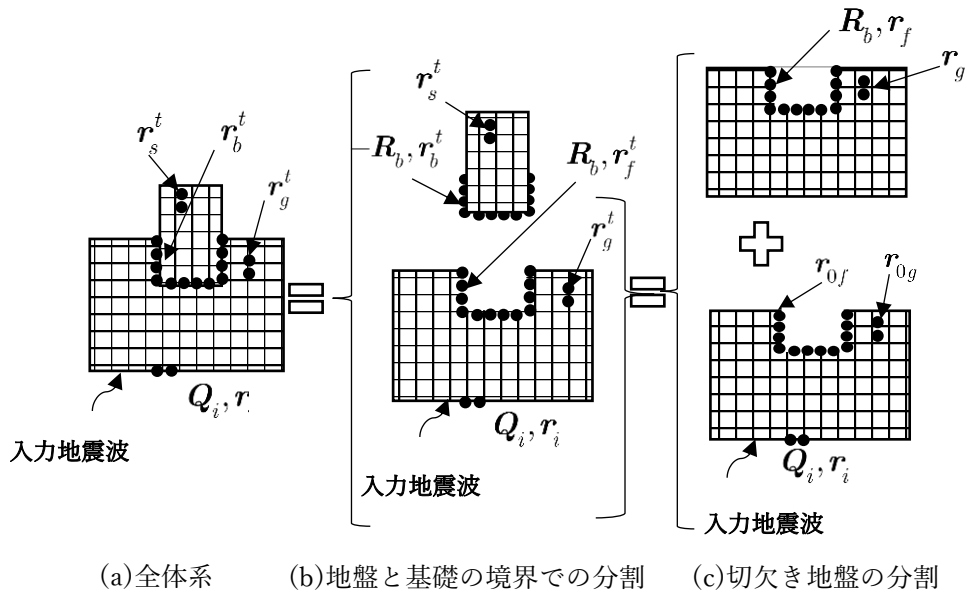


図 2.2-1 境界法(切欠け型境界法)の図的説明と記号  
(変位の上添字 t は絶対変位を表す)

ここでは、図 2.2-1 のように全体系(左図)を右図のように基礎・構造物系と地震波入力力の切欠け自然地盤系の境界で 2 つの系に分割した境界法(切欠け型境界法)の定式化を示す。

図 2.2-1 の真中図(b)の基礎・構造物系と入力地震波による切欠け地盤の運動方程式は、次式のように表される。

基礎・構造物系：

$$\begin{pmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_s^t \\ r_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_b \end{pmatrix} \quad (2.2-2a)$$

入力地震波による切欠け地盤：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} & \mathbf{D}_{fi} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} & \mathbf{D}_{gi} \\ \mathbf{D}_{if} & \mathbf{D}_{ig} & \mathbf{D}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f^t \\ \mathbf{r}_g^t \\ \mathbf{r}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_i \end{pmatrix} \quad (2.2-2b)$$

上式から、 $\mathbf{r}_f^t, \mathbf{r}_g^t$  に関する次式の方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f^t \\ \mathbf{r}_g^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2-2b')$$

変位の適合条件式  $\mathbf{r}_b^t = \mathbf{r}_f^t$  を考慮して上式を重ね合わすと、図 2.2-1 の左図(a)の全体

系の運動方程式は、次式のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \\ \mathbf{r}_g^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2-2c)$$

また、図 2.2-1 の右図(c)の入力地震波による切欠け自然地盤と、基礎・構造物からの

反力のみを受ける基礎・地盤系の運動方程式は、次式のように表される。

入力地震波による切欠け自然地盤：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} & \mathbf{D}_{fi} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} & \mathbf{D}_{gi} \\ \mathbf{D}_{if} & \mathbf{D}_{ig} & \mathbf{D}_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{0f} \\ \mathbf{r}_{0g} \\ \mathbf{r}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_i \end{pmatrix} \quad (2.2-3a)$$

上式から、 $\mathbf{r}_{0f}, \mathbf{r}_{0g}$  に関する次式の方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{0f} \\ \mathbf{r}_{0g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2-3a')$$

基礎・構造物からの反力のみを受ける基礎・地盤系：



$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.2-3b)$$

変位の適合条件から、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_f^t &= \mathbf{r}_b^t \\ \mathbf{r}_f^t &= \mathbf{r}_f + \mathbf{r}_{0f} \\ \mathbf{r}_g^t &= \mathbf{r}_g + \mathbf{r}_{0g} \end{aligned} \quad (2.2-4)$$

ここで、式(2.2-3b)の縮合により変位 $\mathbf{r}_g$ を消去すると、次式が得られる。

$$\mathbf{K}_f \mathbf{r}_f = \mathbf{R}_b \quad (2.2-5a)$$

ここに、 $\mathbf{K}_f$ は地盤の複素ばね剛性行列を表し、次式で与えられる。

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{D}_{ff} - \mathbf{D}_{fg} \mathbf{D}_{gg}^{-1} \mathbf{D}_{gf} \quad (2.2-5b)$$

上式の地盤の複素ばね剛性行列の計算では、形式上逆行列の演算が含まれるが、部分消去法を用いて効率的に計算できる。

式(2.2-5a)の反力 $\mathbf{R}_b$ を式(2.2-2a)に代入し、変位の適合条件式(2.2-4)を使い絶対変位で表すと、基礎・構造物系の運動方程式が次式のように求められる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{K}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f} \end{pmatrix} \quad (2.2-6)$$

上式が切欠き型境界法の最終の一般的定式化である。

上式によれば、式(2.2-2c)の地盤・基礎・構造物系の全体系の数値計算をせずに、基礎・構造物の地震応答は、切欠き地盤の地震応答変位 $\mathbf{r}_{0f}$  (1.2節の有効入力地震動：質量零の基礎剛性のみの地震応答変位)と地盤の複素ばね剛性行列 $\mathbf{K}_f$  (1.2節の無質量基

礎に外力を加えた時の基礎変位と外力の比例係数)を有限要素法等の数値計算で求め、地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  で支持された基礎・構造物に有効地震動変位を入力して、基礎・構造物の地震応答を求めることができる。

ここで、式(2.2-6)右辺の外力項  $\mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f}$  の物理量の意味を説明しておく。式(2.2-5a)より地盤反力は、絶対変位の定義式(2.2-4)を使うと、次式のように与えられる。

$$-\mathbf{R}_b = -\mathbf{K}_f \mathbf{r}_f = -\mathbf{K}_f (\mathbf{r}_f^t - \mathbf{r}_{0f}) \quad (2.2-7a)$$

上式で、基礎の地震応答絶対変位を  $\mathbf{r}_f^t = \mathbf{0}$  とした時の地盤反力  $-\mathbf{F}_b$  は、次式で与えられる。

$$-\mathbf{F}_b = \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f} \quad (2.2-7b)$$

したがって、式(2.2-6)右辺の外力項  $\mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f}$  は、基礎の地震応答絶対変位を零と固定するのに必要な力  $-\mathbf{F}_b$  である。この力をドライビング力と呼ぶ。

## (2) 自然地盤を用いた有効入力地震動と複素ばね剛性行列

ここでは、上記の切欠き地盤から有効入力地震動と地盤の複素ばね剛性行列を求める方法ではなく、切欠きの無い自然地盤を利用した上記2つの物理量を求める方法を説明しておく。ただし、この方法の数値計算に使う地盤モデルと切欠き地盤モデルの離散化やそこから得られる節点変位や節点力の精度が同じでないと数値計算誤差が生じるの

で、この点に注意が必要である。著者らは、現状の計算機機能を考慮すると、(1)の切欠き地盤の有限要素法による2つの物理量を求めることを推奨する。

図 2.2-2 のように自然地盤系を分割し、その地盤の節点力や変位の記号を付ける。境界での変位の適合条件と節点力のつり合いより、境界での絶対変位と各系の節点力は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{0f}^t &= \mathbf{r}_f + \mathbf{r}_{0f} \\ \mathbf{r}_{0g}^t &= \mathbf{r}_g + \mathbf{r}_{0g} \end{aligned} \quad (2.2-8)$$

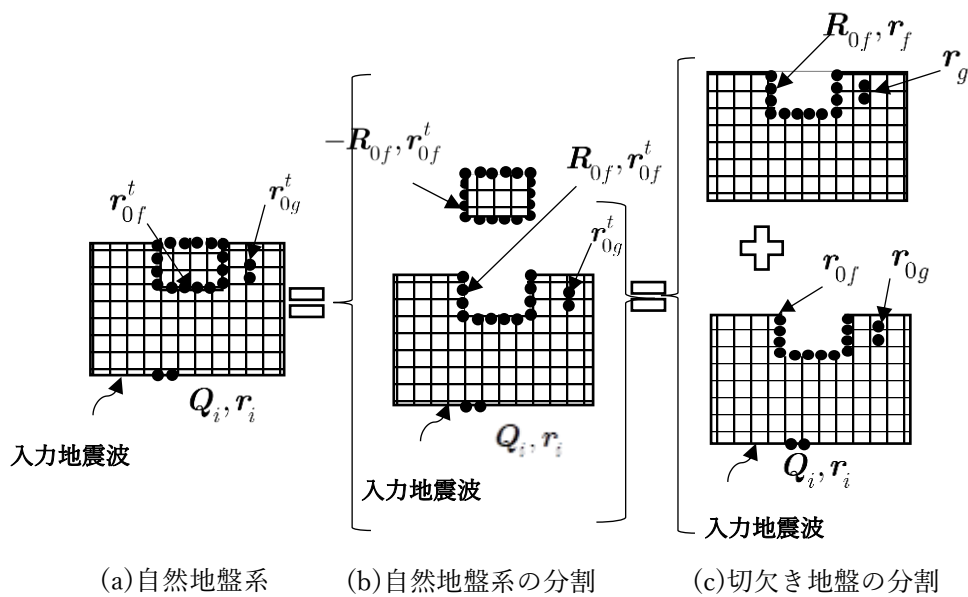


図 2.2-2 境界法(切欠け型境界法)における自然地盤系とその分割の図的説明と記号  
(変位の上添字 t は絶対変位を表す)

図 2.2-2(c) の上段図の切欠き地盤への節点力と節点変位の関係は、切欠き地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  を使って式(2.2-5a)で与えられるので、次式が成立する。

$$\mathbf{R}_{0f} = \mathbf{K}_f \mathbf{r}_f \quad (2.2-9a)$$

上式に式(2.2-8)を代入して、自然地盤系の地震応答変位  $\mathbf{r}_{0f}^t$  で表すと、次式が得られる。

$$\mathbf{R}_{0f} = \mathbf{K}_f (\mathbf{r}_{0f}^t - \mathbf{r}_{0f}) \rightarrow \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f} = \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f}^t - \mathbf{R}_{0f} \quad (2.2-9b)$$

上式のドライビング力  $\mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f}$  を式(2.2-6)右辺の外力項に代入すると、切欠き地盤の地震応答  $\mathbf{r}_{0f}$  ではなく、自然地盤の地震応答  $\mathbf{r}_{0f}^t$  と内部節点力  $\mathbf{R}_{0f}$  を使った次式の基礎・構造物系の運動方程式が得られる。なお、この場合においても、切欠き地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  が必要となる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{K}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f}^t - \mathbf{R}_{0f} \end{pmatrix} \quad (2.2-10)$$

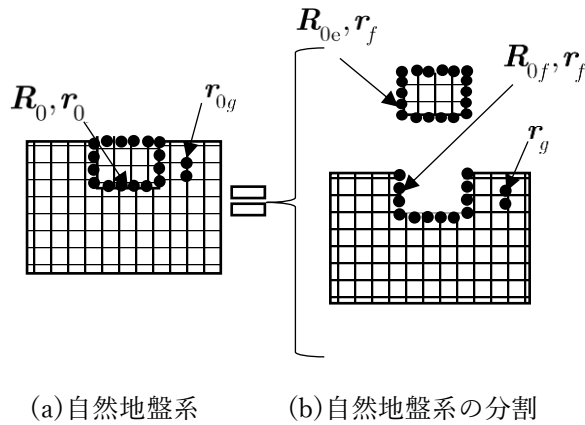


図 2.2-3 入力地震動の無い自然地盤系の分割の図的説明と記号  
(変位の上添字 t は絶対変位を表す)

そこで、切欠き地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  を図 2.2-3(b) のように自然地盤系(a)を切欠き地盤と排土地盤系に分割し、内部節点力と節点変位の関係から、切欠き地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  の別の求め方を説明する。

自然地盤の地中節点外力  $\mathbf{R}_0$  による地中節点変位  $\mathbf{r}_0$  とすると、自然地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_0$  を介して次式が成立する。

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{K}_0 \mathbf{r}_0 \quad (2.2-11a)$$

また、図 2.2-3(b) の上段に示す排土地盤の複素地盤ばね剛性行列  $\mathbf{K}_e$  を導入すると、排土地盤の節点力と変位の関係は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0e} &= \mathbf{K}_e \mathbf{r}_f \\ \mathbf{K}_e &= -\mathbf{m}_e \omega^2 + i\omega \mathbf{c}_e + \mathbf{k}_e \end{aligned} \quad (2.2-11b)$$

ここに、 $\mathbf{m}_e, \mathbf{c}_e, \mathbf{k}_e$  は排土地盤の境界面における質量行列、減数係数行列、剛性行列を意味する。

図 2.2-3(b) の下段に示す切欠き地盤の節点力と変位の関係は、切欠き地盤の複素ばね剛性行列を用いて式(2.2-5a)や式(2.2-9a)で与えられる。再掲すると、次式である。

$$\mathbf{R}_{0f} = \mathbf{K}_f \mathbf{r}_f \quad (2.2-11c)$$

ここで、地中節点外力のつり合い式と節点変位の適合条件式から、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{R}_{0e} + \mathbf{R}_{0f} \\ \mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}_f \end{aligned} \quad (2.2-12)$$

式(2.2-11a)～式(2.2-11c)の節点外力を式(2.2-12)の変位の適合条件式を考慮して、節点外力のつり合い式に代入すると、大変重要な次式が得られる。

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_f \rightarrow \mathbf{K}_f = \mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_e \quad (2.2-13)$$

上式は、切欠き地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_f$  が、自然地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_0$  から排土地盤の複素ばね剛性行列  $\mathbf{K}_e$  を差し引いて求められること、を意味する。

以上のことを基礎・構造物系の地震応答の運動方程式に代入すると、切欠き地盤系を用いなくて、自然地盤系のみを用いた基礎・構造物系の地震応答の運動方程式が次式のように得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_e)\mathbf{r}_{0f}^t - \mathbf{R}_{0f} \end{pmatrix} \quad (2.2-14)$$

まとめると、式(2.2-10)と式(2.2-14)が、式(2.2-6)の切欠き型境界法の一般的定式化に代わる本項の自然地盤系の入力地震動と複素ばね剛性行列を用いた定式化である。最初に述べたことを繰り返すが、(2)項の方法では数値計算に使う地盤モデルと切欠き地盤モデルの離散化やそこから得られる節点変位や節点力の精度が同じでないと数値計算誤差が生じるので、この点に注意が必要である。著者らは、現状の計算機機能を考慮すると、(1)の切欠き地盤の有限要素法による2つの物理量を求めることを推奨する。

## 2.3 容積法による定式化

容積法は、図 2.3-1 のように全体系を自然地盤系と基礎・構造物系と基礎部分の排土地盤系に分離する方法である。2.1 節の境界法では、基礎部分の地盤との接触面で分離するが、容積法では基礎部分の地盤との接触体で分離するので、接触体型容積法とも呼ばれる。容積法では、自然地盤系の応答を入力地震動として扱える点が有利である。しかし、基礎の埋め込み部分に節点が必要となるので、2.2 節の境界法よりも解析の節点数が増える。

容積法では、図 2.3-1 からわかるように、基礎部分の地盤の質量行列と剛性・減衰行列が(b)の自然地盤にも含まれ、かつ(c)の上段の基礎・構造物系にも付加されている。したがって、基礎部分の地盤の質量行列と剛性・減衰行列分を(c)の上段の基礎・構造物系から差し引いて基礎・構造物系の応答を求めることになる。

図 2.3-1(b)の自然地盤系の地震応答の運動方程式は、次式で与えられる。

自然地盤系の地震応答：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f^t \\ \mathbf{r}_g^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.3-1)$$

ここに、上式は境界法の式(2.2-2b')と記号の簡単化のために形式上同じ記号を用いているが、容積法では接触体での節点であるため、変位行列  $\mathbf{D}_{ij}$  と節点変位等  $\mathbf{r}_i^t$ 、 $\mathbf{R}_b$  は境界法のものとは異なることに注意せよ。

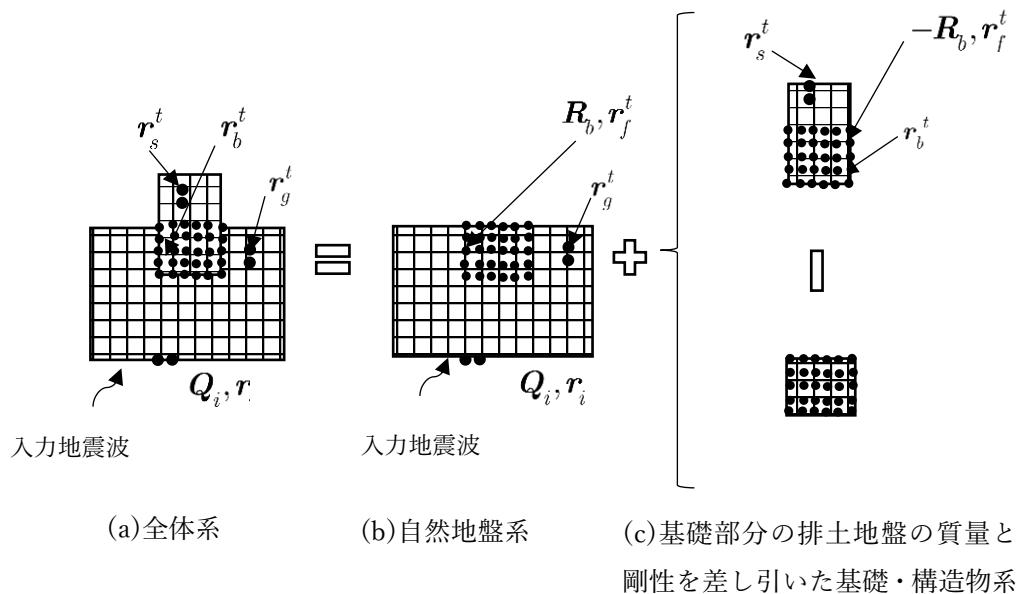


図 2.3-1 容積法(接触体型容積法)における自然地盤系とその分割の図的説明と記号  
(変位の上添字 t は絶対変位を表す)

ここで、基礎部に対応する自然地盤の節点絶対変位  $r_f^t$  とその他の節点絶対変位  $r_g^t$  を次式のように分割する。

$$\begin{aligned} r_f^t &= r_f^0 + r_f \\ r_g^t &= r_g^0 + r_g \end{aligned} \tag{2.3-2a}$$

ここに、 $r_f^0, r_g^0$  は基礎・構造物系の反力  $R_b = 0$  の自然地盤地震応答変位を、 $r_f, r_g$  は入力地震波の無い状態で反力  $R_b$  が作用する時の自然地盤応答変位を表す。したがって、これらの変位は次式の運動方程式を満たす変位である。

$$\begin{pmatrix} D_{ff} & D_{fg} \\ D_{gf} & D_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_f^0 \\ r_g^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.3-2b}$$



$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ff} & \mathbf{D}_{fg} \\ \mathbf{D}_{gf} & \mathbf{D}_{gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_f \\ \mathbf{r}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.3-2c)$$

式(2.3-2c)の縮合により  $\mathbf{r}_g$  を消去すると、次式が得られる。

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r}_f = \mathbf{R}_b \quad (2.3-3a)$$

ここに、 $\mathbf{K}_0$  は切欠きの無い自然地盤の複素ばね剛性行列を表し、次式で与えられる。

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{D}_{ff} - \mathbf{D}_{fg} \mathbf{D}_{gg}^{-1} \mathbf{D}_{gf} \quad (2.3-3b)$$

上式は、形式上境界法の切欠き地盤の複素ばね剛性行列と同じであるが、容積法では接触体での節点であるため、変位行列  $\mathbf{D}_{ij}$  と節点変位等  $\mathbf{r}_i^t$ 、 $\mathbf{R}_b$  は境界法のものとは異なることにを思い出してほしい。

次に、図 2.3-1(c)の基礎部分の排土地盤の質量行列と剛性・減衰行列を差し引いた基礎・構造物系の運動方程式は、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \bar{\mathbf{D}}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_f^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{R}_b \end{pmatrix} \quad (2.3-2a)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{D}}_{bb}$  は基礎部分の排土地盤の接触体における質量行列  $\mathbf{m}_{bb}^e$  と剛性・減衰行列  $\mathbf{k}_{bb}^e \cdot \mathbf{c}_{bb}^e$  を差し引いた基礎部の変位行列を意味し、次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{D}}_{bb} = \mathbf{D}_{bb} - (-\omega^2 \mathbf{m}_{bb}^e + i\omega \mathbf{c}_{bb}^e + \mathbf{k}_{bb}^e) \quad (2.3-2b)$$

最後に、式(2.3-2a)を用いて反力  $\mathbf{R}_b$  を絶対変位  $\mathbf{r}_f^t$  と反力の無い自然地盤の地震応答変位  $\mathbf{r}_f^0$  で表し ( $\mathbf{R}_b = \mathbf{K}_0 (\mathbf{r}_f^t - \mathbf{r}_f^0)$ )、これを式(2.3-2a)に代入すると、次式の容積法による基礎・構造物系の地震応答運動方程式が求められる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \bar{\mathbf{D}}_{bb} + \mathbf{K}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_f^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{r}_f^0 \end{pmatrix} \quad (2.3-3)$$

ここに、 $\mathbf{r}_f^0$  は基礎・構造物系の反力  $\mathbf{R}_b = \mathbf{0}$  の自然地盤地震応答の基礎部節点の変位なので、次式に再掲するが、境界法の式(2.2-6)右辺のドライビング力における切欠き地盤の地震応答変位  $\mathbf{r}_{0f}$  とは違う。杭基礎では、容積法が多用されるが、自然地盤のグリーン関数との関係の定式化は、4.1 節に示すものとなる。

境界法(切欠き型境界法)の基礎・構造物系の運動方程式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{K}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_f \mathbf{r}_{0f} \end{pmatrix} \quad (2.3-4)$$

### 3章 剛体基礎

剛体基礎の運動方程式には、ある点の水平と回転成分からなる応答変位ベクトルと質量と同時にある点回りの慣性(質量)モーメントからなる質量行列とばね係数と減衰係数から成る剛性行列が現れる。そこで、最初に剛体基礎のそれぞれの点の運動方程式を説明し、剛体基礎の運動方程式も多質点系の運動方程式でモデル化できることを示す。

次に、切欠き型境界法に従って軸対象有限要素法による埋め込み剛体基礎の地盤の複素ばね係数と有効入力地震動の計算例と近似評価式を示す。また、複素ばね係数の低振動数領域の近似から得られる付加質量と地震時運動方程式の関係を説明する。実務で地盤と水の付加質量が混同して使われる場合があるので、水中基礎における水の付加質量を考慮した地震時運動方程式とは外力項が異なることを解説する。

剛体基礎上の1質点系の3自由度モデルを基礎固定の等価1質点系モデルに書き変える方法を示し、地震時相互作用を考慮した地震加速度応答スペクトルにおける等価周期と等価減衰定数の評価式を説明する。

最後に、従来型のWinklerばねモデルの基礎側壁の法線方向の水平ばね係数を静的せん断ばね係数で連結した改良型Winklerばねモデルを説明する。

### 3.1 質点系と剛体の並進・回転の連成運動方程式

剛体基礎の並進・回転の連成運動方程式は、ケーソン基礎・構造物系の地震応答の典型的なモデルである。しかし、このモデルの取り扱いでは、剛体基礎の重心点や底面や上面の中心点(下端点と上端点)の運動方程式に質量と慣性モーメントが現れ、また、質量行列とばね剛性行列が剛体のどの点の運動方程式かにより変わる。このため、剛体運動の正しい運動方程式が使われていない場合もある。また、剛体基礎の運動方程式が質点系にモデル化できると、上部構造物系の質点系モデルと一体的にモデル化できるので、便利である。本節では、以上のことを図 3.1-1 の 3 つの水平ばねで支えられた剛体基礎を用いて説明する。

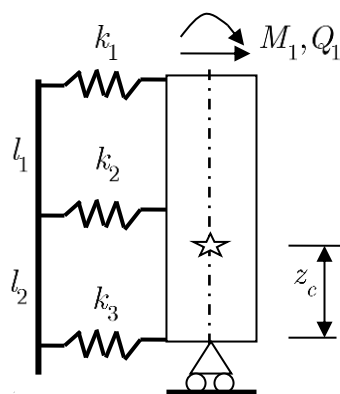


図 3.1-1 3 つの水平ばねで支えられた剛体基礎とその記号  
(重心の慣性モーメントと質量： $J_G, m$ )

図 3.1-1 の 3 つの水平ばねが付いた剛体が、剛体上面の中心点に回転と水平外力  $M_1, Q_1$  を受ける時の並進・回転の連成運動方程式を求める。図の☆印は、剛体の重心(点)

を表す。剛体の重心回りの慣性(質量)モーメントと質量を  $J_G, m$  とする。この図の記号

より、剛体の高さ  $l$  は  $l = l_1 + l_2$  で、重心と 2 番目のばねの距離は  $l_2 - z_c$  となる。

重心の運動方程式は、重心の水平変位と回転角を  $y_G, \theta_G$  として、重心の水平力と回転力のつり合い式から求められる。これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_G \\ \ddot{\theta}_G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & k_1(l - z_c) + k_2(l_2 - z_c) - k_3 z_c \\ \text{Sym.} & k_1(l - z_c)^2 + k_2(l_2 - z_c)^2 + k_3 z_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_G \\ \theta_G \end{pmatrix} \quad (3.1-1) \\ = \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 + Q_1(l - z_c) \end{pmatrix}$$

剛体上端点の運動方程式は、上端点の水平変位と回転角を  $y_1, \theta_1$  として、上端点の水平力と回転力のつり合い式より求められる。これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} m & -m(l - z_c) \\ \text{Sym.} & J_G + m(l - z_c)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 l_1 + k_3 l \\ \text{Sym.} & k_2 l_1^2 + k_3 l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{pmatrix} \quad (3.1-2)$$

その他の点の運動方程式も作ることができる。剛体運動は、ある点の並進・回転がわかれば、他点の運動は幾何学的関係から求められる(3.1 補助記事 1)。

質量・剛性行列は、対称行列である。剛性行列( $K_H, K_{HR}, K_R$ )は、非対角項が零でないため水平と回転の剛性連成( $K_{HR}$ )が生じる。剛体重心の運動方程式の質量行列は対

角行列となるが、剛体上端点の質量行列では、非対角項が零でない質量連成が生じる。

この場合、剛体上端点の慣性モーメント  $J_1$  は、次式で与えられる。

$$J_1 = J_G + m(l - z_c)^2 \quad (3.1-3)$$

この式は、慣性モーメントに関する平行軸の定理と呼ばれる。

図 3.1-1 の剛体基礎の水平ばねと剛体基礎部分を 3 質点系(各質点は剛結合)にモデル化すると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + m_3 \\ J_G &= m_1(l - z_c)^2 + m_2(l_2 - z_c)^2 + m_3 z_c^2 \end{aligned} \quad (3.1-4a)$$

上式を一般化する。重心の慣性モーメントは重心から各質点までの距離の 2 乗と各質量の積なので、剛体基礎部分を  $n$  質点の多質点系にモデル化すると、重心からの距離を  $x_i$  とすると、

$$m = \sum_i^n m_i, \quad J_G = \sum_i^n m_i x_i^2 \quad (3.1-4b)$$

$n$  を無限とし、各質点の質量を微小質量  $dm$  と重心点からの距離を  $x$  とすると、上式は積分記号を使って、次式のように表される。

$$m = \int dm, \quad J_G = \int dm x^2 \quad (3.1-4c)$$

この式は、質点系の集合として剛体の回転と並進の運動方程式が得られることを示す。

このため、剛体基礎と多質点系モデルの上部構造物系は、剛体基礎も多質点系でモデル化することで、全体を多質点系の運動方程式で表現できる。

### 3.1 補助記事 1 剛体の並進・回転連成方程式の幾何学的関係

ここでは、重心と上端の運動方程式を次式のように簡略表現する。

$$m_G \ddot{\mathbf{y}}_G + \mathbf{k}_G \mathbf{y}_G = \mathbf{Q}_G, \quad m_1 \ddot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{k}_1 \mathbf{y}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (\text{A3.1.1-1})$$

剛体なので、2つの運動方程式は独立ではなく、1点の運動から他点の運動は、幾何学的関係から決まる。具体的に示すと、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (l - z_c) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_G \\ \theta_G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_G \\ \theta_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(l - z_c) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A3.1.1-2a})$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{P}_{1G} \mathbf{y}_G, \quad \mathbf{y}_G = \mathbf{P}_{G1} \mathbf{y}_1 \quad (\text{A3.1.1-2b})$$

外力に関しても、外力項を  $Q_G, M_G, Q_1, M_1$  とすると、

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(l - z_c) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_G \\ M_G \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_G \\ M_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (l - z_c) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A3.1.1-3a})$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_{1G} \mathbf{Q}_G, \quad \mathbf{Q}_G = \mathbf{P}_{G1} \mathbf{Q}_1 \quad (\text{A3.1.1-3b})$$

これらの幾何学的関係式から、外力項と変位の伝達行列には、逆行列が転置行列になるという次式の関係が成立していることがわかる。

$$\mathbf{P}_{1G}^{-1} = \mathbf{P}_{1G}^T, \quad \mathbf{P}_{G1}^{-1} = \mathbf{P}_{G1}^T \quad (\text{A3.1.1-4})$$

この幾何学的関係式を重心の運動方程式に代入すれば、次式の上端の運動方程式が得られる。

$$(\mathbf{p}_{G1}^T \mathbf{m}_G \mathbf{p}_{G1}) \ddot{\mathbf{y}}_1 + (\mathbf{p}_{G1}^T \mathbf{k}_G \mathbf{p}_{G1}) \mathbf{y}_1 = \mathbf{Q}_1 \quad (\text{A3.1.1-5a})$$

$$\mathbf{m}_1 \ddot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{k}_1 \mathbf{y}_1 = \mathbf{Q}_1$$

ここに、

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{p}_{G1}^T \mathbf{m}_G \mathbf{p}_{G1}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_{G1}^T \mathbf{k}_G \mathbf{p}_{G1} \quad (\text{A3.1.1-5b})$$

## 3.2 埋設基礎の複素ばねと有効入力地震動の具対例

### (1) 有限要素法による切欠き型境界法の計算例

ここでは、図 3.2-1 に示すような埋設剛体基礎底面の有効入力地震動  $u_K, \theta_K$  と地盤の複素ばね係数  $K_H, K_{HR}, K_R$  の振動数特性を軸対称有限要素で求めた数値計算例を示す。

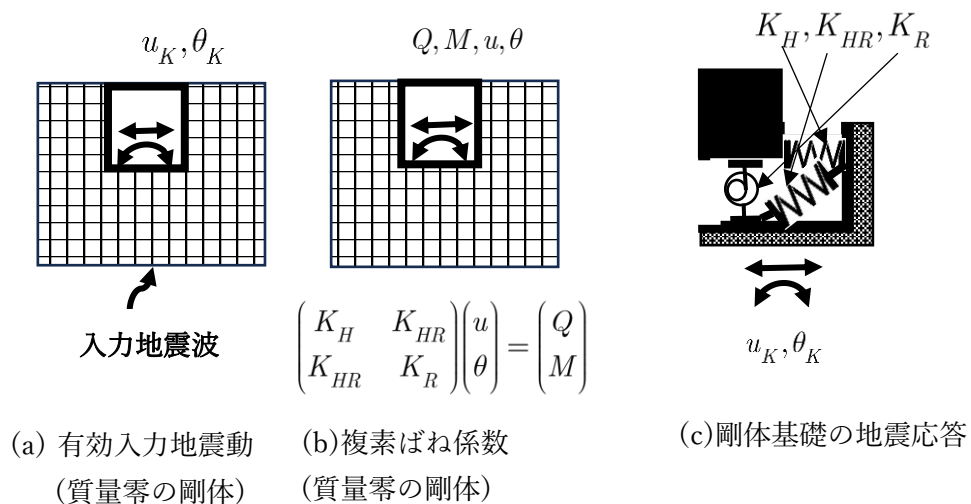


図 3.2-1 埋設剛体基礎底面の有効入力地震動と地盤の複素ばね係数を用いた剛体基礎の地震応答モデル



ここで示す数値計算例は、日本建築学会(2006)に示されている図 3.2-2 と表 3.2-1 に

示す 2 層地盤中のものを用いた。

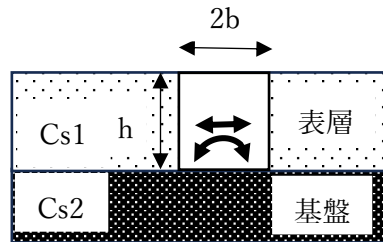


図 3.2-2 2 層地盤中の埋込み円柱剛体基礎(半径  $r$ :埋込み深  $h$ )  
(等価面積正方形  $2b$ ;  $4b^2 = \pi r^2, b = r\sqrt{\pi} / 2 \simeq 0.89r$ )

表 3.2-1 2 層地盤中の埋込み円柱剛体基礎のパラメータ

|                   |           |               |
|-------------------|-----------|---------------|
| 埋込み深/基礎半幅         | $h/b$     | 0.4, 0.8, 1.2 |
| 表層 S 波速度/基盤 S 波速度 | $Cs1/Cs2$ | 0.5           |
| 2 層のポアソン比         |           | 0.45          |
| 2 層の材料減衰定数        |           | 2%            |

また、基礎底面の地盤複素ばね係数と有効入力地震動は、以下の無次元振動数と無次元化パラメータを用いて無次元化した結果を示す。ただし、有効入力地震動は自然地盤地表面の地震動変位で基準化している。

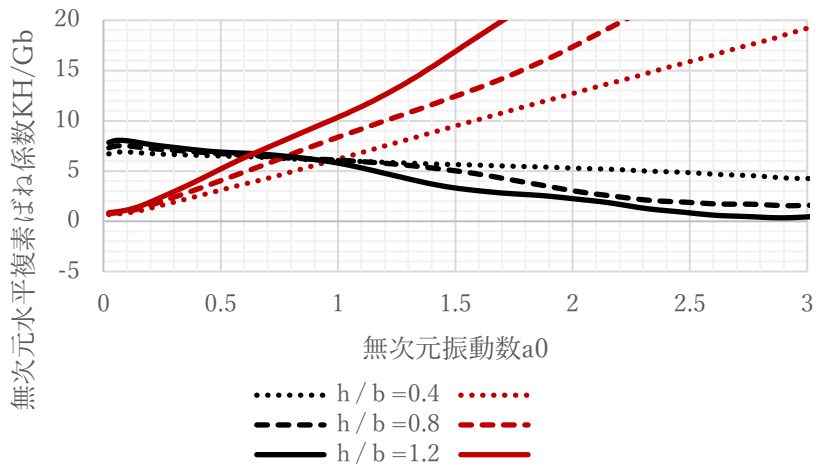
|                  |                           |                       |
|------------------|---------------------------|-----------------------|
| 無次元振動数           | $a_0 = \omega b / C_{s2}$ | $\omega$ : 振動数(rad/s) |
| 無次元水平複素ばね係数      | $K_H / (Gb)$              | $C_{s2}$ :基盤の S 波速度   |
| 無次元回転複素ばね係数      | $K_R / (Gb^3)$            | $G$ : 基盤のせん断剛性        |
| 無次元水平・回転連成複素ばね係数 | $K_{HR} / (Gb^2)$         | $b$ : 基礎半幅            |
| 基準化水平有効入力地震動     | $u_K / u_0$               | $u_0$ :自然地盤地表面変位      |
| 基準化回転有効入力地震動     | $\theta_K / u_0$          |                       |

このモデルの表層地盤のせん断1次固有振動数( $\omega_g = 2\pi C_{s1} / 4h$ )は、上記の無次元振動数で示すと、以下のようなになる。

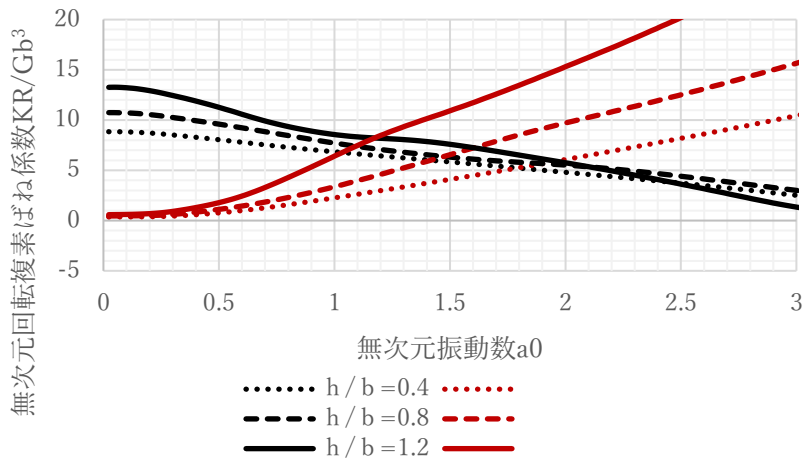
$$h/b = 0.4 : a_{0g} = 1.96$$

$$h/b = 0.8 : a_{0g} = 0.98$$

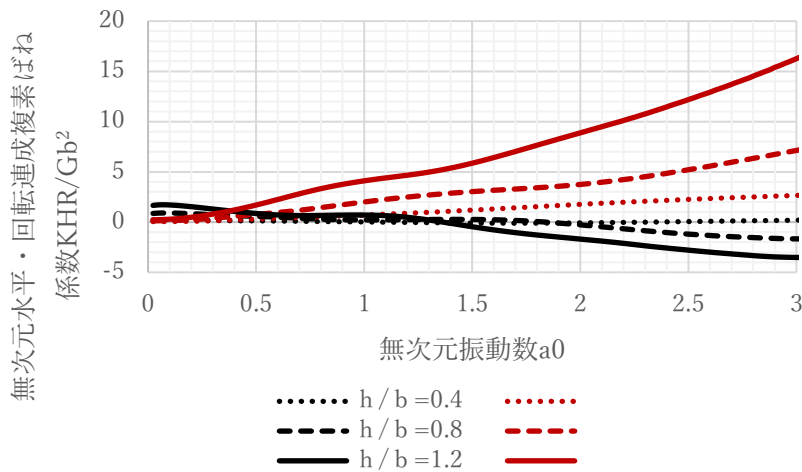
$$h/b = 1.2 : a_{0g} = 0.65$$



(a) 水平複素ばね係数



(b) 回転複素ばね係数



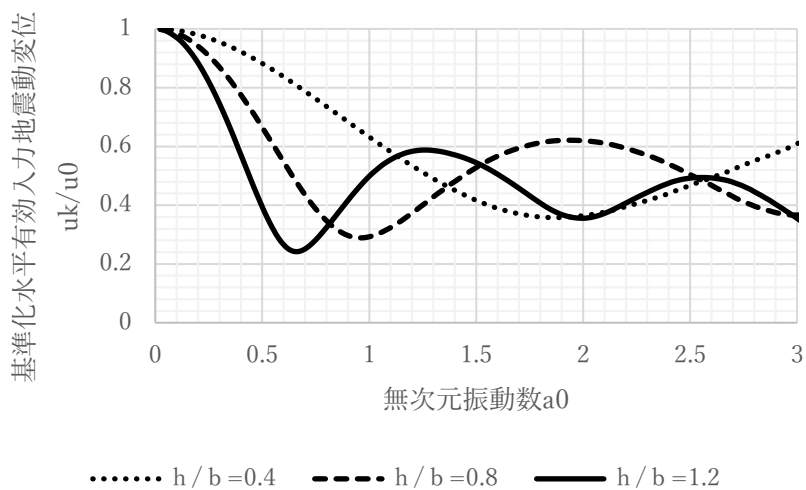
(c) 水平・回転連成複素ばね係数

図 3.2-3 埋込み深/基礎半幅  $h/b$  毎の基礎底面の無次元複素ばね係数と無次元振動数の関係(黒：実部、赤：虚部)

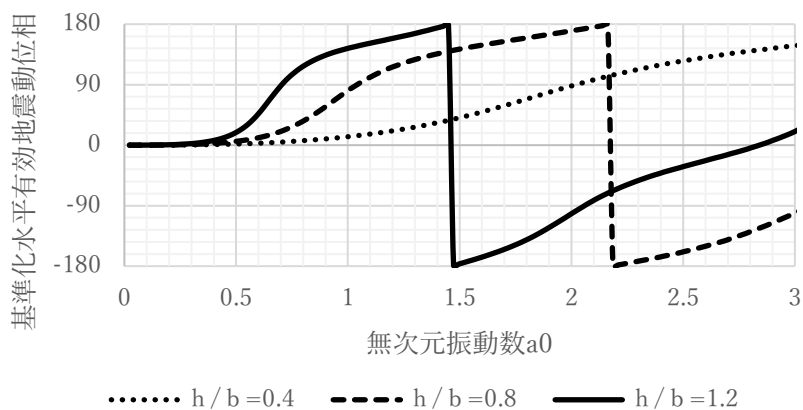
図 3.2-3 に埋込み深/基礎半幅  $h/b$  毎の無次元複素ばね係数と無次元振動数の関係を示す。図 3.2-3 から、地盤のばね係数を表す実部(黒)は、振動数増加につれて小さくなること、地盤への地下逸散減を表す虚部(赤)は、振動数増加につれて比例的に大きくなることからわかる。また、埋設深さが深いほど実部と虚部は大きくなることからわかる。

表層地盤のせん断 1 次固有振動数の関係では、この固有振動数までは、波動はスタンディング波(standing wave:表層地盤の基礎と表面間の定在波で水平方向に進行しない波)が主であるため、基礎からの波動は水平方向に進行しない。このため、表層地盤のせん断 1 次固有振動数までは、基礎への地下逸散減衰のみとなり、水平方向への地下逸散減衰は生じない。この振動数より高い振動数では、基礎からの波動は基礎の水平方向に進行するので水平方向の地下逸散減衰が大きくなる。特に、深い基礎と表層地盤の 1

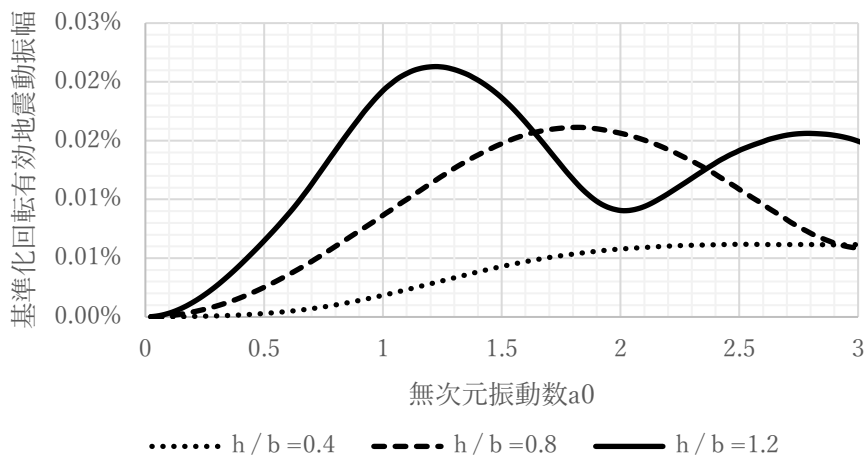
次固有振動モードを励起しやすい基礎の回転モードの場合( $h/b=1.2$ )に、この現象が顕著になる。例えば、図 3.2-3(b)の回転複素ばね係数の虚数部(減衰係数)は、 $a_{0g} = 0.65$ 以上から急に大きな傾きになって振動数とともに増加している。実数部の回転ばね係数は、 $a_{0g} = 0.65$ までの減少率は大きい、それ以降の振動数の減少率は小さい。



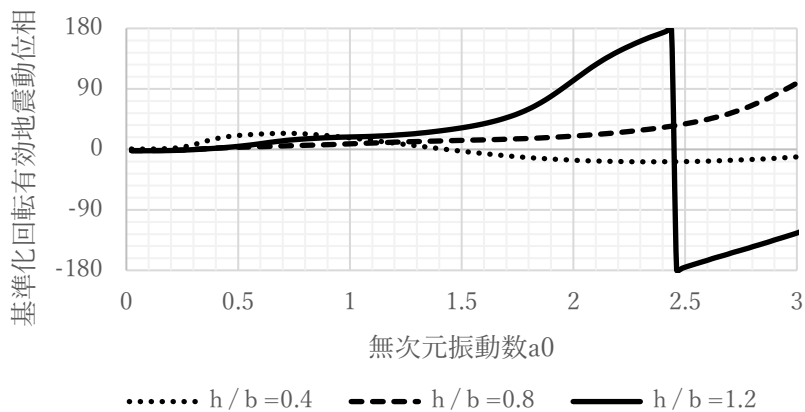
(a) 水平有効入力地震動振幅



(b) 水平有効入力地震動位相角



(c)回転有効入力地震動振幅



(d)回転有効入力地震動位相角

図 3.2-4 埋込み深/基礎半幅  $h/b$  毎の基礎底面の標準化有効入力地震動と無次元振動数の関係

図 3.2-4 に埋込み深/基礎半幅  $h/b$  毎の標準化有効入力地震動と無次元振動数の関係を示す。この図から、水平成分の振幅は、振動数零で地表面地震動変位と同じであるが、振動数増加により振幅が波打ちながら低下すること、回転成分の振幅は、振動数増加により波打ちながら増加するが、最大でも 0.02% で小さいことがわかる。

表層地盤のせん断 1 次固有振動数の関係では、水平有効入力地震動は、1 からせん断 1 次固有振動数( $a_{0g}$ )まで減少し、 $u_K / u_0 = 0.5$  程度を平均値として振動波形となっている。回転有効入力地震動では、振動数零で零であり、振動数の増加とともに増加し約  $2a_{0g}$  で最大値となる。この振動数以降は振動波形となっている。

## (2) 複素ばね係数の評価式

ここでは、図 3.2-5 に示すような円筒剛体基礎の底面から高さ  $Z_C$  の複素ばね係数と基礎底面の有効入力地震動の評価式を示す(原田ら(1983))。

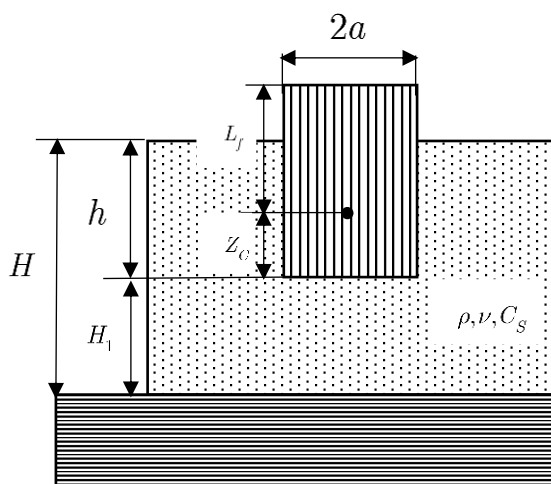


図 3.2-5 円筒剛体基礎モデルと幾何学的記号

( $\rho, \nu, C_s$  : 表層地盤の密度, ポアソン比, S 波速度)

半径  $a$  の円筒剛体基礎の複素ばね係数は、次式の基礎底面の複素ばね係数と基礎側壁の単位深さ当たりの複素ばね係数を Winkler ばねモデルとして求める。

基礎底面の複素ばね係数：

$$\begin{aligned} k_S &= Ga(c_{u1} + ic_{u2}) \\ k_{RB} &= Ga^3(c_{r1} + ic_{r2}) \end{aligned} \quad (3.2-1a)$$

ここに、 $G$  は基礎底面の地盤のせん断弾性剛性を表す。また、上式の係数  $c_{jk}$  は剛体円盤の無次元複素ばね係数と呼ばれ、これらの具体式は後の(a)項に示す。

基礎側壁の単位深さ当たりの複素ばね係数：

$$\begin{aligned} k_H &= G_s(s_{u1} + is_{u2}) \\ k_{RS} &= G_s a^2(s_{r1} + is_{r2}) \end{aligned} \quad (3.2-1b)$$

ここに、 $G_s$  は基礎側壁の地盤のせん断弾性剛性を表す。また、上式の係数  $s_{jk}$  は基礎側壁の無次元複素ばね係数で、これらの具体式は後の(b)項に示す。

式(3.2-1a)と式(3.2-1b)の複素ばね係数をWinklerばねモデルとすると、図3.2-5の基礎底面から  $Z_C$  の位置における円筒剛体基礎の複素ばね係数は、次式のように求められる。

動的ばね係数( $Z_C$  の位置)：

$$k_{xx} = Ga \left( c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{u1} \right) \quad (3.2-2a)$$

$$k_{rr} = Ga^3 \left( c_{r1} + \left( \frac{Z_C}{a} \right)^2 c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r1} + \frac{G_s}{G} \delta \left( \frac{\delta^2}{3} + \frac{Z_C^2}{a^2} - \delta \frac{Z_C}{a} \right) s_{u1} \right) \quad (3.2-2b)$$

$$k_{xr} = -Ga \left( Z_C c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) s_{u1} \right) \quad (3.2-2c)$$

動的減衰係数( $Z_C$  の位置)：

$$c_{xx} = \frac{Ga}{\omega} \left( c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta s_{u2} \right) \quad (3.2-2d)$$

$$c_{rr} = \frac{Ga^3}{\omega} \left( c_{r2} + \left( \frac{Z_C}{a} \right)^2 c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r2} + \frac{G_s}{G} \delta \left( \frac{\delta^2}{3} + \frac{Z_C^2}{a^2} - \delta \frac{Z_C}{a} \right) s_{u2} \right) \quad (3.2-2e)$$

$$c_{xr} = -\frac{Ga}{\omega} \left( Z_C c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) s_{u2} \right) \quad (3.2-2f)$$

ここに、 $\omega$  は振動数、 $\delta = h/a$  である。

### (a) 底面係数 $c_{jk}$ の評価式

この底面係数としては、研究成果の多い地表上に設置された剛体円盤の複素ばね係数を用いる。具体的には次式を用いる(原田ら(1983))。

水平成分：

$$c_{u1} = \frac{8}{2-\nu} \left( 1 + \frac{a}{2H_1} \right), \quad \frac{a}{H_1} \leq 1 \quad (3.2-3a)$$

$$c_{u2} = \begin{cases} 0.53 \frac{\omega a}{C_S} & \nu = 0.0 \\ 0.40 \frac{\omega a}{C_S} & \nu = 0.5 \end{cases}$$

回転成分：



$$c_{r1} = \frac{8}{3(1-\nu)} \left( 1 + \frac{a}{6H_1} \right), \quad \frac{a}{H_1} \leq 1 \quad (3.2-3b)$$

$$c_{r2} = 0.3 \frac{(\omega a / C_s)^3}{(1 + (\omega a / C_s)^2)}$$

ここに、 $\nu, C_s$  は基礎底面が接する地盤のポアソン比と S 波速度、 $H_1$  は基礎底面から基盤までの深さである(図 3.2-5 参照)。

## (b) 側面係数 $s_{jk}$ の評価式

表層地盤の S 波と P 波の 1 次固有振動数  $\omega_g, \omega_p$  を考慮した原田ら(1983)の厳密解に基づく次式の近似式を用いる。表層地盤の 1 次固有振動数よりも低い振動数領域では、表層地盤と地表の間を伝播する Standing wave である。しかし、この 1 次固有振動数よりも高振動数領域では、波動が水平方向に伝播する。したがって、表層地盤の 1 次固有振動数以下では、地下逸散減衰は小さく、表層地盤の材料減衰定数  $D_g$  が主流になる。また、地盤ばね係数も静的ばね係数に近い値となる。一方、表層地盤の 1 次固有振動数よりも高い振動数領域では、地下逸散減衰が主流となり、減衰が大きくなる。また、地盤ばね係数は静的ばね係数の半分近くに低下する。

水平成分：

$$s_{u1} = \left\{ \begin{array}{l} s_u \left( 1 - 0.9 \sqrt{\frac{a}{H}} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^3 \right) \\ s_u \left( 1 - 0.9 \sqrt{\frac{a}{H}} \right) \\ s_u \left( 1.25 - 0.9 \sqrt{\frac{a}{H}} - 0.25 \frac{\omega}{\omega_g} \right) \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\omega}{\omega_g} \leq 1 \\ \text{others} \\ \left. \begin{array}{l} 0.3 \leq \frac{a}{H} \leq 1 \\ 0.47 \leq \nu_s \leq 0.49 \end{array} \right\} 1 \leq \frac{\omega}{\omega_g} \leq 10 \end{array} \right. \quad (3.2-4a)$$

$$s_{u2} = \left\{ \begin{array}{l} s_u \left( 0.24 D_S^{0.2} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^6 \right) \\ s_u \left( 0.25 + \sqrt{\frac{a}{H}} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_g} - 1 \right) + 0.24 D_S^{0.2} \\ s_u \left( 0.3 + 1.2 \sqrt{\frac{a}{H}} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_g} - 1 \right) + 0.24 D_S^{0.2} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\omega}{\omega_g} \leq 1 \\ \text{others} \\ \left. \begin{array}{l} 0.3 \leq \frac{a}{H} \leq 1 \\ 0.47 \leq \nu_s \leq 0.49 \end{array} \right\} 1 \leq \frac{\omega}{\omega_g} \leq 10 \end{array} \right. \quad (3.2-4b)$$

ここに、 $D_S, \nu_s$  は表層地盤のせん断材料減衰定数とポアソン比を表す。また、次式で与えられる係数  $s_u$  は静的無次元ばね係数、 $\omega_g$  は表層地盤の S 波の 1 次固有振動数を表す。

$$s_u = \left( 11 - \frac{1.2}{\nu_s - 0.59} \right) \left( 0.19 + \frac{a}{H} + \frac{0.002}{\nu_s - 0.53} \right) \quad (3.2-4c)$$

$$\omega_g = \frac{\pi C_S}{2H}$$

回転成分：

$$s_{r1} = \begin{cases} s_r \left( 1 - 0.9 \sqrt{\frac{a}{H}} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^3 \right), & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_p} \leq 1 \\ s_r \left( 1 - 0.9 \sqrt{\frac{a}{H}} \right), & 1 \leq \frac{\omega}{\omega_p} \leq 5 \end{cases} \quad (3.2-5a)$$

$$s_{r2} = \begin{cases} s_r 0.41 \sqrt{D_S} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^6, & 0 \leq \frac{\omega}{\omega_p} \leq 1 \\ s_r \left( 0.02 + 1.5 \sqrt{\frac{a}{H}} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_p} - 1 \right) + 0.41 \sqrt{D_S}, & 1 \leq \frac{\omega}{\omega_p} \leq 5 \end{cases} \quad (3.2-5b)$$

ここに、 $D_S, \nu_s$  は表層地盤のせん断材料減衰定数とポアソン比を表す。また、次式で与えられる係数  $s_r$  は静的無次元ばね係数、 $\omega_p$  は表層地盤の P 波の 1 次固有振動数を表す。

$$s_r = \left( 4.7 - \frac{0.56}{\nu_s - 0.51} \right) \left( 0.61 + \frac{a}{H} + \frac{0.08}{\nu_s - 0.64} \right) \quad (3.2-5c)$$

$$\omega_p = \frac{\pi C_P}{2H}$$

図 3.2-6 と図 3.2-7 に近似評価式(3.2-4)の  $s_{jk}$  を  $a/H=0.17, 0.25, 0.5$  毎の基準化水平成分と回転成分の振動数特性を実線で示す。この例題では、材料減衰定数とポアソン比は、 $D_S = 0.05, \nu_s = 0.45$  を用いた。1 点破線は、無限弾性体の剛体円柱の単位長さ当たりの無次元複素ばね係数を求めた Novak の解の近似式を示す(原田ら(1983))。

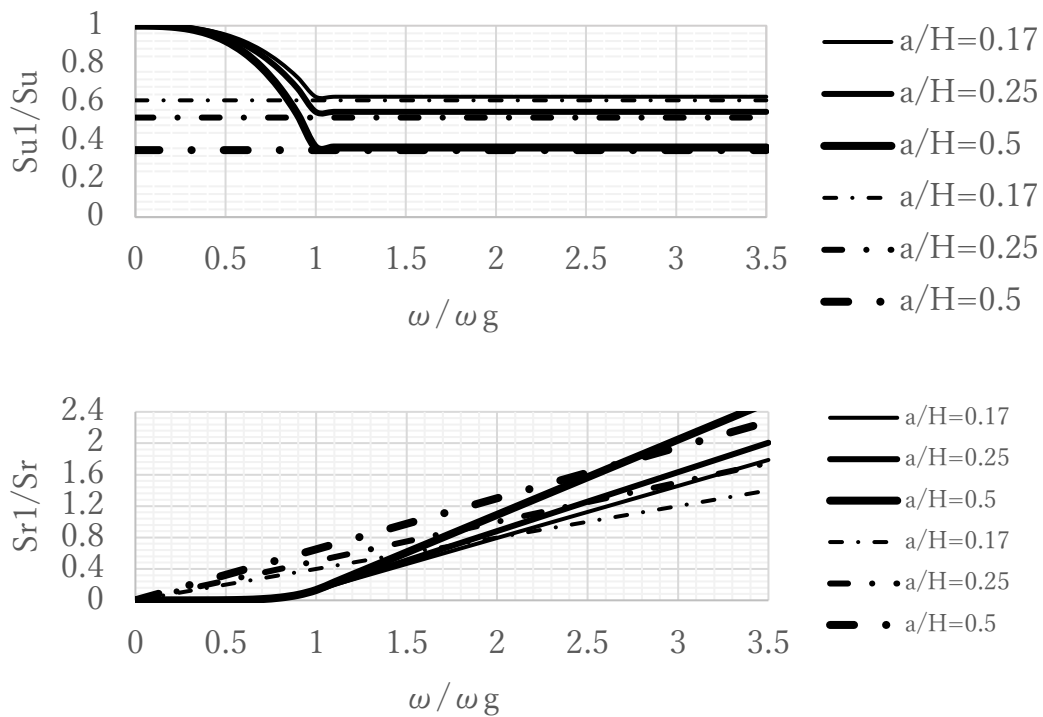


図 3.2-6 基礎側面の  $a/H=0.17, 0.25, 0.5$  毎の標準化水平成分の振動数特性

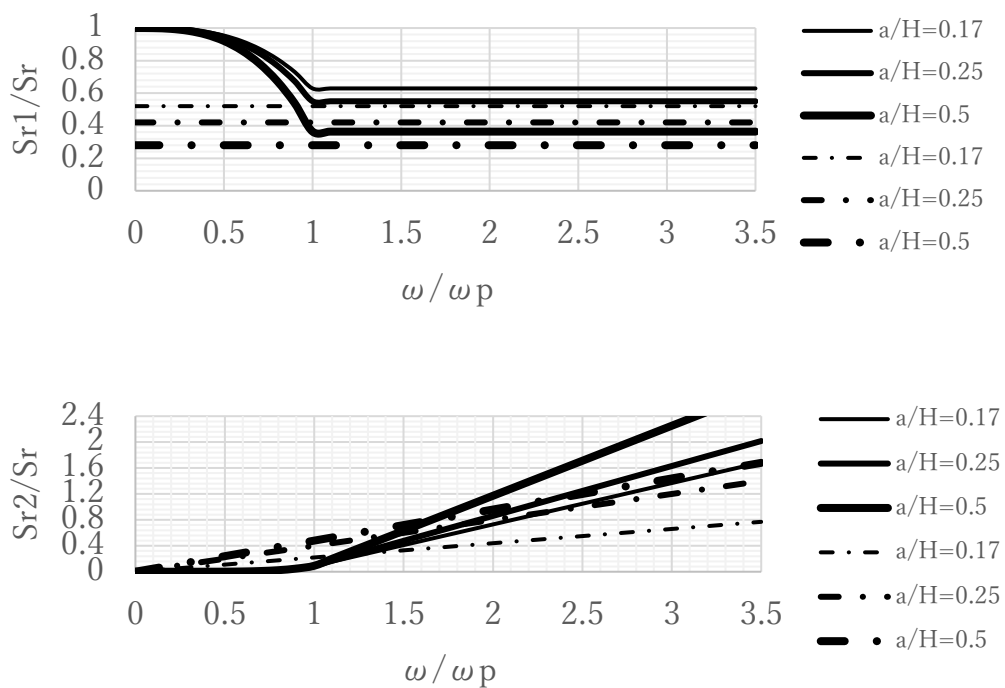


図 3.2-7 基礎側面の  $a/H=0.17, 0.25, 0.5$  毎の標準化回転成分の振動数特性

図 3.2-6 に示す水平成分では、表層地盤の S 波の 1 次固有振動数  $\omega_g$  が影響するが、

図 3.2-7 の回転成分では、表層地盤の P 波の 1 次固有振動数  $\omega_p$  が影響する。

### (3) 有効入力地震動の評価式

直接基礎や杭基礎では、有効入力地震動は基礎底面相当位置の自然地盤上の地震動を用いてもよい。しかし、根入れのあるケーソン基礎のような剛体基礎では、周辺地盤に比べ剛性が大きいので、基礎質量零の地震応答から有効入力地震動を考慮する方が実現象に近い。その近似式として、次式が与えられる(原田ら(1985))。

$$\frac{u_K(\omega)}{u_A(\omega)} = \begin{cases} \left( \frac{\sin(\omega h / C_S)}{\omega h / C_S} \right)^2 & \omega < \omega_S \\ 0.45 & \omega \geq \omega_S \end{cases} \quad (3.2-6)$$

$$\omega_S = \frac{\pi C_S}{2h}$$

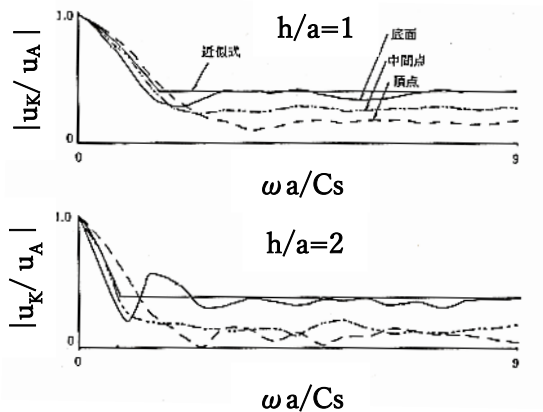


図 3.2-8 基礎底面と中間点・頂点の有効入力地震動伝達関数の絶対値と近似式の比較

3.2 節で示した有限要素法による埋込み剛体基礎の有効入力地震動は、水平成分とともに回転成分があるため、基礎の底面や中間点あるいは上端点における有効入力地震動の水平変位と自然地盤の地表面変位  $u_A(\omega)$  との伝達関数は、それぞれ異なる。

しかし、数値計算によると、それぞれの伝達関数絶対値の無次元振動数  $\omega a / C_g = 0 \sim 9$  は、図 3.2-8 に示すように、特に、高振動数領域で異なるが、式(3.2-6)はそれらの上限値を与えていることがわかる。したがって、式(3.2-6)を有効入力地震動の伝達関数として用いることができる。

### 3.3 複素ばね係数と付加質量

図 3.3-1 に示すような質量  $m$  と地盤の複素ばね係数  $K_f = k(\omega) + i\omega c(\omega)$  と有効地震動  $u_K$  から成るある振動モードの基礎の運動方程式を考える。

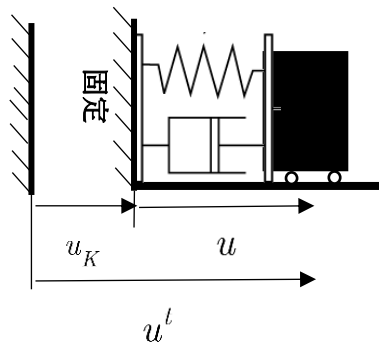


図 3.3-1 有効入力地震動を受ける 1 質点系モデルとその記号

基礎の絶対変位  $u^t$  は、次式のように有効入力地震動と質点の相対変位の和で与えられる。

$$u^t = u_K + u \quad (3.3-1)$$

振動数領域の運動方程式は、次式となる。

$$-\omega^2 m u^t + (k(\omega) + i\omega c(\omega))u = 0 \quad (3.3-2a)$$

式(3.3-1)の絶対変位を式(3.3-2a)に代入すると、次式の相対変位の運動方程式が得られる。

$$(-\omega^2 m + k(\omega) + i\omega c(\omega))u = \omega^2 m u_K \quad (3.3-2b)$$

地盤の複素ばね係数  $K_f$  の実数部  $k(\omega)$  は、低振動数領域で振動数  $\omega$  の減少関数となるので、この関数を次式のように近似する。

$$k(\omega) = k_0 - m_0 \omega^2 \quad (3.3-3)$$

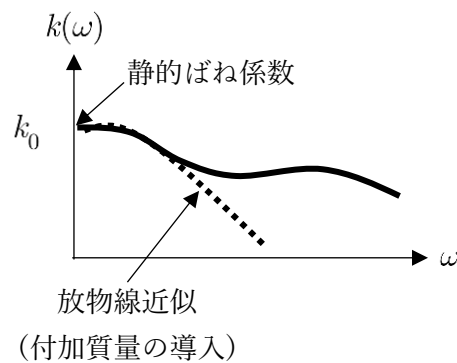


図 3.3-1 典型的な動的ばね係数の振動数依存性とその放物線近似(付加質量の導入)

式(3.3-3)を式(3.3-2b)に代入すると、次式が得られる。

$$(-\omega^2(m + m_0) + k_0 + i\omega c(\omega))u = \omega^2 m u_K \quad (3.3-4)$$

ここに、 $m_0$ を付加質量と言う。この付加質量は地盤の複素ばね係数の実部の振動数特性を近似したもので、地震時相互作用を考慮した質量 $m$ の正しい運動方程式は、式(3.3-2b)または式(3.3-4)である。たまた、付加質量分を加えた基礎の質量を $(m + m_0)$ と思込み、慣性力が $-\omega^2(m + m_0)u^t$ 、地盤反力を $(k_0 + i\omega c(\omega))u$ として次式の運動方程式を使う場合がある。

$$(-\omega^2(m + m_0) + k_0 + i\omega c(\omega))u = \omega^2(m + m_0)u_K \quad (3.3-5)$$

しかし、式(3.3-5)は誤りの運動方程式である。このことは、正しい運動方程式(3.3-2b)または式(3.3-4)を導いた過程を考えれば、自明である。誤りの式(3.3-5)では右辺の外力項 $\omega^2(m + m_0)u_K$ は、正しい運動方程式(3.3-2b)または式(3.3-4)の外力項 $\omega^2 m u_K$ に比べると、付加質量分だけ大きくなる。また、付加質量を使う場合、高振動数領域の地盤ばね係数を過少評価するため、地盤ばねの振動数特性を近似するために導入する付加質量を使う時には、注意が必要である。

なお、以下の 3.3 補助記事 1 に示すように水中基礎の地震応答モデルの場合、水の抵抗抗力として Morison 式を使うので水の付加質量と減衰係数が導入される。この場合、地震外力は、水の付加質量と減衰係数分だけ大きくなることを注意しておく。



### 3.3 補助記事 1 流体中の円柱基礎の地震時運動方程式

図 A3.3-1-1 のような水中・海洋中構造物の多質点系の地震応答を取り上げる。この場合、Morison 式による水の抵抗力は、次式のように流体と構造物の相対速度や相対加速度に置き換える必要がある。

$$F = C_m (\dot{v}_x - \ddot{u}_x^t) + C_d (v_x - \dot{u}_x^t) |v_x - \dot{u}_x^t| \quad (\text{A3.3-1-1a})$$

$$u_x^t = u_g + u_x$$

ここに、 $C_m, C_d$  は、水の付加質量と減衰係数を表す。線形化した場合、等価係数は、

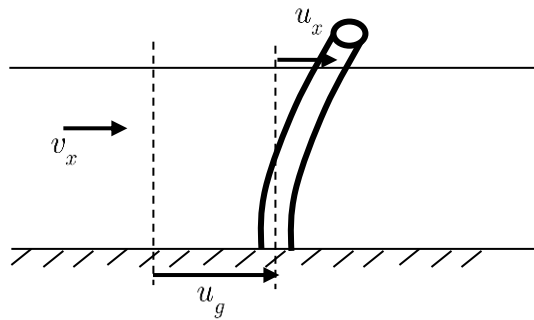


図 A3.3-1-1 流速・地震動を受ける水中円柱の応答と記号

次式で与えられる(原田・本橋(2020))。

$$C_{deq} = \frac{8}{3\pi} C_d \omega u_0 = \frac{8}{3\pi} C_d \dot{u}_x = 0.85 C_d \dot{u}_x \quad (\text{A3.3-1-1b})$$

$$F = C_m (\dot{v}_x - \ddot{u}_x^t) + C_{deq} (v_x - \dot{u}_x^t)$$

ここに、 $u_g$  と  $u_x$  は、地盤の地震時水平変位、構造物と地盤の相対変位を表すため、

$u_x^t$  は構造物の絶対変位を意味する。

上式の Morison 式を使うと、図 A3.3-1-1 のような水中の多質点系の水平地震応答の運動方程式は、次式のようにになる。ここでは、速度の 2 乗に比例する減衰力は線形化している。円柱の水中部分を多質点系モデルとしている。

$$m\ddot{u}_x^t + c\dot{u}_x + ku_x = C_m(\dot{v}_x - \ddot{u}_x^t) + C_{deq}(v_x - \dot{u}_x^t) \quad (\text{A3.3-1-2a})$$

$$u_x^t = u_g + u_x$$

この関係を考慮し、 $\mathbf{1}$  を単位ベクトルとし、相対変位の運動方程式にすれば、

$$(m + C_m)\ddot{u}_x + (c + C_{deq})\dot{u}_x + ku_x = -(m + C_m)\mathbf{1}\ddot{u}_g - C_{deq}\mathbf{1}\dot{u}_g + C_m\dot{v}_x + C_{deq}v_x \quad (\text{A3.3-1-2b})$$

流速  $v_x$  が零の場合、上式は、

$$(m + C_m)\ddot{u}_x + (c + C_{deq})\dot{u}_x + ku_x = -(m + C_m)\mathbf{1}\ddot{u}_g - C_{deq}\mathbf{1}\dot{u}_g \quad (\text{A3.3-1-2c})$$

流速の無い水中の多質点系の地震応答の運動方程式では、付加質量  $C_m$  と付加減衰係数  $C_{deq}$  が気中の運動方程式の質量行列と減衰行列に加えられる。右辺の外力項は、地盤加速度による慣性力  $(m + C_m)\mathbf{1}\ddot{u}_g$  と地盤速度の減衰力  $C_{deq}\mathbf{1}\dot{u}_g$  の和である。

### 3.4 地震時相互作用を考慮した等価 1 質点系モデル

地震時相互作用を設計に導入するために、図 3.4-1 示すような地盤・剛体基礎上の 1 質点振動系を考察する。図 3.4-1 の解析モデルは、地盤の複素ばね係数と有効入力地震

動を用いて図 3.4-2(b)に示すような 3 自由度の複素ばね係数・質点系モデルに置き換えられる。

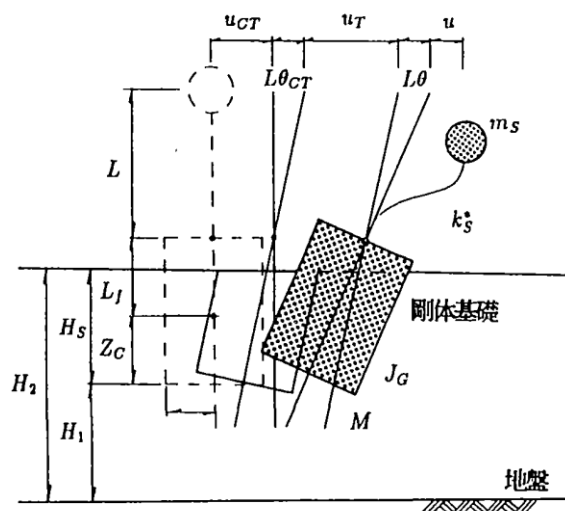


図 3.4-1 地盤・剛体基礎上の 1 質点振動系モデルとその記号

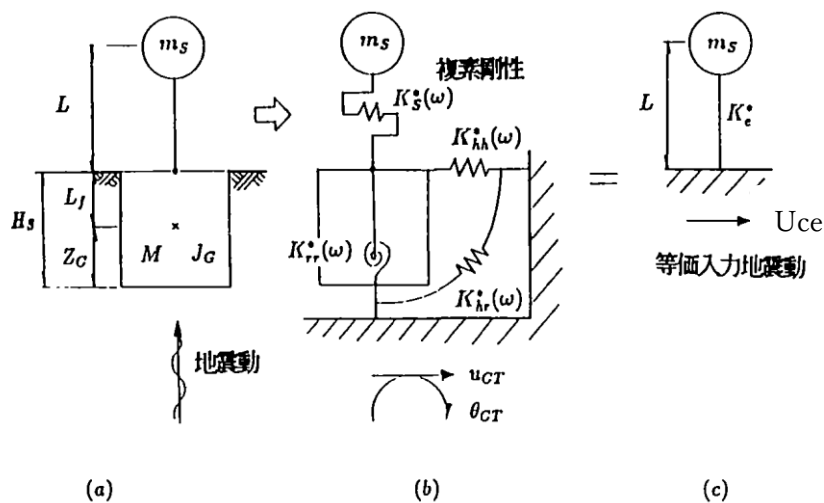


図 3.4-2 基礎上面における地震時相互作用モデルと等価 1 質点モデル

図 3.4-2 の基礎寸法や 1 質点の高さは(a)に示すが、(b)の物理量の記号は、以下のようである。

$M, J_G$  : 基礎の重心の質量と慣性モーメント

$m_S, K_S^*$  : 1 質点系の質量と複素ばね係数 ( $K_S^* = k + i\omega c$ )

$K_{hh}^*, K_{rr}^*, K_{hr}^*$  : 基礎上端の地盤の水平、回転、連成の複素ばね係数

$u_{CT}, \theta_{CT}$  : 基礎上端の水平と回転の有効入力地震動

図 3.4-1 の地震応答変位を用いて、図 3.4-2(b) に示すように基礎上端および 1 質点の力のつり合い式から、振動数領域における 3 自由度系の相対変位に関する運動方程式は、次式のように求められる。

$$\begin{pmatrix} D_{SS} & D_{SH} & D_{SR} \\ & D_{HH} & D_{HR} \\ \text{Sym.} & & D_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_T \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^2 m_S \\ \omega^2 (m_S + M) \\ \omega^2 (m_S L - ML_f) \end{pmatrix} u_{CT} + \begin{pmatrix} \omega^2 m_S L \\ \omega^2 (m_S L - ML_f) \\ \omega^2 (m_S L^2 + J_G + ML_f^2) \end{pmatrix} \theta_{CT} \quad (3.4-1a)$$

ここに、

$$\begin{pmatrix} D_{SS} & D_{SH} & D_{SR} \\ & D_{HH} & D_{HR} \\ \text{Sym.} & & D_{RR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 m_S + K_S^*(\omega) & -\omega^2 m_S & -\omega^2 m_S L \\ & -\omega^2 (m_S + M) + K_{hh}^*(\omega) & -\omega^2 (m_S L - ML_f) + K_{hr}^*(\omega) \\ \text{Sym.} & & -\omega^2 (m_S L^2 + J_G + ML_f^2) + K_{rr}^*(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.4-1b)$$

上式を橋脚の相対変位  $u$  に関して解くと、次式のように整理できる。

$$(-\omega^2 m_S + K_E^*)U_E = \omega^2 m_S U_{CE} \quad (3.4-2a)$$

ここに、

$$K_E^* = \frac{AK_S^*}{A + BK_S^*}, \quad U_E = \frac{K_S^*}{K_E^*} u \quad (3.4-2b)$$

$$U_{CE} = \frac{C}{A} u_{CT} + \frac{D}{A} L\theta_{CT}$$

また、

$$A = MJ_G \omega^4 - (J_G K_{hh}^* + ML_f(L_f K_{hh}^* + 2K_{hr}^*) + MK_{rr}^*)\omega^2 + (K_{hh}^* K_{rr}^* - K_{hr}^{*2})$$

$$B = -(J_G + M(L + L_f)^2)\omega^2 + (K_{rr}^* + K_{hh}^* L^2 - 2K_{hr}^* L) \quad (3.4-2c)$$

$$C = -(J_G K_{hh}^* + M(L + L_f)(L_f K_{hh}^* + K_{hr}^*))\omega^2 + (K_{hh}^* K_{rr}^* - K_{hr}^{*2})$$

$$D = -\frac{1}{L}(J_G K_{hr}^* + M(L + L_f)(L_f K_{hr}^* + K_{rr}^*))\omega^2 + (K_{hh}^* K_{rr}^* - K_{hr}^{*2})$$

ここに、係数  $A, B, C, D$  は地盤・基礎系の諸定数(基礎の質量  $M, J_G$ 、基礎・地盤系の複素ばね係数  $K_{hh}^*, K_{rr}^*, K_{hr}^*$ 、基礎重心から基礎上端までの距離  $L_f$ )と 1 質点系の高さ  $L$  の

みの関数であり、これらには 1 質点系の質量とばね係数および減衰係数は含まれない。

したがって、式(3.4-2a)は、図 3.4-2(c)に示すような基礎固定の 1 質点系に有効地震動

$U_{CE}$  が作用する時の振動数領域の運動方程式である。式(3.4-2b)で与えられる

$K_E^*, U_{CE}, U_E$  は、地盤と基礎および橋脚の地震時相互作用を考慮した橋脚の複素ばね係

数、橋脚への有効入力地震動および橋脚の相対変位である。以後、これらを等価複素ば

ね係数、等価有効入力地震動、等価相対変位と呼ぶ。これら等価複素ばね係数  $K_E^*$ 、等価有効入力地震動  $U_{CE}$  を調べると、基礎固定の 1 質点系に及ぼす地盤と基礎の地震時相互作用の影響がわかる。

また、式(3.4-2b)で与えられる等価複素ばね係数と等価有効入力地震動は、次のような物理量として定義できる。

・**等価有効入力地震動**： 図 3.4-1 において、上部 1 質点の質量を零としたときの上部 1 質点の地震応答絶対変位。

・**等価複素ばね係数**： 図 3.4-1 において、地震入力のない状態で、上部 1 質点の質量を零とし、この点に単位の水平変位を与えるのに必要な力。

このような物理的定義は、有効入力地震動と地盤の複素ばね係数の定義を導いたのとまったく同じ考え方から、導くことができるが、上記の定義に従って式(3.4-1a)を展開すると、式(3.4-2b)の等価複素ばね係数と等価有効入力地震動が求められる。なお、等価相対変位  $U_E$  は、実際の相対変位  $u$  と式(3.4-2b)の関係にあるので、橋脚に作用する力は等価相対変位と等価複素ばね係数の積で与えられる。また、上部質点の地震応答絶対変位は、 $U_{CE} + U_E$  なので、これは等価モデルの上部質点の地震応答絶対変位に等しい。

(3.4-2a)から、地震時相互作用を考慮した上部 1 質点系の固有周期  $T$  と減衰定数  $h$  は次式で求められる。

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_S}{\text{Re}(K_E^*)}}, \quad h = \frac{\text{Im}(K_E^*)}{2\omega \sqrt{m_S \text{Re}(K_E^*)}} \quad (3.4-3)$$

ここに、 $\text{Re}(K_E^*)$ と $\text{Im}(K_E^*)$ は、等価複素ばね係数の実部と虚部を表す。等価複素ばね係数は振動数の関数なので、式(3.4-3)で与えられる固有周期は繰り返し計算で収束したときの振動数に対応する周期を意味する。この振動数の時の値として減衰定数が与えられる。

式(3.4-3)の固有周期と減衰定数および式(3.4-2b)の等価有効入力地震動が、地盤・基礎・上部構造系の特性とどのようになっているかが解れば、応答スペクトルを用いた現行の耐震設計の手順の中に地震時相互作用の効果が簡単に取り込めることになる。具体的な結果(原田ら(1994))は、3径間固定橋脚のCase1の例では、図3.4-3に示すように基礎のみの1次固有振動数より低い振動数領域では、1質点系の等価ばね係数 $k_E / k_S$ は、振動数零の時の値とほぼ同じである。また、高振動数領域では、基礎固定時の橋脚のばね係数 $k_E = k_S$ であることがわかった(原田ら(1994))。

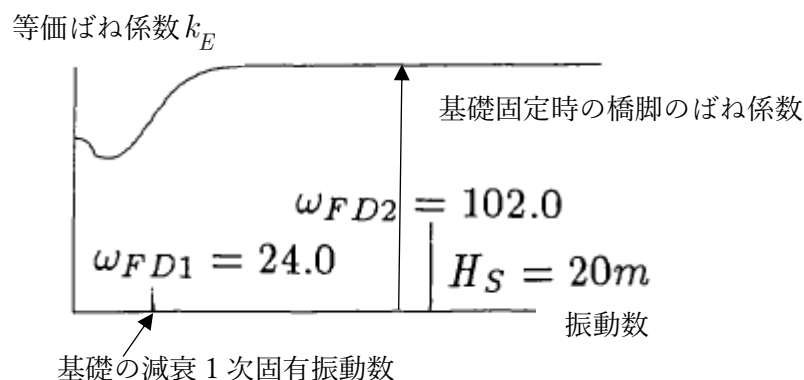


図 3.4-3 等価 1 質点系の等価ばね係数の振動数依存性の例

さらに、直接基礎や杭基礎では、基礎の質量が小さいので基礎のみの固有振動数が高くなり、1質点系の等価ばね係数は、振動数零の値で近似できることもわかった。このような数値計算例と式(3.4-2)の理論式の検討から、以下のような等価1質点系の固有周期と減衰定数の補正式が導かれる(原田ら(1994))。

また、上記の等価1質点系の固有周期と減衰定数の考え方は、連続橋の変位モード関数を導入することにより、連続橋の等価1質点系の固有周期と減衰定数を求めことへも適用できる(原田ら(1994))。

### (1) 直接基礎、杭基礎を含み基礎の質量が小さい場合

この場合、基礎の厚さは小さいので、水平・回転の連成複素ばね係数は零と置ける。また、上部1質点系の質量に比べ基礎の質量は小さいと仮定できるので、式(3.4-2c)の基礎の質量と慣性モーメントを零と置くと、次式が得られる。

$$A = K_{hh}^* K_{rr}^*, \quad B = K_{rr}^* + K_{hh}^* L^2, \quad C = D = K_{hh}^* K_{rr}^* \quad (3.4-4a)$$

式(3.4-2b)の等価複素ばね係数  $K_E^* = k_E + i\omega c_E$  は、次式のように求められる。



$$K_E^* = \frac{AK_S^*}{A+BK_S^*} = \frac{1}{\frac{1}{K_S^*} + \frac{1}{K_{hh}^*} + \frac{L^2}{K_{rr}^*}}$$

$$K_E^* = k_E + i\omega c_E = m_S(\omega_E^2 + i2h_E\omega\omega_E)$$
(3.4-4b)

$$\omega_E = \sqrt{\frac{k_E(\omega_E)}{m_S}}, \quad h_E = \frac{c_E(\omega_E)}{2\sqrt{m_S k_E(\omega_E)}}$$

$$K_S^* = k_S + i\omega c_S, \quad K_{jk}^* = k_{jk}(\omega) + i\omega c_{jk}(\omega)$$

同様に 1 質点系との類似により、各固有振動数と減衰定数を次式のように定義する。

$$\omega_S = \sqrt{\frac{k_S}{m_S}}, \quad \omega_h = \sqrt{\frac{k_{hh}(\omega_h)}{m_S}}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k_{rr}(\omega_r)}{m_S L^2}}$$
(3.4-4c)

$$h_S = \frac{c_S}{2\sqrt{m_S k_S}}, \quad h_h = \frac{c_{hh}(\omega_h)}{2\sqrt{m_S k_{hh}(\omega_h)}}, \quad h_r = \frac{c_{rr}(\omega_r)}{2\sqrt{m_S L^2 k_{rr}(\omega_r)}}$$

ここで、式(3.4-4b)の上段式は、次式である。

$$\frac{1}{K_E^*} = \frac{1}{K_S^*} + \frac{1}{K_{hh}^*} + \frac{L^2}{K_{rr}^*}$$
(3.4-5a)

式(3.4-4c)を使うと、上式は次式のように固有振動数 $\omega_J$ で表せる。

$$\frac{1}{\omega_E^2} - i2\omega \frac{h_E}{\omega_E^3} = \left( \frac{1}{\omega_S^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \right) - i2\omega \left( \frac{h_S}{\omega_S^3} + \frac{h_h}{\omega_h^3} + \frac{h_r}{\omega_r^3} \right)$$
(3.4-5b)

上式の両辺が等しいためには、次式が成立しなければならない。

$$\frac{1}{\omega_E^2} = \frac{1}{\omega_S^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2}, \quad \frac{h_E}{\omega_E^3} = \frac{h_S}{\omega_S^3} + \frac{h_h}{\omega_h^3} + \frac{h_r}{\omega_r^3}$$
(3.4-5c)

上式を固有周期 $T_J = 2\pi / \omega_J$ で整理すると、次式が得られる。

$$T(=T_E) = \beta_1 T_S, \quad h(=h_E) = \frac{1}{\beta_1^3} h_S + h_1 \quad (3.4-6a)$$

$$\beta_1 = \sqrt{1 + k_S \left( \frac{1}{k_{hh}} + \frac{L^2}{k_{rr}} \right)}, \quad h_1 = \frac{1}{\beta_1^3} \left( h_h \left( \frac{T_h}{T_S} \right)^3 + h_r \left( \frac{T_r}{T_S} \right)^3 \right)$$

ここに、 $T_S, h_S$  は基礎固定の 1 質点系の固有周期と減衰定数である。また、上式のパラメータは、次式で与えられる。

$$T_h = 2\pi \sqrt{\frac{m_S}{k_{hh}}}, \quad T_r = 2\pi \sqrt{\frac{m_S L^2}{k_{rr}}} \quad (3.4-6b)$$

$$h_h = \frac{c_{hh}}{2\sqrt{m_S k_{hh}}}, \quad h_r = \frac{c_{rr}}{2\sqrt{m_S L^2 k_{rr}}}$$

ここに、 $c_{hh}, c_{rr}, k_{hh}, k_{rr}$  は、地盤の減衰係数と動的ばね係数(振動数零の値)の水平と回転成分を意味する。

等価有効入力地震動  $U_{CE}$  の方は、式(3.4-2b)の下段式と式(3.4-4a)より、次式が得られる。

$$U_{CE} = \frac{C}{A} u_{CT} + \frac{D}{A} L \theta_{CT} = u_{CT} + L \theta_{CT} \quad (3.4-6c)$$

## (2) 埋設深 5m 以上の深いケーソン基礎の場合

原田ら(1994)によると、上記(1)の直接基礎や杭基礎とは異なり基礎の質量や慣性モーメントと地盤の水平・回転およびその連成ばね係数に依存する次式の補正係数による等価 1 質点系の固有周期と減衰定数が推定できる。

$$T(=T_E) = \begin{cases} \beta_2 T_S, & T \geq T_{FD} \\ T_S, & T < T_{FD} \end{cases}, \quad h(=h_E) = h_S + h_2$$

$$\beta_2 = \sqrt{1 + k_S \left( \frac{k_{rr} + k_{hh} L^2 - 2 \operatorname{sgn}(k_{hr}) |k_{hr}| L}{k_{hh} k_{rr} - k_{hr}^2} \right)} \quad (3.4-7a)$$

$$h_2 = \left( 0.7 \frac{1}{2} \left( \frac{T_{FD}}{\beta_2 T_S} \right) \sqrt{\beta_2^2 - 1} - h_S \left( 1 - \frac{0.7}{\beta_2} \right) \right) H(T)$$

ここに、

$$H(T) = \frac{r X e^{-X}}{(1-X)^2 + r X e^{-X}}, \quad X = \frac{T_{FD}}{T} \frac{T - T_g}{T_{FD} - T_g}, \quad r = 10 \left( \frac{H_S}{40} \right)^2 \quad (3.4-7b)$$

ここに、補正係数 $\beta_2, h_2$ は、地盤の静的ばね係数 $k_{hh}, k_{rr}, k_{hr}$ と基礎固定時の橋脚の静的ばね係数 $k_S$ および基礎の減衰固有周期 $T_{FD}$ から決まる定数である。また、 $T_g$ は表層地盤の固有周期である。ケーソン基礎のように埋設深さが深い場合には、基礎の質量効果が無視できなくなり、基礎の固有周期が橋脚の固有周期と減衰定数に影響する。

基礎の減衰固有周期 $T_{FD}$ は、次式で与えられる。

$$T_{FD} = \frac{T_F}{\sqrt{1 - h_F^2}}, \quad T_F = 2\pi \sqrt{\frac{2MJ_G}{b_T - \sqrt{b_T^2 - 4MJ_G(k_{hh}k_{rr} - k_{hr}^2)}}}$$

$$b_T = J_G k_{hh} + ML_f(L_f k_{hh} + 2k_{hr}) + Mk_{rr} \quad (3.4-7c)$$

$$h_F = 1 - \exp(1 - 2.0(H_S / 40)^2)$$

ここに、 $M, J_G$ は基礎の質量と重心回りの慣性モーメントを、 $L_f$ は基礎重心から基礎上端までの長さを、 $H_S$ は基礎の高さ(埋設深)を意味する(図 3.4-1 参照)。

式(3.4-7)の近似式と式(3.4-2)の厳密式を直接解いて求めた厳密な等価減衰固有周期と等価減衰定数を比較すると、図3.4-4のように両者はよく一致している。

また、橋脚の減衰定数に関しては、経験式として、 $h=0.02/T$ とるように橋脚の固有周期に反比例して減衰定数が小さくなることが知られているが、図3.4-5に示すように本研究の近似式(3.4-7)にもそのような傾向がみられる。ただし、ばらつきは大きい。このことは、経験式のように橋脚の固有周期のみの関数では、減衰定数は表しきれず、式(3.4-7)に示すようなパラメータの関数とする方が、より厳密であることを示唆している。

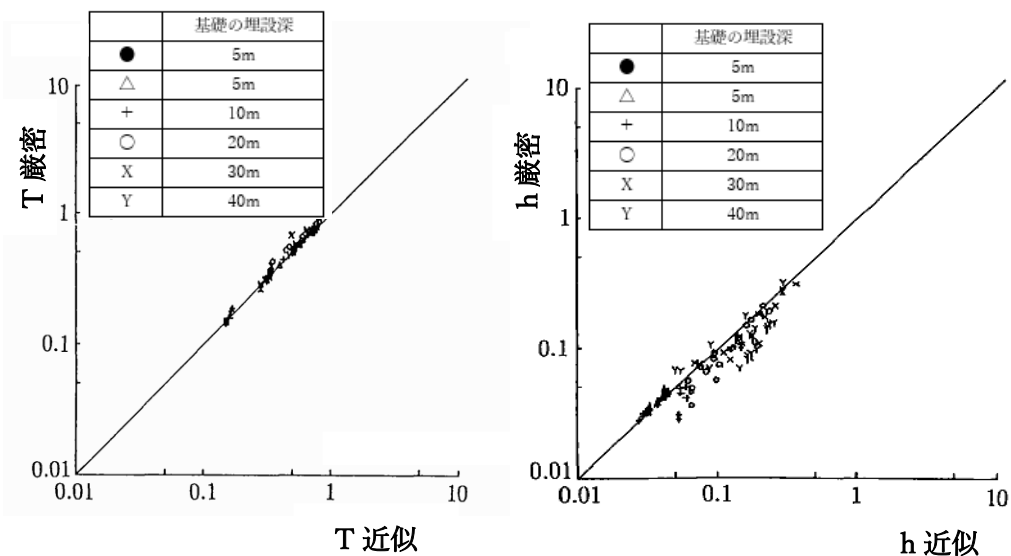


図3.4-4 等価固有周期Tと等価減衰定数hの厳密解と近似式の比較

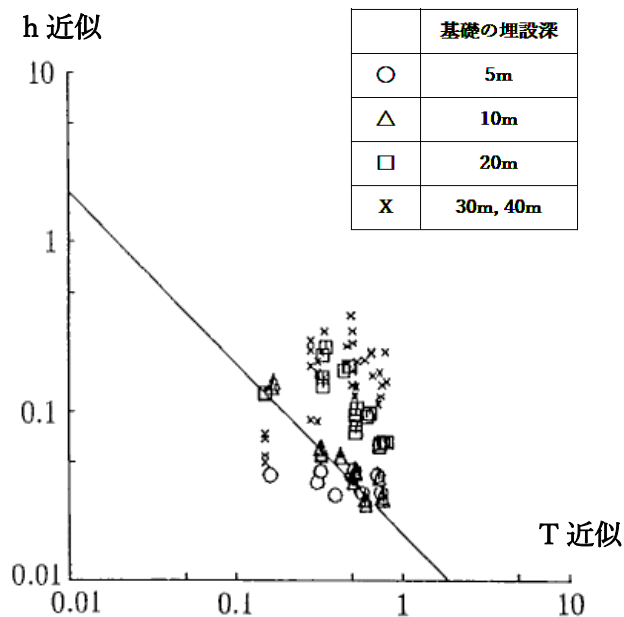


図3.4-5 推定式による等価減衰定数と経験式(実線 $h=0.02/T$ )の比較

### 3.5 有効入力地震動を考慮した応答スペクトル

ここでは、長大吊橋主塔のケーソン基礎を念頭に、図 3.5-1 に示すような円筒剛体基礎の根入れ効果や有効入力地震動の効果が応答スペクトルにどのように現れるかを土木学会編の動的解析の方法(1989)の結果を用いて示す。

有効入力地震動の定義である質量零の円筒剛体基礎の根入れ深さ(5m,11m,17m)の 3 ケースについて軸対象有限要素法を用いて掘削底面における自然地盤地表面波形、基礎底面中央の応答波形(有効入力地震動の水平成分と回転成分)をケース毎に計算した。それらの応答加速度波形から減衰定数 5%の加速度応答スペクトルを求めると、図 3.5-2

のように根入れの増加とともに水平成分のスペクトル値は低減されるが、回転成分のスペクトル値は増加していることがわかる。

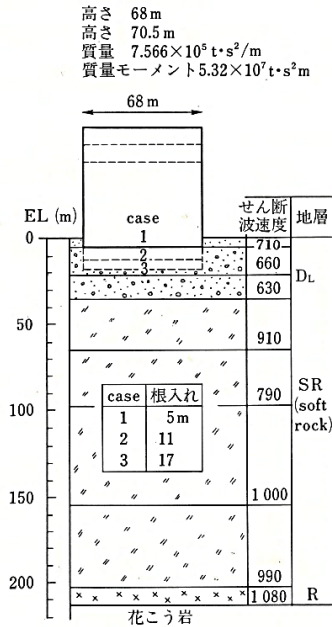


図 3.5-1 例題に用いた地盤・基礎系

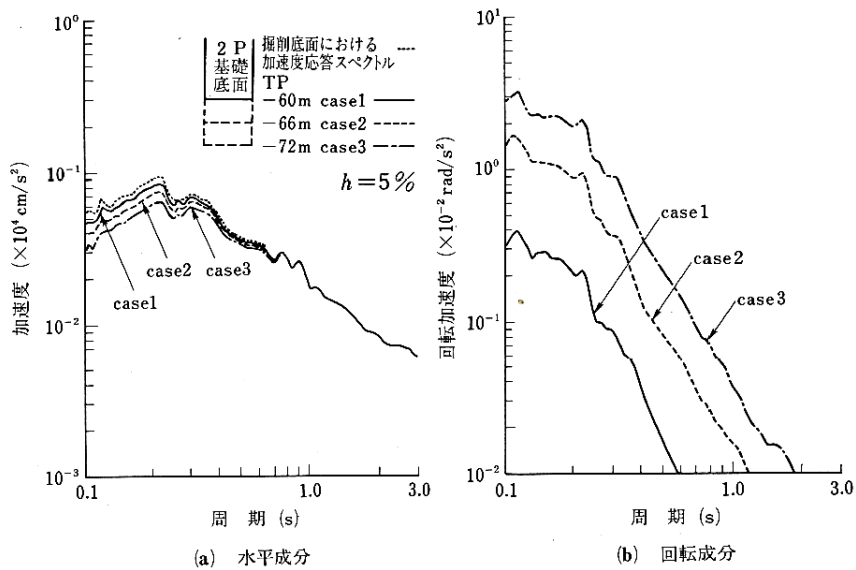


図 3.5-2 例題における円筒剛体基礎の有効入力地震動および自然地盤地表面の地震動の加速度応答スペクトル

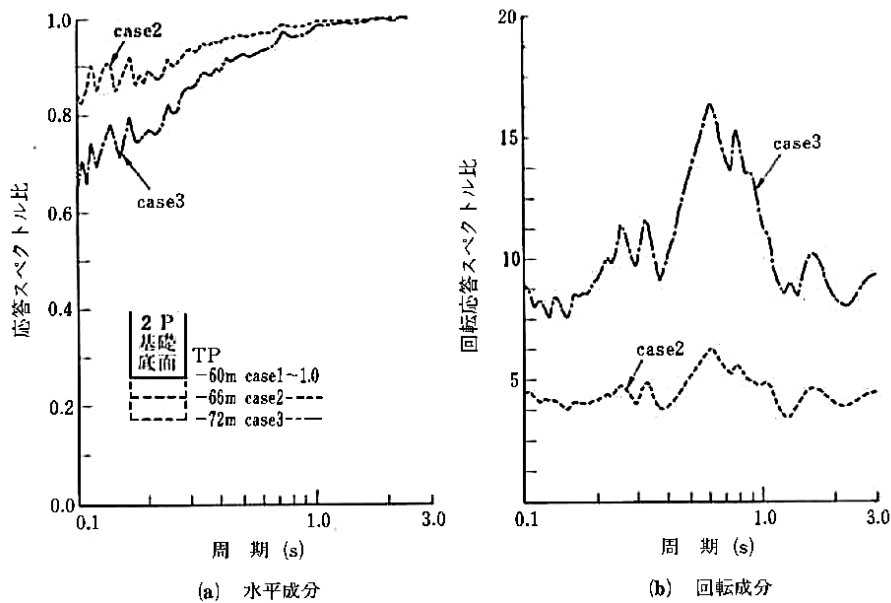


図 3.5-3 例題における円筒剛体基礎の根入れ補正係数

図 3.5-3 は、根入れ深さ 5m のケース 1 のスペクトル値で各ケースのスペクトル値を割った根入れ補正係数を示す。根入れのために、短周期領域の水平成分は、0.6~0.8 倍に減少し、回転成分は、6~16 倍に増加しているが、後で示すように基礎の地震応答に与える回転成分の影響はこの例題では小さく無視できる。

表 5.3-1 に円筒剛体基礎の 1 次固有周期と減衰定数を示す。この表では、簡単のため、根入れ 5m のケース 1 と根入れ 17m のケース 3 の場合を考察する。根入れの増加により固有周期の減少と減衰定数の増加がみられる。

表 3.5-1 円筒剛体基礎の 1 次固有周期と減衰定数

| 根入れ深さ       | 1 次固有周期 (s) | 減衰定数 (%) |
|-------------|-------------|----------|
| 5m (ケース 1)  | 0.47        | 6.8      |
| 17m (ケース 3) | 0.40        | 14.3     |

表 3.5-2 円筒剛体基礎の地震応答最大加速度値

| 応答値                              | 根入れ深さ       | 自然地盤地震動 | 有効入力地震動<br>水平成分 | 有効入力地震動<br>水平・回転成分 |
|----------------------------------|-------------|---------|-----------------|--------------------|
| 重心点水平応答<br>加速度 (G)               | 5m (ケース 1)  | 0.30    | 0.29            | 0.29               |
|                                  | 17m (ケース 3) | 0.33    | 0.28            | 0.28               |
| 応答回転角<br>(rad×10 <sup>-4</sup> ) | 5m (ケース 1)  | 2.92    | 2.84            | 2.84               |
|                                  | 17m (ケース 3) | 2.38    | 2.04            | 2.04               |

表 3.5-2 は、円筒剛体基礎の加速度応答スペクトルの最大加速度値を示す。加速度応答スペクトルの減衰定数の違いによる補正係数は、1.5 節の式(1.5-1)を用いた。根入れの浅い 5m のケース 1 では、自然地盤地震波形の応答スペクトルと有効入力地震動波形の応答スペクトルの最大加速度値は殆ど同じである。しかし、根入れの深い 17m のケース 3 では、有効入力地震動を用いると、水平最大加速度値が 0.85 倍(=0.28/0.33)、回転角も 0.85 倍(=2.04/2.38)だけ減少していることがわかる。この場合、重心点の応答スペクトルの最大加速度値は、有効地震動の水平成分のみの値と水平と回転成分の両方を考慮した値は同じであるため、有効地震動の回転成分の影響は無視できる。



### 3.6 Winklerばねモデルの改良

埋め込み剛体基礎側壁の単位深さ当たりの複素ばね係数は、式(3.2-1b)のように法線方向の複素ばねと回転複素ばねの2つであった。これらを Winkler ばねモデルとして剛体基礎の複素ばね係数を式(3.2-2)のように求めた。

しかし、図 3.6-1(a)に示すように Winkler ばねモデルは、荷重点以外には変形しない。弾性体では、図 3.6-1(b)に示すように荷重点以外でも変形する。この変形は荷重点の変位より徐々に減少する。この Winkler ばねモデルを改良するために、図 3.6-2 に示すように法線方向の複素ばね係数間を一様なせん断ばね係数で連結した改良型 Winkler ばねモデルが提案されている(日本建築学会(1996), Ikeda,*et.al.* (1992))。

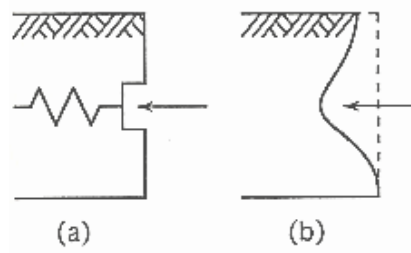


図 3.6-1 水平力による側壁地盤の変形模式図

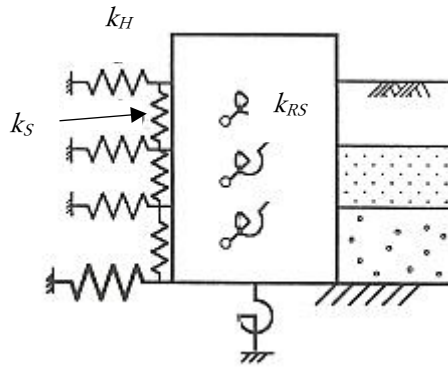


図 3.6-2 セン断ばねで連結した側壁地盤の改良型Winkler モデル

せん断ばねで連結した時の要素上下端の力と変位の関係は、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} p_m \\ p_{m+1} \end{pmatrix} = k_S \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ u_{m+1} \end{pmatrix} \quad (3.6-1a)$$

ここに、 $k_S$  は要素の上端と下端を連結するせん断ばね係数である。

例えば、両端を固定し 3 節点の中央にのみ外力を作用させるときの剛性方程式は、次式のようなになる。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ p_m \\ 0 \end{pmatrix} = k_S \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{m-1} \\ v_m \\ v_{m+1} \end{pmatrix}, \quad v_{m-2} = v_{m+2} = 0 \quad (3.6-1b)$$

上式から、図 3.6-3 のように 5 節点の変位分布は三角形分布となる。

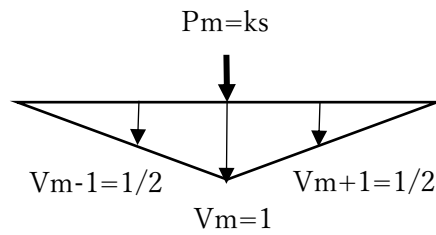


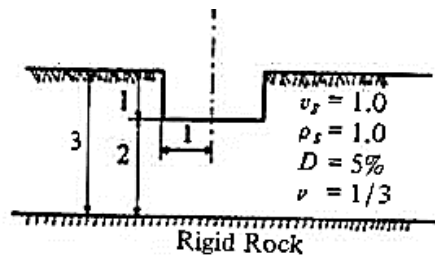
図 3.6-3 節点の変位分布と荷重

半径  $a$  の円筒基礎と側壁地盤のせん断剛性  $G$  の場合、次式で近似できる (Ikeda, *et.al.* (1992))。

$$k_g = 3Ga \quad (3.6-2)$$

ただし、 $k_g$  は基礎側壁の深さによって変動するので、上式の一定値近似はかなり大胆な仮定である。3.6 補助記事 1 に静的回転および水平・回転連成ばね係数を示すが、水平・回転連成ばね係数に関しては、上式の一定値近似を用いない方がよい。

改良型の回転ばね係数は従来型のものよりも大きくなる。例えば、原田ら(1983)は、図 3.6-3 に示す埋設円柱剛体底面回りの水平と回転の複素ばね係数を有限要素法と従来型 Winkler ばねモデルの結果を比較している。図 3.6-4 の水平ばね係数は良い近似であるのに対し、図 3.6-5 の回転ばね係数は有限要素法に比べやや小さめの評価になっている。しかし、改良型 Winkler ばねモデルでは、従来型の回転ばね係数の 1.2 倍となり、有限要素法とほぼ同程度の近似であることがわかる。



$$\text{FHNF} \quad f_g = \frac{v_s}{4H} = \frac{1}{4 \times 3} = 0.08$$

$$\text{FVNF} \quad f_p = \frac{v_p}{4H} = \frac{2}{4 \times 3} = 0.17$$

$$\text{1st HNF} \quad f_1 = f_g = 0.08$$

$$\text{2nd HNF} \quad f_2 = 3f_g = 0.25$$

$$\text{3rd HNF} \quad f_3 = 5f_g = 0.42$$

図 3.6-3 FEM 結果との比較に用いた埋設円柱剛体基礎・地盤モデル

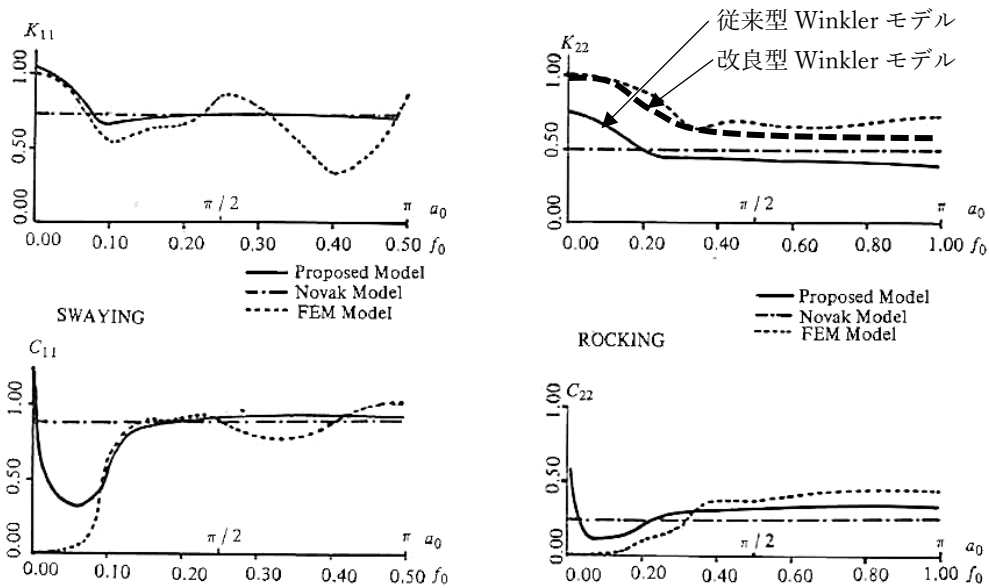
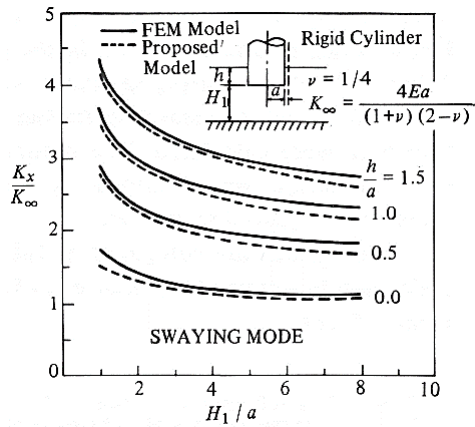
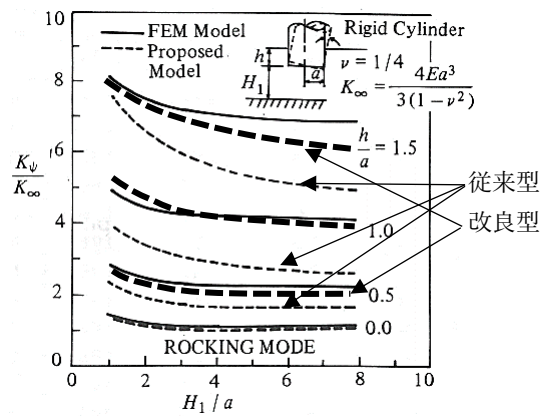


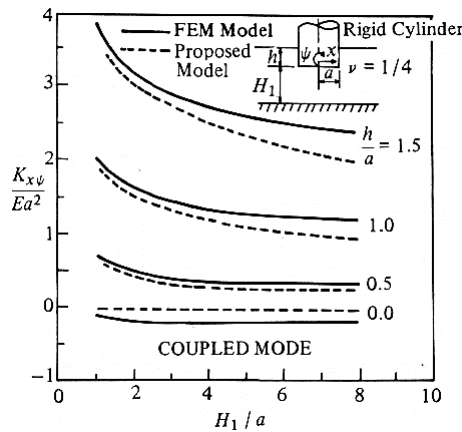
図 3.6-4 水平複素ばね係数(左図)と回転複素ばね係数(右図)の FEM 結果との比較



(a)水平



(b)回転:太破線(改良型); 破線(従来型)



(c)水平・回転連成

図 3.6-5 基礎底面の静的ばね係数((a)水平、(b)回転、(c)水平・回転連成)の FEM 結果との比較

また、原田ら(1983)は、図 3.6-5 に示す埋設円柱剛体底面回りの水平と回転および水平・回転連成の静的ばね係数を有限要素法(実線)と従来型 Winkler ばねモデル(破線)の結果を比較している。同図の(a)と(c)に示す水平と水平・回転連成の静的ばね係数は、有限要素法の結果と良い一致をしているが、有限要素法の結果よりも(b)の回転静的ばね係数は、埋設深が大きいほど( $h/a=1.5, 1.0, 0.5$ )過小評価となっている。しかし、改良

型 Winkler ばねモデル(太破線)では、(b)の回転静的ばね係数は、有限要素法と良い一致を示している。

### 3.6 補助記事 1 円筒剛体基礎の複素ばね係数の導出

ここでは、図 A3.6-1-1 の埋設円筒基礎の変位と記号を使い、従来型 Winkler ばねモデルと、法線方向の複素ばね係数間を一様なせん断ばね係数で連結した改良型 Winkler ばねモデルによる複素ばね係数を求める。

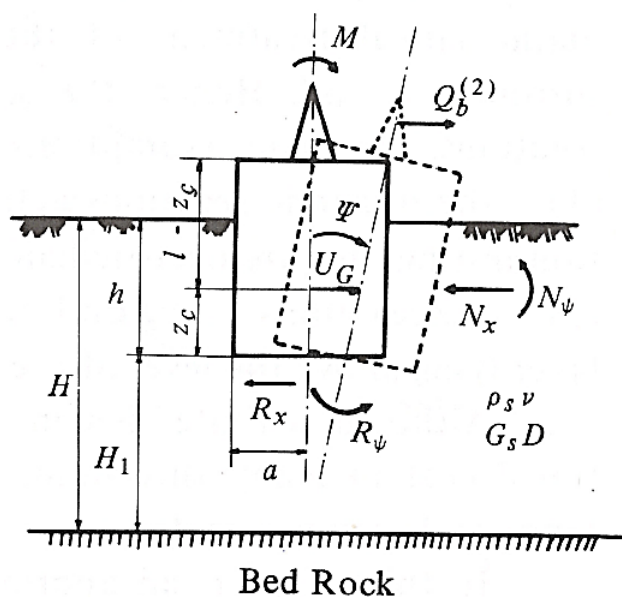


図 A3.6-1-1 埋設円筒基礎の変位と記号

基礎底面から高さ  $Z_C$  の水平と回転反力は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} R_x &= Ga(c_{u1} + ic_{u2})(u_G - Z_C \psi) \\ R_\psi &= Ga^3(c_{r1} + ic_{r2})\psi - Ga(c_{u1} + ic_{u2})(u_G Z_C - Z_C^2 \psi) \end{aligned} \quad (A3.6-1-1)$$

基礎側壁の高さ  $Z_C$  の水平と回転反力は、高さ  $Z_C$  から上方に  $z$  軸を設定し、微小長さ  $dz$  に作用する反力から、以下のように求められる。

$$\begin{aligned}
 N_x &= k_H \int_{-Z_C}^{h-Z_C} (u_G + z\psi) dz \\
 &\quad + 2k_S \int_{-Z_C}^{h-Z_C} \psi dz = k_H h u_G - k_H h \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) \psi + 2k_S h \psi \\
 N_\psi &= k_{RS} \int_{-Z_C}^{h-Z_C} \psi dz + k_H \int_{-Z_C}^{h-Z_C} (u_G z + z^2 \psi) dz + 2k_S \int_{-Z_C}^{h-Z_C} z \psi dz \quad (\text{A3.6-1-2a}) \\
 &= k_{RS} h \psi - k_H h \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) u_G + k_H h \left( \frac{h^2}{3} + Z_C^2 - h Z_C \right) \psi \\
 &\quad - 2k_S h \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) \psi
 \end{aligned}$$

ここに、基礎側壁の単位深さ当たりの複素ばね係数は次式で与えられる。ただし、 $k_S$  は基礎側壁の深さによって変動するので、次式下段の一定値近似はかなり大胆な仮定である。

$$\begin{aligned}
 k_H &= G_s (s_{u1} + i s_{u2}) \\
 k_{RS} &= G_s a^2 (s_{r1} + i s_{r2}) \\
 k_S &= 3G_s a
 \end{aligned} \quad (\text{A3.6-1-2b})$$

ここに、 $G_s$  は基礎側壁の地盤のせん断弾性剛性を表す。式(A3.6-1-2a)の2段目の最後の項は、高さ  $z$  のせん断力  $2k_S dz \psi (= k_S dz \psi + k_S dz \psi)$  はその上下の微小長さのせん断力の和で評価し、そのせん断力による  $Z_C$  回りのモーメント  $(2k_S dz \psi)z$  の総和として求めている。

基礎底面と側壁の水平変位と回転変位及び水平・回転の連成成分を剛体基礎の複素ばね係数とすると、高さ  $Z_C$  の剛体変位と反力は次式のように整理できる。

$$\begin{pmatrix} P_x = R_x + N_x \\ M_r = R_r + N_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_H & K_{HR} \\ K_{HR} & K_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_G \\ \psi \end{pmatrix} \quad (\text{A3.6-1-3a})$$

ここに、

$$\begin{pmatrix} K_H & K_{HR} \\ K_{HR} & K_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{xx} + i\omega c_{xx} & k_{xr} + i\omega c_{xr} \\ k_{xr} + i\omega c_{xr} & k_{rr} + i\omega c_{rr} \end{pmatrix} \quad (\text{A3.6-1-3b})$$

したがって、法線方向の複素ばね係数間を一様なせん断ばね係数で連結した改良型 Winkler ばねモデルの円筒剛体基礎の動的ばね係数と動的減衰係数は、次式で与えられる。改良型 Winkler ばねモデルでは、次式からわかるように動的ばね係数の回転成分のみに最後の項  $-6G_s \delta Z_C / a - \delta / 2 / G$  が加えられる。すなわち、回転成分の動的ばね係数が増加する。

動的ばね係数( $Z_C$  の位置) :

$$k_{xx} = Ga \left( c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{u1} \right) \quad (\text{A3.6-1-4a})$$

$$k_{rr} = Ga^3 \left( c_{r1} + \left( \frac{Z_C}{a} \right)^2 c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r1} + \frac{G_s}{G} \delta \left( \frac{\delta^2}{3} + \frac{Z_C^2}{a^2} - \delta \frac{Z_C}{a} \right) s_{u1} - 6 \frac{G_s}{G} \delta \left( \frac{Z_C}{a} - \frac{\delta}{2} \right) \right) \quad (\text{A3.6-1-4b})$$

$$k_{xr} = -Ga \left( Z_C c_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) s_{u1} - 6 \frac{G_s}{G} h \right) \quad (\text{A3.6-1-4c})$$



動的減衰係数( $Z_C$  の位置) :

$$c_{xx} = \frac{Ga}{\omega} \left( c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta s_{u2} \right) \quad (\text{A3.6-1-4d})$$

$$c_{rr} = \frac{Ga^3}{\omega} \left( c_{r2} + \left( \frac{Z_C}{a} \right)^2 c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r2} + \frac{G_s}{G} \delta \left( \frac{\delta^2}{3} + \frac{Z_C^2}{a^2} - \delta \frac{Z_C}{a} \right) s_{u2} \right) \quad (\text{A3.6-1-4e})$$

$$c_{xr} = -\frac{Ga}{\omega} \left( Z_C c_{u2} + \frac{G_s}{G} \delta \left( Z_C - \frac{h}{2} \right) s_{u2} \right) \quad (\text{A3.6-1-4df})$$

ここに、 $\omega$  は振動数、 $\delta = h/a$  である。

従来の Winkler ばねモデルと改良型 Winkler ばねモデルの基礎底面回りの回転ばねは、次式のように与えられ、改良型 Winkler ばねモデルでは、 $3G_s \delta^2 / G$  だけ大きくなる。

従来型 Winkler モデルの回転ばね係数と連成ばね係数( $Z_C = 0$ ) :

$$\begin{aligned} k_{rr} &= Ga^3 \left( c_{r1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r1} + \frac{G_s}{G} \frac{\delta^3}{3} s_{u1} \right) \\ k_{xr} &= -Ga \left( -\frac{G_s}{G} \delta \frac{h}{2} s_{u1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.6-1-5a})$$

改良型 Winkler モデルの回転ばね係数連成ばね係数( $Z_C = 0$ ) :

$$\begin{aligned} k_{rr} &= Ga^3 \left( c_{r1} + \frac{G_s}{G} \delta s_{r1} + \frac{G_s}{G} \frac{\delta^3}{3} s_{u1} + 3 \frac{G_s}{G} \delta^2 \right) \\ k_{xr} &= -Ga \left( -\frac{G_s}{G} \delta \frac{h}{2} s_{u1} - 6 \frac{G_s}{G} h \right) \end{aligned} \quad (\text{A3.6-1-5b})$$

ただし、 $k_g$  は基礎側壁の深さによって変動するので、次式下段の一定値近似はかなり大胆な仮定であるため、水平・回転の連成ばね係数 $k_{xr}$ の右辺第2項を零とする方がよい。

## 4章 杭基礎

容積法による群杭・構造物系の多質点運動方程式を示す。ここでは、グリーン関数を用いた解析的な群杭の地盤の複素ばね係数行列の定式化と半無限弾性体中の群杭の剛結フーチングの水平複素ばね係数の振動数依存性の計算例を示す。

この剛結フーチングの水平複素ばね係数の振動数依存性の計算例は厳密解であるが、波動の伝播による加振杭からの地盤変位の減衰を考慮した群杭の近似計算法を示す。この近似計算法は、意外にも厳密解をうまく再現できる方法である。

また、群杭を単杭に集約する定式化と検証例を示す。ただし、著者らは有限要素法による数値解析法を推奨する。

容積法と改良型 Winkler ばねモデルを用いて、単杭・上部構造系の多質点運動方程式を整理する。また、群杭基礎の静的設計で用いるフーチング底面の杭群図心位置に集約した静的ばね係数の算定式を記述する。群杭基礎の動的応答解析では、有限要素法を用いてフーチング底面の集約複素ばね係数を求める方法が推奨される。

### 4.1 容積法による群杭・構造系の多質点運動方程式

#### (1) 定式化

群杭基礎では、有限要素法による集約複素ばねと有効入力地震動を求めて、上部構造物系の応答解析が推奨されるが、2.2 節の事項を用いると、自由地盤を用いて入力地震動とグリーン関数を用いて地盤の複素ばねを求めることができる。

ここでは、図 4.1-1 の群杭の I 杭と J 杭の自然地盤土柱の水平変位ベクトルと水平荷重ベクトルの関係がグリーン関数を使った次式で表されることから出発する。

$$\begin{pmatrix} u_1^J \\ u_2^J \\ \vdots \\ u_n^J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}^{JI} & g_{12}^{JI} & \cdots & g_{1n}^{JI} \\ g_{21}^{JI} & g_{22}^{JI} & \cdots & g_{2n}^{JI} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1}^{JI} & g_{n2}^{JI} & \cdots & g_{nn}^{JI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^I \\ p_2^I \\ \vdots \\ p_n^I \end{pmatrix} \quad (4.1-1a)$$

$$\mathbf{u}^J = \mathbf{g}^{JI} \mathbf{p}^I$$

ここに、行列  $\mathbf{g}^{JI}$  は、自然地盤のグリーン関数(単位荷重による他点の変位)を意味する。

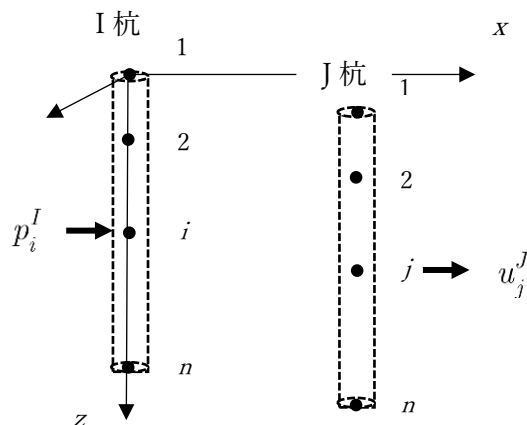


図 4.1-1 群杭の I 杭と J 杭の自然地盤土柱の水平変位・水平荷重ベクトル

上式を自然地盤の複素ばね係数行列で表すと、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} p_1^I \\ p_2^I \\ \vdots \\ p_n^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{IJ} & k_{12}^{IJ} & \cdots & k_{1n}^{IJ} \\ k_{21}^{IJ} & k_{22}^{IJ} & \cdots & k_{2n}^{IJ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}^{IJ} & k_{n2}^{IJ} & \cdots & k_{nn}^{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^J \\ u_2^J \\ \vdots \\ u_n^J \end{pmatrix} \quad (4.1-1b)$$

$$\mathbf{p}^I = \mathbf{k}^{IJ} \mathbf{u}^J, \quad \mathbf{k}^{IJ} = (\mathbf{g}^{JI})^{-1}$$

ここで、全て(N本)の杭の深さ方向節点の水平荷重と水平変位を計算するために、次式の水平変位ベクトルと水平荷重ベクトルを定義する。

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ \vdots \\ u_j^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \\ \vdots \\ p_i^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \quad (4.1-2a)$$

ここに、上添字 I, J=1, 2, ..., N は、荷重作用杭と変位観測杭を、下添字 i, j=1, 2, ..., n は各杭の深さ方向の節点番号を意味する。荷重による変位点の関係は、次式のようにグリーン関数を使って表すことができる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \mathbf{p} \quad (4.1-2b)$$

荷重と変位の変換すると、次式の剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{u}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{g}^{-1} \quad (4.1-2c)$$

次に、2.3節の容積法の基礎・上部構造物系の運動方程式は、式(2.3-3)で与えられるので、次式に再掲するようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \bar{\mathbf{D}}_{bb} + \mathbf{K}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{r}_f^0 \end{pmatrix} \quad (4.1-2a)$$

ここに、 $\mathbf{K}_0$  は自然地盤の複素ばね係数行列を表す。この  $\mathbf{K}_0$  は、式(4.1-2c)の自然地盤のグリーン関数の逆行列で与えられる複素ばね係数行列  $\mathbf{k}$  である。

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{k} \quad (4.1-3a)$$

また、 $\bar{\mathbf{D}}_{bb}$  は排土地盤の質量と剛性を差し引いた次式で与えられる。

$$\bar{\mathbf{D}}_{bb} = \mathbf{D}_{bb} - (-\omega^2 \mathbf{m}_{bb}^e + i\omega \mathbf{c}_{bb}^e + \mathbf{k}_{bb}^e) \simeq \mathbf{D}_{bb} + \omega^2 \mathbf{m}_{bb}^e \quad (4.1-3b)$$

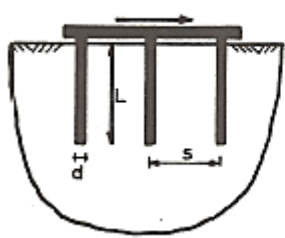
以上のことから、結局、式(4.1-2c)は、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{ss} & \mathbf{D}_{sb} \\ \mathbf{D}_{bs} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{k} + \omega^2 \mathbf{m}_{bb}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_s^t \\ \mathbf{r}_f^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \mathbf{r}_f^0 \end{pmatrix} \quad (4.1-3c)$$

群杭・構造物系の地震応答で必要な物理量は、自然地盤のグリーン関数行列の逆行列である自然地盤の複素ばね係数行列  $\mathbf{k}$  と、自然地盤の地震応答変位  $\mathbf{r}_f^0$  の 2 つである。半無限地盤や水平多層地盤のグリーン関数は解析的に求められているため、これら 2 つの物理量も解析的に求めることができる。上式を 2.2 節の境界法の定式(2.2-6)と比較すると、境界法の地盤複素ばね行列と有効入力地震動との関係がわかる。

## (2) 半無限弾性体中の群杭の水平集約複素ばね係数の計算例

ここでは、図 4.3-2 に示す半無限弾性体中の群杭の水平集約複素ばね係数の数値計算例を示す。杭頭はフーチングに剛結している(Kaynia and Kausel (1982))。この計算例は、動的グリーン関数を使って求められたものである。



3x3 PILE GROUP

$$\frac{L}{d} = 25 ; \nu_s = 0.45 ; \nu_p = 0.25$$

$$\text{HORIZONTAL : } \frac{E_p I}{E_s L^4} = 10^{-3}$$

図 4.1-2 半無限弾性体中の群杭と記号 ( $E_p I$ : 杭の曲げ剛性,  $E_s$ : 地盤のヤング率)

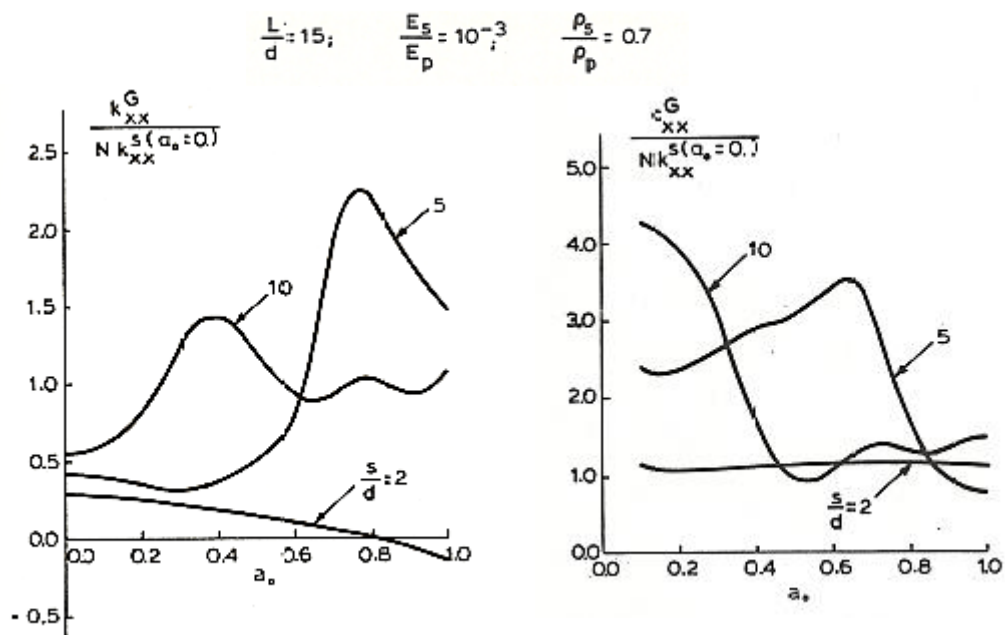


図 4.1-3 3 x 3 の群杭の水平集約複素ばね係数のばね係数と減衰係数の無次元振動数特性および杭間隔/杭径比( $s/d$ )の関係

図 4.1-3 は、静的ばね係数と  $N$  本( $=9=3 \times 3$ )の群杭の積で基準化した水平集約ばね係数と減衰係数を示す。横軸は無次元振動数  $a_0 = \omega d / C_s$  を表す。この図から、杭間隔比が大きくなるほど、水平集約ばね係数と減衰係数の振動数依存性の大きいことがわかる。このことは、杭間での動的相互作用が大きいことを意味する。

### (3) 半無限弾性体中の群杭の水平集約複素ばね係数の近似計算法

ここでは、Dobry and Gazetas(1988)や Makris and Gazetas(1992)による近似的な群杭複素ばね(杭頭固定条件)を解説する。この方法は、意外にも(2)で示した厳密な解をよく再現している。

Makris and Gazetas(1992)の近似法は、図 4.1-4 のように 3 段階の計算により群杭の影響を計算する方法である。

第 1 段階：杭頭に調和振動荷重を作用させた時の杭の変形  $u_{11}(z)$  を Winkler ばねモデルにより計算する。

第 2 段階：水平方向に伝播する波動による距離  $r = S$  位置の変位  $u_S(z)$  を計算する。

$$u_S(z) = \Psi(r, \theta)u_{11}(z)$$

第 3 段階：変位  $u_S(z)$  を入力とする杭 2 の Winkler ばねモデルから杭 2 の変位  $u_{21}(z)$  を計算する。



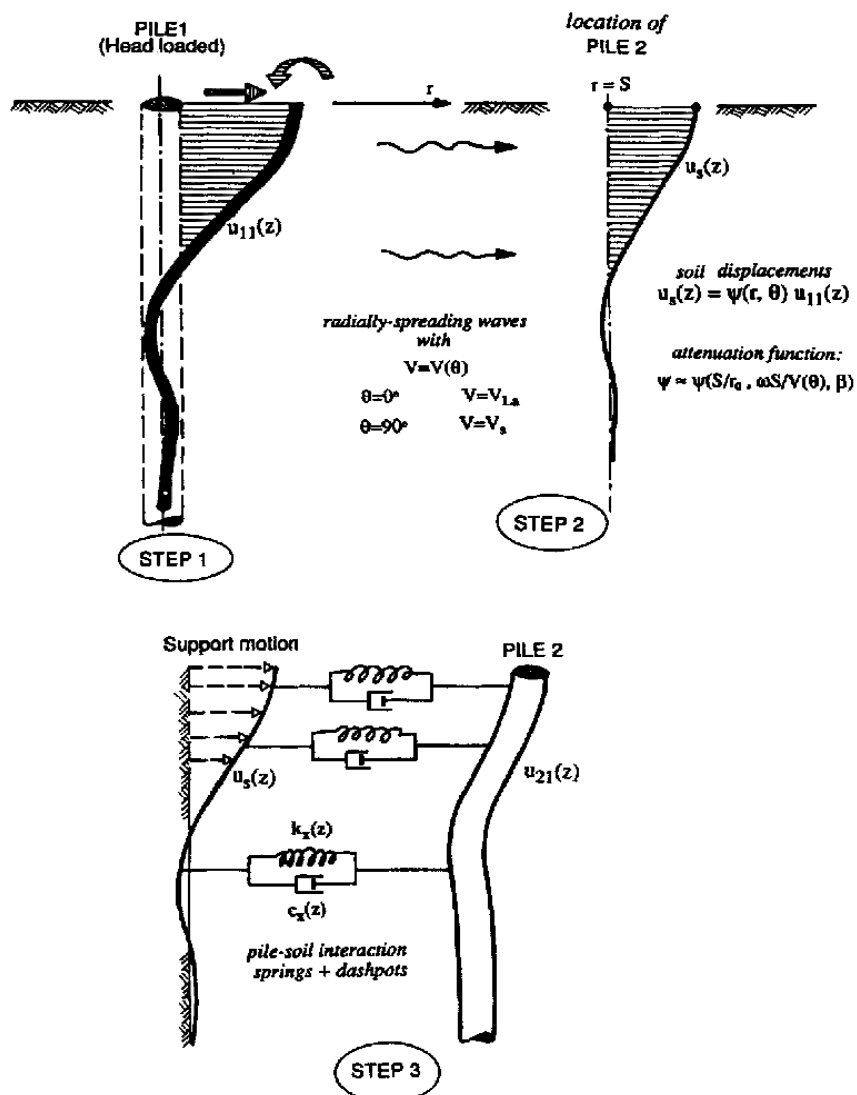


図 4.1-4 群杭の影響を計算する 3 段階近似法の図的説明  
(Makris and Gazetas(1992))

第 1 段階の具対的定式は、以下のようにになる。Winkler ばねモデルでは、次式の水平ばね係数と減衰係数を使う。

$$\begin{aligned}
 k_x &= 2.4\rho C_S^2(1+\nu), \\
 c_x &= 6a_0^{-1/4}\rho C_S d + 2\beta \frac{k_x}{\omega}, \quad a_0 = \frac{\omega d}{C_S}
 \end{aligned}
 \tag{4.1-4a}$$

ここに、 $\rho, C_S, \beta, d$  は地盤の密度、S 波速度、減衰定数と杭の直径を表す。

杭1の応答変位は、力のつり合い式より、 $u_{11}(z) = U_{11}(z)e^{i\omega t}$ のように調和振動を仮定し、次式から求められる。

$$E_p I_p \frac{d^4 U_{11}(z)}{dz^4} + (k_x + i\omega c_x - m\omega^2)U_{11}(z) = 0 \quad (4.1-4b)$$

ここに、 $E_p I_p$ は杭の曲げ剛性を、 $m = \rho_p A_p$ は杭の単位長さ当たりの質量を表す。杭頭固定の境界条件から上式の解が求められる。Makris and Gazetas(1992)は、減衰係数を無視した次式の解( $c_x = 0$ )を推奨している(4.1 補助記事1 参照)。

$$u_{11}(z) = U_0 e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) e^{i\omega t} \quad (4.1-4c)$$

$$\lambda = \left( \frac{k_x - m\omega^2}{4E_p I_p} \right)^{1/4}$$

ここに、 $U_0 = U_{11}(0)$ 。また、 $\lambda$ は杭の動的特性値を表す。

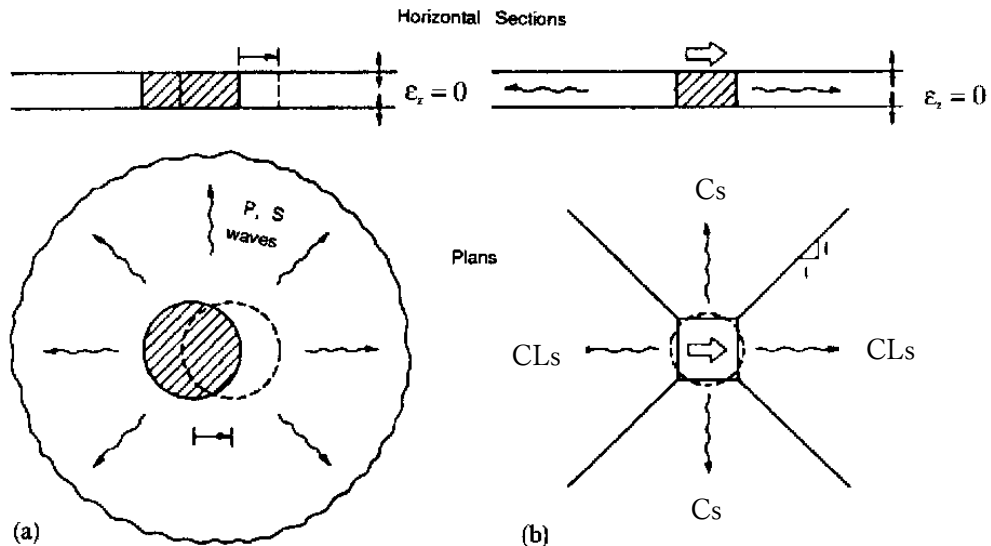


図4.1-5 無限地盤の単位深さ当たりの剛体円盤の水平振動の波動伝播(左図(a))とその近似(右図(b))  $C_S, C_{LS}$ :S波速度と Lysmer S波速度

第2段階の水平方向に伝播する波動では、図4.1-5に示すように無限地盤の単位深さ当たりの剛体円盤の水平振動の波動伝播(左図(a))を右図(b)のように近似する。

水平方向の波動伝播による地盤変位の減衰特性は、 $u_s(z) = \Psi(r, \theta)u_{11}(z)$ で表される。

この波動減衰関数は、次式で近似される。

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &\simeq \Psi(r, 0) \cos^2 \theta + \Psi(r, \pi / 2) \sin^2 \theta \\ \Psi(r, 0) &= A \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\frac{-\beta\omega r}{C_{LS}}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{C_{LS}}\right)\right) \\ \Psi(r, \pi / 2) &= A \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\frac{-\beta\omega r}{C_S}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{C_S}\right)\right)\end{aligned}\tag{4.1-5a}$$

水平方向の波動伝播による地盤変位の減衰特性は、 $u_s(z) = \Psi(r, \theta)u_{11}(z)$ で表される。

この波動減衰関数は、次式で近似される。

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &\simeq \Psi(r, 0) \cos^2 \theta + \Psi(r, \pi / 2) \sin^2 \theta \\ \Psi(r, 0) &= A \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\frac{-\beta\omega r}{C_{LS}}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{C_{LS}}\right)\right) \\ \Psi(r, \pi / 2) &= A \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(\frac{-\beta\omega r}{C_S}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{r}{C_S}\right)\right)\end{aligned}\tag{4.1-5a}$$

杭1に対して $\theta = \pi / 2$ の直線上位置にある杭2は、S波速度で伝播するS波のみに影響される。一方、 $\theta = 0$ の直線上位置にある杭2は、次式のLysmerのS波速度(原田・本橋(2020))で伝播するP波(粗密波)のみの影響を受けると仮定する。

$$C_{LS} = \frac{3.4}{\pi(1-\nu)} C_S \quad (4.1-5a)$$

また、 $\theta = \pi / 4$  の直線上位置にある杭 2 は、式(4.1-5)から、次式で与えられる。

$$\Psi(r, \pi / 4) \simeq \frac{1}{2} (\Psi(r, 0) + \Psi(r, \pi / 2)) \quad (4.1-5b)$$

第 3 段階の杭 2 の応答変位  $u_{21}(z) = U_{21}(z)e^{i\omega t}$  は、強制変位  $u_S(z) = \Psi(r, \theta)u_{11}(z)$  を受ける杭 2 の力のつり合い式より、次式の解として求められる。

$$E_p I_p \frac{d^4 U_{21}(z)}{dz^4} + (k_x + i\omega c_x - m\omega^2)U_{21}(z) = (k_x + i\omega c_x)U_S(z) \quad (4.1-5c)$$

または、式(4.1-4c)を上式に代入した次式の解から求められる。

$$E_p I_p \frac{d^4 U_{21}(z)}{dz^4} + (k_x + i\omega c_x - m\omega^2)U_{21}(z) = (k_x + i\omega c_x)\Psi(r, \theta)U_0 e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) \quad (4.1-5d)$$

杭頭固定の境界条件を考慮すると、杭 1 による杭 2 の応答変位が次式のように得られる(4.1 補助記事 2 参照)。

$$u_{21}(z) = \frac{3}{4} \Psi(r, \theta) \left( \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} \right) U_0 \times e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z + \frac{2}{3} \lambda z \sin \lambda z) e^{i\omega t} \quad (4.1-5e)$$

ここで、次式のような杭間の動的相互作用係数  $\alpha_{21}$  を導入する。

$$\alpha_{21} = \frac{u_{21}(0)}{u_{11}(0)} \quad (4.1-6a)$$

上式に式(4.1-4c)と式(4.1-5e)を代入すると、次式が得られる。

$$\alpha_{21} = \frac{3}{4} \Psi(r, \theta) \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} \quad (4.1-6b)$$

上式は杭1と杭jに拡張し、 $\alpha_{j1}$ に適用できるのは当然である。

例えば、図 4.1-6 のように中心杭を杭1として等間隔の同じ杭が3x3の杭頭固定の群杭の場合、群杭の変位 $u^G$ は、次式のように与えられる。

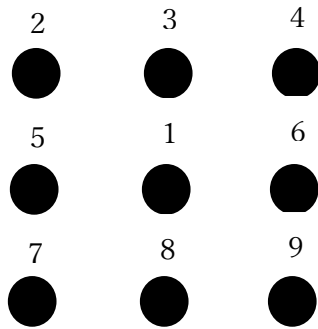


図 4.1-6 杭頭固定の3 x 3の群杭の番号(中心杭を杭1)

$$u^G = \sum_{j=1}^9 u_{j1} \quad (4.1-7a)$$

ここで、 $u_{21} = u_{41} = u_{71} = u_{91}$ は、杭1から $\theta = \pi/4$ の直線上位置にある。 $u_{51} = u_{61}$ は、杭1から $\theta = 0$ の直線上位置にある。また、 $u_{31} = u_{81}$ は、杭1から $\theta = \pi/2$ の直線上位置にある。このことを考慮すると、上式は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} u^G &= u_{11} + 2u_{51} + 2u_{31} + 4u_{21} \\ &= u_{11}(1 + 2\alpha_{51} + 2\alpha_{31} + 4\alpha_{21}) \\ &= \frac{P_h}{k_h} \left( 1 + 2\alpha_{51}(S, 0) + 2\alpha_{31}(S, \pi/2) + \right. \\ &\quad \left. 4 \frac{1}{2} (\alpha_{51}(\sqrt{2}S, 0) + \alpha_{31}(\sqrt{2}S, \pi/2)) \right) \end{aligned} \quad (4.1-7b)$$

ここに、杭1の水平荷重と複素ばね係数を  $P_h, k_h$  とすると、 $P = k_h u_{11}$  より、上式の中  
 段式から下段式が得られる。また、杭間の動的相互作用係数は、式(4.1-5a)と式(4.1-5b)  
 に式(4.1-6b)を代入すると、次式で与えられる。

$$\alpha_{51}(S, 0) = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{S}} \exp\left(\frac{-\beta\omega S}{C_{LS}}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{S}{C_{LS}}\right)\right) \times \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} \quad (4.1-7c)$$

$$\alpha_{31}(S, \pi/2) = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{S}} \exp\left(\frac{-\beta\omega S}{C_S}\right) \exp\left(-i\omega\left(t - \frac{S}{C_S}\right)\right) \times \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2}$$

したがって、杭頭固定の 3x3 群杭の杭頭複素ばね係数  $k_h^G$  は、式(4.1-7b)より、次式の  
 ように求められる。

$$k_h^G = \frac{9P_h}{u^G} = \frac{9k_h}{1 + 2 \begin{pmatrix} \alpha_{51}(S, 0) + \alpha_{31}(S, \pi/2) \\ \alpha_{51}(\sqrt{2}S, 0) + \alpha_{31}(\sqrt{2}S, \pi/2) \end{pmatrix}} \quad (4.1-7d)$$

ここに、本モデルでは、一般に広く使われる  $N = n \times n$  本の群杭のばね効率  $\alpha_N$  は、次  
 式で与えられることになる。

$$\alpha_N = \frac{k_h^G}{Nk_h} = \frac{1}{1 + 2 \begin{pmatrix} \alpha_{51}(S, 0) + \alpha_{31}(S, \pi/2) \\ \alpha_{51}(\sqrt{2}S, 0) + \alpha_{31}(\sqrt{2}S, \pi/2) \end{pmatrix}} \leq 1 \quad (4.1-7e)$$

図 4.1-7 は、上記の近似解による 3x3 群杭の静的ばね係数で基準化した水平複素ばね係数を(2)項で示した動的グリーン関数で求めた厳密解(Kaynia and Kausel (1982))と比較したものである。この比較では、杭間隔/杭直径  $S/d=5, 10$  の 2 種類とし、以下の条件を用いた。記号の簡単化のため、複素地盤ばね係数を  $k_h^G = k_h^G(a_0) + i\omega c_h^G(a_0)$  とする。

$$\text{杭長/杭直径 } \frac{L}{d} = 15, \text{ 杭ヤング率/地盤ヤング率 } \frac{E_p}{E} = 10^3$$

$$\text{杭密度/地盤密度 } \frac{\rho_p}{\rho} = 1.42, \text{ 地盤のポアソン比と減衰定数 } \nu = 0.4, \beta = 0.05$$

$$\text{基準化水平ばね係数 } \frac{k_h^G(a_0)}{9k_h(a_0 = 0)}$$

$$\text{基準化水平減衰係数 } \frac{c_h^G(a_0)}{9k_h(a_0 = 0)}$$

この図より、群杭の集約水平ばね係数と減衰係数の無次元振動数  $a_0 = \omega d / C_s$  依存性が大きいこと、実線で示す近似解は、破線で示す厳密解をうまく再現できていることがわかる。また、振動数零での基準化静的集約ばね係数は 0.5 前後で  $S/d=5$  に比べると、 $S/d=10$  の方がやや大きい。一般に、群杭ばね効率  $\alpha_N$  は、 $\alpha_N = 1 / \sqrt{N}$  程度なので、本計算例では、 $\alpha_N = 1 / \sqrt{9} = 0.33$  となる。この値は、(2)項に示した  $S/d=2$  の厳密解とほぼ同じである。密な群杭  $S/d=2$  では、 $\alpha_N = 1 / \sqrt{N}$  が適用できるのであろう。本モデルでの群杭ばね効率  $\alpha_N$  は、 $\alpha_N = 0.03(S / d) + 0.24$  程度である。

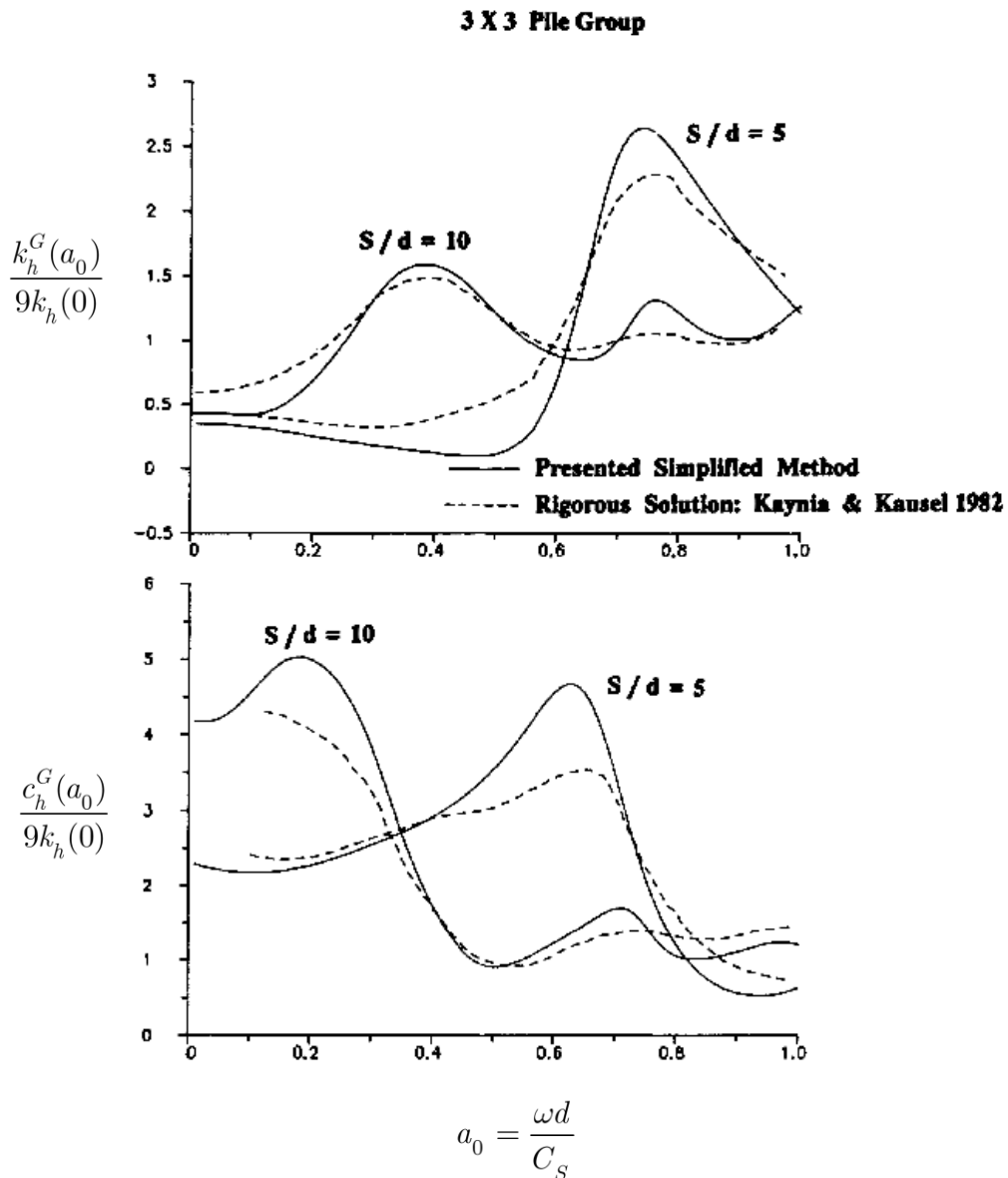


図 4.1-7 近似解による 3x3 群杭の基準化水平複素ばね係数と厳密解の比較

#### 4.1 補助記事 1 調和振動荷重による単杭の応答変位解の導出

杭頭に調和振動荷重が作用する単杭の微分方程式は、地盤ばね係数  $c_x = 0$  の場合、次式で与えられる。この解は Chang の公式として広く知られている。ここでは、その解を示す。



$$E_p I_p \frac{d^4 U_{11}(z)}{dz^4} + (k_x - m\omega^2) U_{11}(z) = 0 \quad (\text{A4.1-1-1})$$

$$\frac{d^4 U_{11}(z)}{dz^4} - ((1 \pm i)\lambda)^4 U_{11}(z) = 0, \quad \lambda^4 = \frac{k_x - m\omega^2}{4E_p I_p}$$

ここに、 $(1 \pm i)^4 = -4$  を用いた。

一般解は、 $U_{11} = Ce^{\gamma z}$  を仮定して、これを上式に代入すると、次式が得られる。

$$\gamma^4 - ((1 \pm i)\lambda)^4 = 0 \quad (\text{A4.1-1-2a})$$

上式から、 $\gamma = (\lambda \pm i\lambda), -(\lambda \pm i\lambda)$  の4つの固有値が得られ、それぞれの和が一般解である。

$$U_{11} = e^{-\lambda z} (A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z) + e^{\lambda z} (A_3 \cos \lambda z + A_4 \sin \lambda z) \quad (\text{A4.1-1-2b})$$

ここに、オイラーの公式  $e^{\pm i\lambda z} = \cos \lambda z \pm i \sin \lambda z$  を用いて、境界条件から決められる4つの積分定数を用いた解とした。

第1の境界条件は、杭頭加振であるため、 $z \rightarrow \infty, U_{11} \rightarrow 0$  なので、上式の右辺第1項の解がこの条件を満たす。

$$U_{11} = e^{-\lambda z} (A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z) \quad (\text{A4.1-1-3a})$$

第2の境界条件は、杭頭固定条件  $dU_{11}(0)/dz = 0$  と杭頭変位  $U_0 = U_{11}(0)$  の2つの条件である。

$$\frac{dU_{11}(z)}{dz} = \lambda e^{-\lambda z} (-(A_1 - A_2) \cos \lambda z - (A_1 + A_2) \sin \lambda z)$$

$$\frac{d^2U_{11}(z)}{dz^2} = 2\lambda^2 e^{-\lambda z} (A_1 \sin \lambda z - A_2 \cos \lambda z)$$

(A4.1-1-3b)

$$\frac{dU_{11}(0)}{dz} = \lambda(A_1 - A_2) = 0 \rightarrow A_1 = A_2$$

$$U_{11}(0) = A_1 = U_0$$

したがって、境界条件を満たす解は、次式で与えられる。

$$U_{11} = U_0 e^{-\lambda z} (\cos \lambda z + \sin \lambda z) \quad (\text{A4.1-1-4 a})$$

ここに、杭の動的特性値 $\lambda$ は、次式で与えられる。

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_x - m\omega^2}{4E_p I_p}} \quad (\text{A4.1-1-4 b})$$

補足であるが、式(A4.1-1-3a)の一般解に以下の杭頭の境界条件を課すと、それぞれの解が得られる。

(1) 水平荷重 $P_h$ による杭頭固定の場合：

杭のたわみ曲線と曲げモーメント、せん断力の関係は以下のものである(原田・本橋(2021))。

$$\text{杭のたわみ角} \frac{dU_{11}}{dz}$$

$$\text{杭の曲げモーメント} M = -E_p I_p \frac{d^2U_{11}}{dz^2}$$

$$\text{杭のせん断力 } Q = -E_p I_p \frac{d^3 U_{11}}{dz^3}$$

この場合の境界条件は、次式のようにになる。

$$\frac{dU_{11}(0)}{dz} = 0, \quad E_p I_p \frac{d^3 U_{11}}{dz^3} = P_h \quad (\text{A4.1-1-5a})$$

式(A4.1-1-3b)の上段式を使い、一般解に上式の境界条件を考慮すると、

$$A_1 = A_2, \quad A_1 = \frac{P_h}{4E_p I_p \lambda^3}$$

が求められるので、この場合のたわみ曲線等は、次式で与えられる。

$$\text{たわみ曲線 : } U_{11} = \frac{P_h}{4E_p I_p \lambda^3} e^{-\lambda z} (\cos \lambda z + \sin \lambda z)$$

$$\text{杭頭変位 : } U_0 (= U_{11}(0)) = \frac{P_h}{4E_p I_p \lambda^3} \quad (\text{A4.1-1-5b})$$

$$\text{曲げモーメント : } M(z) = -\frac{P_h}{2\lambda} e^{-\lambda z} (\sin \lambda z - \cos \lambda z)$$

$$\text{せん断力 : } Q(z) = -P_h e^{-\lambda z} \cos \lambda z$$

## (2) 水平荷重 $P_h$ による杭頭自由の場合 :

この場合の境界条件は、次式のようにになる。

$$\frac{d^2 U_{11}(0)}{dz^2} = 0, \quad E_p I_p \frac{d^3 U_{11}}{dz^3} = P_h \quad (\text{A4.1-1-6a})$$

式(A4.1-1-3b)の2段目の式を使い、一般解に上式の境界条件を考慮すると、

$$A_2 = 0, \quad A_1 = \frac{P_h}{2E_p I_p \lambda^3}$$

が求められるので、この場合のたわみ曲線等は、次式で与えられる。

$$\text{たわみ曲線} : U_{11} = \frac{P_h}{2E_p I_p \lambda^3} e^{-\lambda z} \cos \lambda z$$

$$\text{杭頭変位} : U_0 (= U_{11}(0)) = \frac{P_h}{2E_p I_p \lambda^3}$$

(A4.1-1-5b)

$$\text{曲げモーメント} : M(z) = -\frac{P_h}{\lambda} e^{-\lambda z} \sin \lambda z$$

$$\text{せん断力} : Q(z) = -P_h e^{-\lambda z} (\cos \lambda z - \sin \lambda z)$$

#### 4.1 補助記事2 調和振動荷重の杭1による杭2の応答変位解

次式で与えられる調和振動荷重の杭1による杭2の応答変位解を求める。

$$E_p I_p \frac{d^4 U_{21}(z)}{dz^4} + (k_x + i\omega c_x - m\omega^2) U_{21}(z) = (k_x + i\omega c_x) \Psi(r, \theta) U_0 e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) \quad (\text{A4.1-2-1})$$

上式の解は、上式の同次方程式の一般解(式(A4.1-1-3a))と非同次方程式の特別解

$U_S(z)$ の和として、次式のように与えられる。

$$U_{21} = e^{-\lambda z} (A_1 \cos \lambda z + A_2 \sin \lambda z) + U_S(z) \quad (\text{A4.1-2-2a})$$

特別解は、次式のような定数変化法により求められる。

$$\begin{aligned} U_S(z) &= e^{-\lambda z} (A_1(z) \cos \lambda z + A_2(z) \sin \lambda z) \\ &= e^{-\lambda z} (A(z) \cos \lambda z + B(z) \sin \lambda z) \end{aligned} \quad (\text{A4.1-2-2b})$$

ただし、同次方程式の解は、杭頭固定の境界条件  $U_{11}(0) = U_0, dU_{11}(0)/dz = 0$  を満たしているので ( $A_1 = A_2 = U_0$ )、特別解の杭頭境界条件は、次式で与えられる。

$$U_s(0) = \frac{dU_s(0)}{dz} = 0 \quad (\text{A4.1-2-2c})$$

具体的には、

$$\frac{dU_s(z)}{dz} = e^{-\lambda z} \left( \left( \frac{dA}{dz} + \lambda(B(z) - A(z)) \right) \cos \lambda z + \left( \frac{dB}{dz} - \lambda(A(z) + B(z)) \right) \sin \lambda z \right) \quad (\text{A4.1-2-2d})$$

上式より、式(A4.1-2-2c)の特別解は、非同次方程式を満足する解のため、極力少ないパラメータで構成される特別解の方が良い。したがって、特別解の境界条件として、強い条件 ( $dA(0)/dz = 0$  かつ  $B(0) = A(0)$ ) を採用すると、次式が得られる。

$$A(0) = 0, \quad \frac{dA(0)}{dz} = 0, \quad B(0) = 0 \quad (\text{A4.1-2-2e})$$

ここに、上式1番目の条件は、 $U_s(0) = 0$  による。また、2階微分よりも高次微係数が現れないためには、次式の2階微係数零の条件が必要である。

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 B(z)}{dz^2} = 0 \quad (\text{A4.1-2-2f})$$

この条件式は、定数係数が次式の変数に1次関数であることを意味する。

$$A(z) = a_1 + a_2 z, \quad B(z) = b_1 + b_2 z \quad (\text{A4.1-2-2g})$$

式(A4.1-2-2e)に代入すると、 $a_1 = a_2 = 0, b_1 = 0$  が得られる。したがって、境界条件を満たす特解は、次式で与えられる。

$$U_S(z) = e^{-\lambda z} b_2 z \sin \lambda z \quad (\text{A4.1-2-2b})$$

以上より、調和振動荷重の杭 1 による杭 2 の応答変位解の一般解は、次式で与えられる。

$$U_{21} = Ce^{-\lambda z} (\cos \lambda z + (1 + Bz) \sin \lambda z) \quad (\text{A4.1-2-2a})$$

ここに、定数  $C, B$  は非同次方程式の式(A4.1-2-1)を満たすように決められる。

上式の微分から次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dU_{21}}{dz} &= 2C\lambda^2 e^{-\lambda z} \left[ \left(1 - \frac{B}{\lambda}\right) \sin \lambda z + \left(-1 + \frac{B}{\lambda} - Bz\right) \cos \lambda z \right] \\ \frac{d^2U_{21}}{dz^2} &= 2C\lambda^4 e^{-\lambda z} \left[ \left(4\frac{B}{\lambda} - 2\right) \cos \lambda z - 2\left(1 - 2\frac{B}{\lambda} + Bz\right) \sin \lambda z \right] \\ \frac{d^3U_{21}}{dz^3} &= 2C\lambda^3 e^{-\lambda z} \left[ \left(2 - 3\frac{B}{\lambda} + Bz\right) \cos \lambda z + Bz \sin \lambda z \right] \\ \frac{d^4U_{21}}{dz^4} &= 2C\lambda^4 e^{-\lambda z} \left[ \left(4\frac{B}{\lambda} - 2\right) \cos \lambda z - 2\left(1 - 2\frac{B}{\lambda} + Bz\right) \sin \lambda z \right] \end{aligned} \quad (\text{A4.1-2-3a})$$

上式の 4 階微分と変位解の式(A4.1-2-2a)を非同次方程式に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} Ce^{-\lambda z} \left[ \left(\frac{3B}{2\lambda}\right) \cos \lambda z + \left(\frac{3B}{2\lambda}\right) \sin \lambda z \right] = \\ \frac{3(k_x + i\omega c_x)}{4(k_x + i\omega c_x - m\omega^2)} \Psi(r, \theta) U_0 e^{-\lambda z} (\sin \lambda z + \cos \lambda z) \end{aligned} \quad (\text{A4.1-2-3b})$$

両辺が等しいための条件式から、定数が次式のように求められる。

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{4} \Psi(r, \theta) U_0 \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} \\ B &= \frac{2}{3} \lambda \end{aligned} \quad (\text{A4.1-2-3c})$$

したがって、非同次方程式の解は、次式のように求められる。

$$U_{21} = \frac{3}{4} \Psi(r, \theta) U_0 \frac{k_x + i\omega c_x}{k_x + i\omega c_x - m\omega^2} e^{-\lambda z} \left( \cos \lambda z + \left( 1 + \frac{2}{3} \lambda z \right) \sin \lambda z \right) \quad (\text{A4.1-2-3d})$$

## 4.2 群杭の単杭への集約化

### (1) 定式化

群杭の杭間の動的相互作用が大きいが、4.3 節のように群杭を取り扱くと杭本数が大きくなるほどグリーン関数の計算または、有限要素法による地盤・杭基礎系の計算容量が増加してしまう。地盤の非線形性の影響の方が大きいことを考えると、群杭を単杭に集約できれば、簡単なモデル化が可能である。

長谷川ら(1998)は、上記のような群杭への地盤の非線形モデルを考慮する目的から、群杭の単杭への集約方法を開発しているので、ここでは、その方法を記述する。

4.3 節の容積法の定式化を用い、図 4.3-1 の水平荷重と節点変位の記号を用いる。この N 本の群杭を単杭に集約するために、一般に杭頭はフーチング基礎に剛接合されるので、群杭の杭頭は全て同じだけ水平変位することを考慮し、長谷川ら(1998)は次の集約条件を設定している。集約条件：群杭の同一深さにおける水平変位は全て等しい。

この集約条件を定式化すると、次式のように表せる。

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ \vdots \\ u_j^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} u_j = \mathbf{I} u_j \quad (4.2-1a)$$

集約杭の  $i$  節点への水平荷重  $P_i$  は、全ての杭への  $i$  節点水平荷重の和で与えられるので、

次式のように求められる。

$$P_i = \sum_{I=1}^N p_i^I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \\ \vdots \\ p_i^N \end{pmatrix} = \mathbf{I}^T \mathbf{p}_i \quad (4.2-1b)$$

ここで、群杭の全節点を表すために定義した式(4.3-2a)のベクトルを用いると、上式の集約杭の荷重と変位の条件式は、次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j = \mathbf{I} u_j &\rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{I} \mathbf{U} \\ P_i = \mathbf{I}^T \mathbf{p}_i &\rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{I}^T \mathbf{p} \end{aligned} \quad (4.2-2a)$$

ここに、 $\mathbf{U}$  と  $\mathbf{P}$  は集約杭の深さ方向の各節点の水平変位と荷重を表し、次式のように定義する。

$$\mathbf{U} = u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n, \quad \mathbf{P} = P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_n \quad (4.2-2b)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Sym.} & & & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

したがって、式(4.3-2c)を上式(4.2-2a)に代入すると、群杭の集約杭の水平荷重と水平変位の関係が、次式のように求められる。



$$\begin{aligned}
 P &= I^T k I U = k_H U \\
 k_H &= I^T k I, \quad k = g^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.2-3}$$

なお、集約杭の断面積や断面 2 次モーメントは、各杭のそれらの和で求める。

## (2) 集約化の精度

長谷川ら(1998)は、単杭への集約化の精度を薄層要素法で検証しているの  
 は、その検証結果を示す。

図 4.2-1 は、検証で用いた群杭の薄層要素法モデルと物性値を示す。検証では集約杭  
 の杭頭加振時の杭の深さ方向の変位分布を比較している。

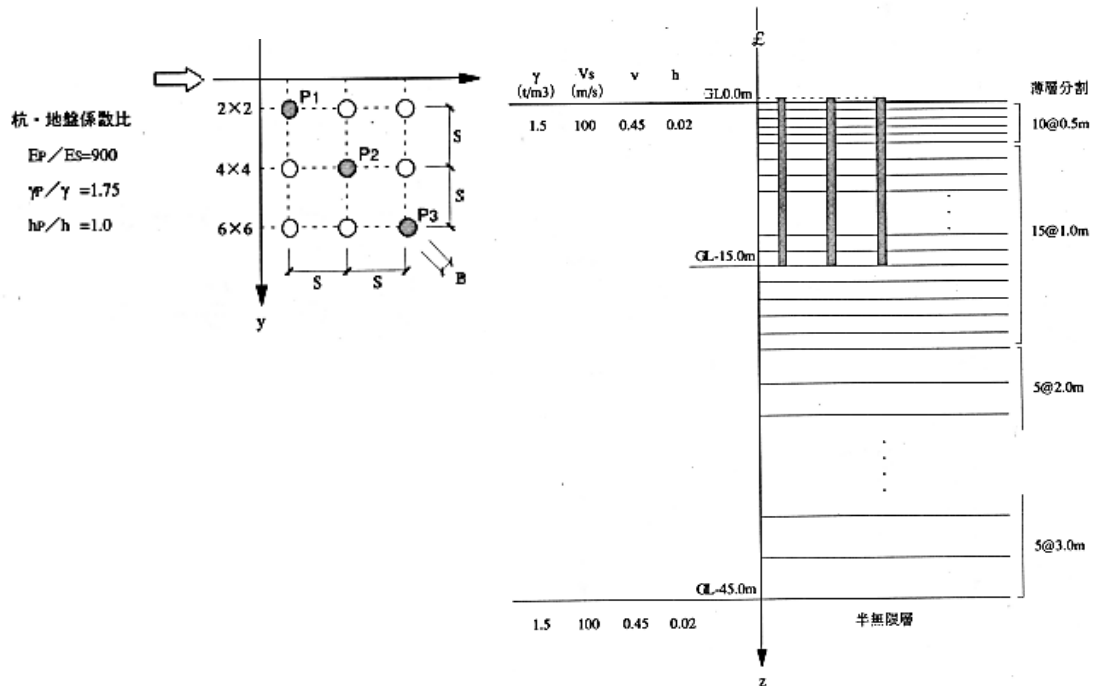
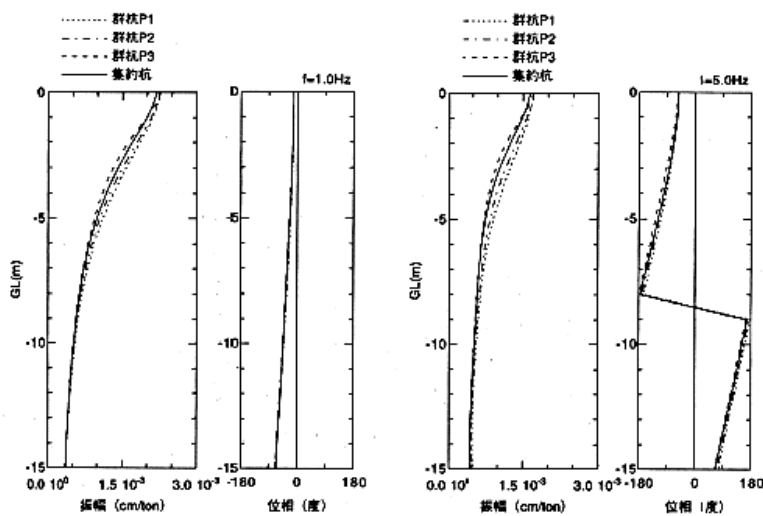
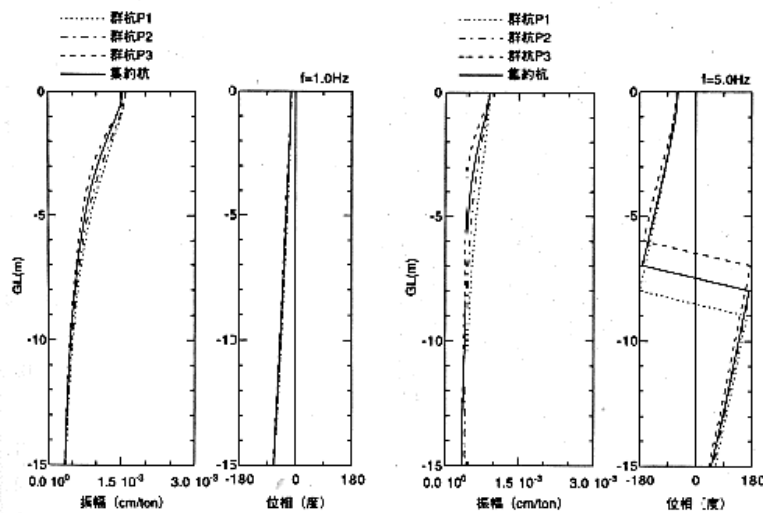


図 4.2-1 検証で用いた群杭の薄層要素法モデルと物性値(長谷川ら(1998)引用)



(a)  $S/B = 3$  の場合



(b)  $S/B = 5$  の場合

図 4.2-2 集約化の精度(杭頭加振振動数 1.0Hz と 5.0Hz の杭の変位振幅・位相分布)  
((長谷川ら(1998)引用))

図 4.2-2 は、検証結果を示す。この結果は、杭本数が  $N=6 \times 6$  の正方配列の場合について、中心から両端に位置する各杭(P1,P2,P3)の変位振幅・位相分布を集約杭のものと比較した結果である。杭間距離/杭径比  $S/B=3,5$  の 2 ケースの結果を示す。また、杭頭加振力に対する変位の位相分布も示し、加振振動数は 1.0Hz と 5.0Hz の 2 ケースの結

果を示す。図 4.2-2 から、集約杭の変位振幅・位相分布は、群杭のものと同じ一致が見られるため、集約化の精度は良い。

## 4.3 単杭・上部構造系の多質点運動方程式

### (1) モデル化の概要

1.2 節の接触面法を杭基礎に用いるためには、質量零の杭基礎の地震応答から有効入力地震動を求め、次に、地盤の複素ばね係数で支持された杭基礎・上部構造系に有効入力地震動を作用させる 2 つの手順が必要である。剛体埋設基礎の有効入力地震動は自然地盤の地震動とかなり違うが、杭基礎の有効入力地震動は自然地盤の地震動との違いは小さいので、近似的に自然地盤の地震動を使うこともできる。

2.3 節の容積法では、入力地震動は自然地盤の地震動が使える。地盤の複素ばね係数の方は、杭基礎の剛性に比べると杭基礎の排土地盤の剛性は小さいので、地盤の複素ばね係数から排土地盤の質量のみを差し引いて求められる。

以上のことから、杭基礎では、容積法の定式化に基づくモデル化がよく使われる。ただし、杭基礎は軟弱地盤に使用されるので、等価線形化の適用範囲を超える非線形性を考慮した非線形モデルの開発の方が重要になる。5 章では、非線形地盤ばねモデルを取り上げるが、地盤の非線形特性に関する研究は発展途上にある。

## (2) 容積法による改良型 Winkler ばねモデルの多質点運動方程式

ここでは、図 4.3-1 に示す杭・上部構造物の多質点系モデルに容積法と 3.6 節の改良型 Winkler ばねモデルを用いて、多質点系の運動方程式を示す。

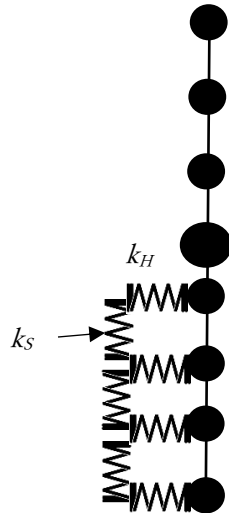


図 4.3-1 改良型 Winkler ばねモデルによる杭・上部構造物の多質点系モデル

容積法を用いるので、入力地震動は自然地盤の地震動が使える。地盤の複素ばね係数は、地盤の複素ばね係数から排土地盤の質量を差し引いて求められる。したがって、1次元等価線形地盤応答により自然地盤の地震動  $u_g + \mathbf{u}_f$  を求め、地盤の水平複素ばね係数  $\mathbf{k}_H$  の支持点に作用させる。ただし、 $\mathbf{k}_H$  は多層地盤のグリーン関数  $\mathbf{g}$  の逆行列で与えられる地盤の複素ばね係数剛性行列  $\mathbf{k}_{0H} (= \mathbf{g}^{-1})$  から杭基礎の排土地盤の質量行列を差し引いたもので、次式で与えられる。

$$\mathbf{k}_H = \mathbf{k}_{0H} + \omega^2 \mathbf{m}_p \quad (4.3-1a)$$

各質点番号で表現すると、 $\mathbf{k}_H$  は次式のように対角行列となる。

$$\mathbf{k}_H = \begin{pmatrix} k_H^1 & 0 & 0 & 0 \\ & k_H^2 & 0 & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ \text{Sym.} & & & k_H^n \end{pmatrix} \tag{4.3-1b}$$

また、複素水平ばね係数間の連成を考慮するためのせん断ばね係数行列  $\mathbf{k}_S$  は、次式のよ  
うに与えられる。

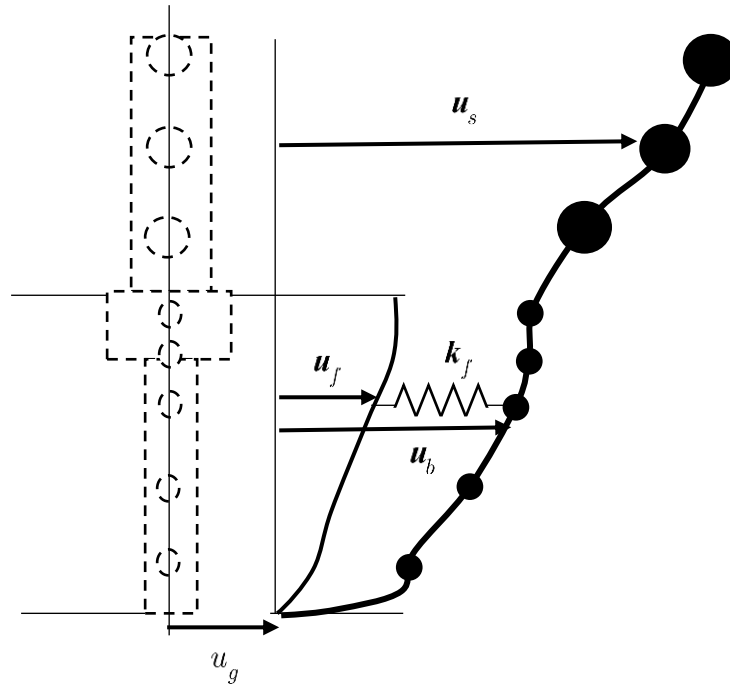
$$\mathbf{k}_S = \begin{pmatrix} k_S^1 & -k_S^1 & 0 & 0 & & & \\ & k_S^1 + k_S^2 & -k_S^2 & 0 & & & \\ & & k_S^2 + k_S^3 & -k_S^3 & & & \\ & & & k_S^3 + k_S^4 & -k_S^4 & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & \text{Sym.} & & & k_S^{n-1} + k_S^n & -k_S^n \\ & & & & & & -k_S^n & k_S^n \end{pmatrix} \tag{4.3-1c}$$

次に、以上の改良型 Winkler ばねモデルと容積法による運動方程式を導く。図と記号  
を簡単化するために、図 4.3-2 に示すような記号を用いる。すなわち、改良型 Winkler  
ばねモデルの地盤の複素ばね係数行列  $\mathbf{k}_f$  は、次式で与えられるものとする。

$$\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_H + \mathbf{k}_S \tag{4.3-2}$$

基礎の支持層の水平地震動変位を入力として、基礎・構造物の無い自然地盤の応答相  
対変位を計算し、地盤ばねを介して多質点系でモデル化した杭・基礎に入力する。線形  
系では地盤の複素ばね係数は振動数の関数となるので、ばねを一定値とすれば、付加質  
量を考慮するなど、地盤と基礎の相互作用の厳密解から Penzien 系モデルの運動方程式  
は導かれる。いろいろなバージョンがあるので、ここでは、 $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_H$  の場合を Penzien

系モデル、 $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_H + \mathbf{k}_S$  の場合を改良型 Winkler ばねモデルと呼ぶ。非線形系の場合には、以下の Penzien 系モデルが有用である。



- $u_g$  : 基礎支持層の水平地震動変位
- $\mathbf{u}_f$  : 自然地盤の応答相対変位ベクトル(各質点位置の応答変位)
- $\mathbf{u}_b$  : 杭・基礎系の応答相対変位ベクトル(各質点位置の応答変位)
- $\mathbf{u}_s$  : 上部構造物系の応答相対変位ベクトル(各質点位置の応答変位)
- $\mathbf{k}_f = \mathbf{k}_H + \mathbf{k}_S$  : 改良型 Winkler ばねモデルの地盤の複素ばね係数行列

図 4.3-2 改良型 Winkler ばねモデルと容積法による多質点系モデルと記号

自然地盤の運動方程式は、次式で表される。

$$\mathbf{m}_f(\ddot{\mathbf{u}}_g + \ddot{\mathbf{u}}_f) + \mathbf{k}_{free} \mathbf{u}_f = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{m}_f \ddot{\mathbf{u}}_f + \mathbf{k}_{free} \mathbf{u}_f = -\mathbf{m}_f \mathbf{1} \ddot{\mathbf{u}}_g \quad (4.3-3a)$$

ここに、 $\mathbf{m}_f, \mathbf{k}_{free}$  は自然地盤の多質点系モデルの質量と剛性行列を、 $\mathbf{I}$  は単位ベクトルを表す。簡単のため、地盤の減衰項  $\mathbf{c}_f \dot{\mathbf{u}}_f$  は省略し、剛性による復元力項のみの表現としている。

次に、力のつり合い式より、基礎と構造物を多質点系モデルの運動方程式は、次式のように表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_b^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{k}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_f(\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3-3b)$$

ここに、上部構造物と基礎の質量行列と剛性行列は、それぞれの変位に対応して表現している。左辺第 1 項と 2 項は慣性力と復元力を、第 3 項は基礎の地盤からの復元力を表す。

幾何学的関係から、絶対変位と相対変位には、次式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} u_g + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} \quad (4.3-3c)$$

上式の絶対変位と相対変位の関係を使い、力のつり合い式を絶対変位と相対変位で表すと、次式の運動方程式が求められる。

絶対変位の運動方程式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_b^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{k}_{bb} + \mathbf{k}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_b^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{k}_{bb} + \mathbf{k}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} u_g + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_f \mathbf{u}_f \end{pmatrix} \quad (4.3-4a)$$

相対変位の運動方程式：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{sb} \\ \mathbf{k}_{bs} & \mathbf{k}_{bb} + \mathbf{k}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_s \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \ddot{u}_g + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_f \mathbf{u}_f \end{pmatrix} \quad (4.3-4b)$$

上式の絶対変位と相対変位の運動方程式の右辺の外力項では、地震動変位  $u_g$  と自然地盤の応答相対変位  $\mathbf{u}_f$  が必要となる。自然地盤の応答相対変位  $\mathbf{u}_f$  は、式(4.3-3a)から求められる。震源断層モデルからの地震動は地震動変位が求められ、変位から速度と加速度波形も計算できるので(原田・本橋(2017))、絶対変位と相対変位の運動方程式のどちらでも良い。観測波形の加速度記録や速度記録から変位波形を求める方法では、誤差を伴うので、基盤地震動の加速度波形を用いる相対変位の運動方程式の方が適している。このように分けて扱う方が良いと思われるが、以下のように1つの運動方程式にして扱うこともできる。

相対変位の運動方程式と自然地盤の運動方程式を一つにまとめると、Penzien系モデルの運動方程式は次式のようにも表せる。条件式(4.3-5)は、力が零になるので当然である。

$$\text{条件： } \mathbf{k}_f \mathbf{u}_b = \mathbf{0} \quad (4.3-5a)$$

この条件を加えて、以下の方程式を解く。



$$\begin{pmatrix} m_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & m_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & m_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{ss} & k_{sb} & 0 \\ k_{bs} & k_{bb} + k_f & -k_f \\ 0 & -k_f & k_{free} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ u_b \\ u_f \end{pmatrix} = \\
- \begin{pmatrix} m_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & m_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & m_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g \tag{4.3-5b}$$

## 4.4 静的設計に用いる群杭の集約ばね係数

図 4.4-1 のような群杭・フーチング基礎に対して、土木学会耐震工学委員会(1992)が提案している静的設計に用いる群杭のフーチング底面の集約ばね係数を説明する。

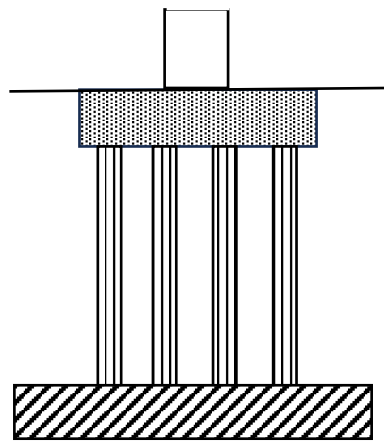


図 4.4-1 群杭・フーチング基礎モデル

群杭基礎の静的設計では、振動数に依存しない静的ばね係数と減衰係数は、フーチング側面の地盤と杭側面の地盤の抵抗を足し合わせて、フーチング底面の群杭図心位置に集約した次式を用いて計算する。

静的ばね係数：

$$\begin{aligned}
k_{PH} &= Nk_1 + G_S h s_{u1} \\
k_{PR} &= \sum_{i=1}^N k_{PVi} x_i^2 + Nk_4 + G_S h s_{u1} \frac{h^2}{3} \\
k_{PHR} &= Nk_2 (\text{or } Nk_3) + G_S h s_{u1} \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{4.4-1a}$$

減衰係数：

$$\begin{aligned}
c_{PH} &= Nc_{PH} + G_S h s_{u2} \\
c_{PR} &= \sum_{i=1}^N c_{PVi} x_i^2 + G_S h s_{u2} \frac{h^2}{3} \\
c_{PHR} &= G_S h s_{u2} \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{4.4-1b}$$

ここに、 $N$  は杭本数、 $G_S, h$  はフーチング側壁の地盤のせん断剛性とフーチングの厚さを意味する。フーチング側壁の反力に関する係数 $s_{u1}, s_{u2}$ は、3.2 節の剛体基礎の側壁の複素ばね係数の係数であり、式(3.2-4)のものを用いる。

上式右辺の計算に必要な $k_1 \sim k_4, c_{PH}$ は、杭頭とフーチングの結合が剛結合かヒンジ結合により、次式のように与えられる。

ヒンジ結合の場合：

$$\begin{aligned}
k_1 &= 2E_P I_P \beta_P^3, \quad k_2 = k_3 = k_4 = 0 \\
c_{PH} &= \frac{3}{4 \times 4.1} \frac{10.6a}{C_S} k_1, \quad \beta_P = \sqrt[4]{\frac{4.1e_g G_S}{4E_P I_P}}
\end{aligned} \tag{4.4-2a}$$

剛結合の場合：

$$\begin{aligned}
k_1 &= 4E_P I_P \beta_P^3, \quad k_2 = k_3 = 2E_P I_P \beta_P^3 \\
k_4 &= 2E_P I_P \beta_P, \quad c_{PH} = \frac{3}{4 \times 4.1} \frac{10.6a}{C_S} k_1
\end{aligned} \tag{4.4-2b}$$

また、 $k_{PVi}, c_{PVi}$  は単杭( $E_P$ :ヤング率,  $A_P$ :断面積,  $a$ :杭半径)の杭頭部の鉛直方向の静的ばね係数と減衰係数を意味し、次式で与えられる。 $x_i$  は群杭図心位置から  $i$  杭までの距離を表す。

$$k_{PVi} = \sqrt{2.7E_P A_P G_S}$$

$$c_{PVi} = \frac{1}{2 \times 2.7} \frac{6.7a}{C_S} \tag{4.4-3}$$

式(4.4-2)の杭基礎の特性値  $\beta_P$  に現れる  $e_g$  は群杭効果の補正係数を意味し、図 4.4-2 のグラフから求められる。

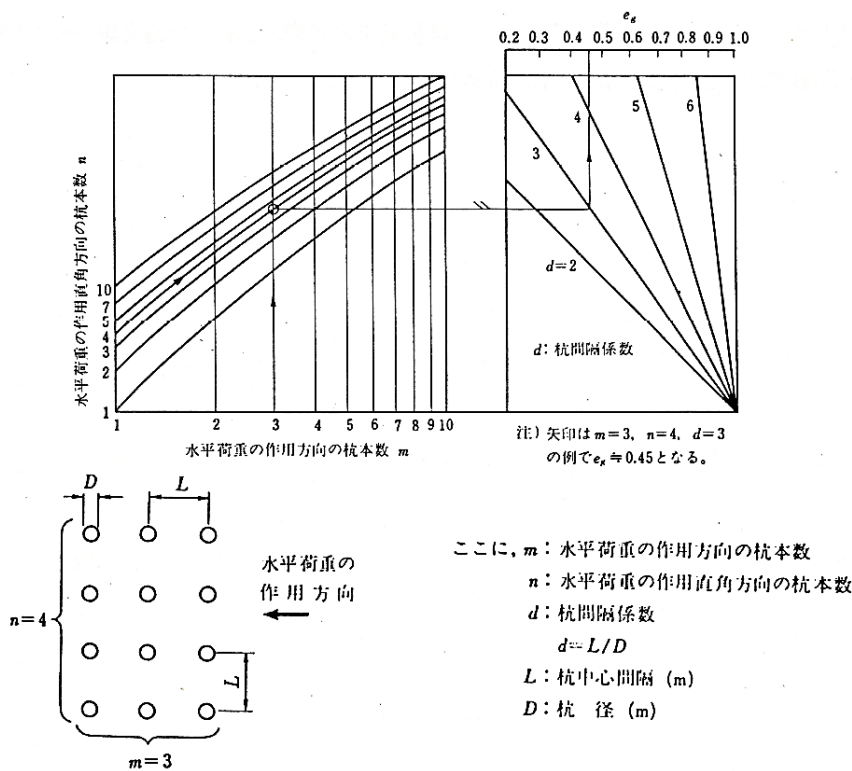


図 4.4-2 群杭に対する補正係数  $e_g$  のノモグラム(土木学会(1986))

## 5章 地盤の非線形ばねモデル (応力レベルの Winkler モデル)

1章から4章までは、地盤と基礎の非線形性は等価線形化程度の非線形性の小さい領域の解析方法である全体系解析法や境界法や容積法の部分解析法に基づくモデル化を解説した。5章では、基礎工の非線形性は等価線形化程度の小さい非線形性とし、地盤の方は地盤と基礎の間の局部的すべりや剥離等を許容する非線形性を考慮できる応力レベルの Winkler モデルについて解説し、数値計算例を示す。

### 5.1 非線形地盤ばね係数モデル

#### (1) 特徴

地盤を弾性体とした時の剛体基礎や杭基礎の地盤反力係数と地盤複素ばね係数は、1章から4章のように動的グリーン関数や有限要素法を使って厳密に評価できる。しかし、基礎と地盤の相対変位が大きくなると、地盤ばね係数の非線形性の影響が大きくなる。そこで、基礎と地盤の接触面の単位面積当たりに作用する地盤反力と基礎の変位の関係を表すウィンクラー(Winkler)モデルの考え方を採用した非線形地盤ばね係数モデルについて説明する。この非線形地盤ばね係数モデルの特徴は以下のようである。

- (1) 基礎周辺地盤は、引っ張り力に耐えずモール・クーロンの破壊基準に従うものとして骨格曲線を定める(原田ら(2017, 2020))。この仮定により本モデルでは、法線方向の地盤応力(引っ張り・圧縮応力)とせん断地盤応力が連成する。例えば、圧縮応力が大きくなれば限界せん断地盤応力は大きくなりすべりが発生し難くなる。逆に、引っ張り応力時には基礎と地盤が剥離するのでせん断応力は発生しない。
- (2) 本モデルでは、法線方向の地盤応力の履歴特性はコンクリートのクラックモデル(田辺(2004))を採用する。本モデルのせん断地盤応力の履歴特性は、法線方向の地盤応力の履歴特性とモール・クーロンの破壊基準から自動的に決められる。
- (3) このような基礎と地盤の接触面の単位面積あたりに作用する地盤反力と基礎変位の関係を表すWinklerモデルの考え方の導入により、これまで上部構造物系で多用されているファイバー要素モデル(原田ら(2017, 2020))が、地盤・基礎系に対して使えるようになり、比較的簡単かつ基礎と上部橋梁系を全て応力・歪レベルで統一的な解析手順によりモデル化すること(マイクロモデルと呼ぶ)が可能となる。

## (2) 非線形地盤ばね係数モデル

基礎と地盤の接触面の単位面積当りに作用する地盤反力と基礎変位の関係を、基礎表面の法線、鉛直、水平方向の3成分毎に図5.1-1と図5.1-2のような非線形ばね特性を持

つ法線方向の地盤反力係数  $k_n$  とせん断方向の地盤反力係数  $k_s$  を用いてモデル化する。

すなわち、基礎表面の法線方向とせん断方向の骨格曲線は式(5.1-1)のように表す。

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \\ k_n u & -u_p < u < 0, \\ -\sigma_p & -u_p \geq u \end{cases}, \quad \tau = \begin{cases} k_s v & |v| < v_0 \\ \text{sgn}(v)\tau_0 & |v| \geq v_0 \end{cases} \quad (5.1-1)$$

ここに、sgn はサイン関数を、 $u, v$  は基礎表面法線方向とせん断方向の基礎変位を表す。

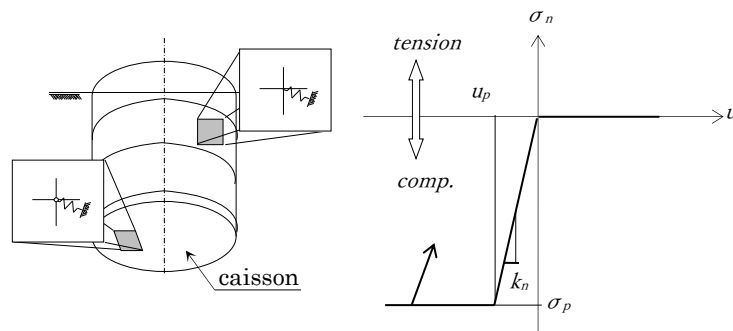


図 5.1-1 非線形地盤反力モデル(法線方向)

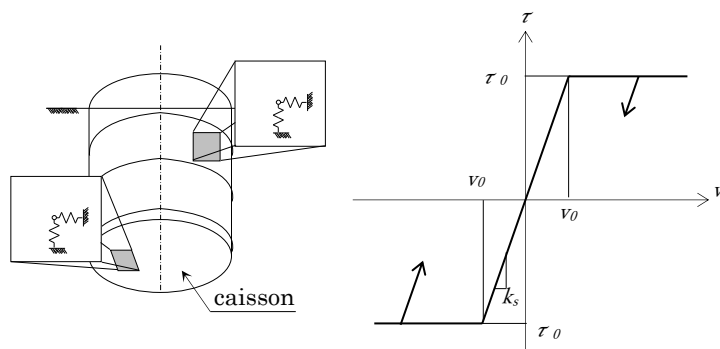


図 5.1-2 非線形地盤反力モデル(せん断方向)

ここで、基礎底面の法線方向の  $\sigma_n$  は、基礎の自重による沈下位置から基礎の変位がスタートするものとし、 $\sigma_p = q_u$  (圧縮極限支持応力) とする(図 5.1-1)。また、基礎側面の法線方向の  $\sigma_n$  は、次式の静止土圧  $\sigma_s$  が常に作用するものとし圧縮極限応力  $\sigma_p$  は、次式のランキンの受動土圧で与えられるものとする。

$$\sigma_s = \sigma_0 k_0, \quad \sigma_p = \sigma_0 k_p + 2c\sqrt{k_p}, \quad \sigma_0 = \gamma_t z \quad (5.1-2)$$

ここに、 $c$  は基礎と地盤の間の粘着係数である。 $\sigma_p$  は地表面から深さ  $z$  点の鉛直方向の土の応力を表し、土の単位体積重量を  $\gamma_t$  とする。また、 $k_0$  と  $k_p$  は静止土圧係数と受動土圧係数を表し、土の内部摩擦角を  $\Phi_s$  とすると、次式で与えられる。

$$k_0 = 1 - \sin \Phi_s, \quad k_p = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\Phi_s}{2} \right) \quad (5.1-3)$$

式(5.1-1)のすべり限界応力  $\tau_0$  は、モール・クーロンの破壊基準を用いて、次式のように基礎表面の法線方向応力  $\sigma_n$  の関数として与えられる。

$$\tau_0 = c + \sigma_n \tan \Phi_s \quad (5.1-4)$$

したがって、提案する基礎と地盤の接触面の単位面積当りに作用する地盤反力モデルでは、基礎と地盤の接触面の法線方向の応力とせん断方向の応力は連成する((1)項参照)。

以上の式(5.1-1)から(5.1-4)の係数の評価式を以下に示す。圧縮極限支持応力  $q_u$  は道路橋示方書より次式から推定する。

$$q_u = \alpha c N_c + \frac{1}{2} \beta \gamma_1 B N_r + \gamma_2 D_f N_q \quad (5.1-5)$$

ここに、 $c$  は基礎底面より下にある地盤の粘性力、 $\gamma_1$  は基礎底面より下にある地盤の単位体積重量、 $\gamma_2$  は基礎底面より上にある周辺地盤の単位重量、 $\alpha$  は地盤底面係数、 $\beta$  は地盤底面係数、 $B$  は基礎幅、 $D_f$  は基礎の有効根入れ深さ、 $N_c$ 、 $N_q$ 、 $N_r$  は支持力係数を示す。

式(5.1-1)の法線方向地盤反力係数 $k_n$ とせん断方向地盤反力係数 $k_s$ は、鉛直方向と水平方向地盤反力係数 $k_V, k_H$ と同じで、 $k_n = k_V, k_s = k_H$ となる。基礎側面の第 $i$ 層と基礎底面の鉛直方向と水平方向地盤反力係数 $k_{Vi}, k_{Hi}$ の方向と記号は図5.1-3のように表す。この法線方向と水平方向地盤反力係数は1章1.4節の半無限弾性体表面上円形基礎の複素ばね係数を単位面積当たりの力と基礎変位の関係から、次式で与えられる。

$$k_n = \frac{\mu}{1 - \nu_P} \sqrt{\frac{A_{ij}}{\pi}}, \quad k_s = \frac{2\mu}{2 - \nu_P} \sqrt{\frac{A_{ij}}{\pi}} \quad (5.1-7)$$

ここに、 $A_{ij}$ は図5.1-3のように地盤反力係数 $k_n, k_s$ を設置する基礎表面の各要素の面積を表し、半径 $a$ の剛体基礎と等価面積( $A_{ij} = \pi a^2$ )として与える。

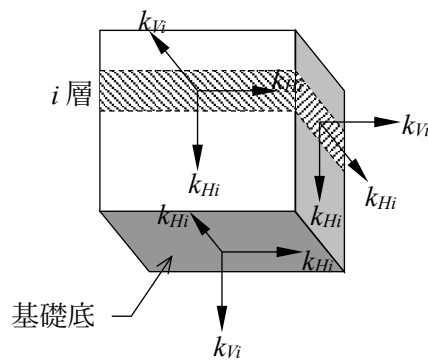


図 5.1-3 地盤反力係数の方向と記号

以上のように基礎と地盤の接触面の単位面積当りに作用する非線形地盤ばねを図5.1-4のように配置し、各要素の非線形地盤反力を求めることができる。必要な物性値は、地盤の弾性定数並びに、土の密度、土の内部摩擦角である。



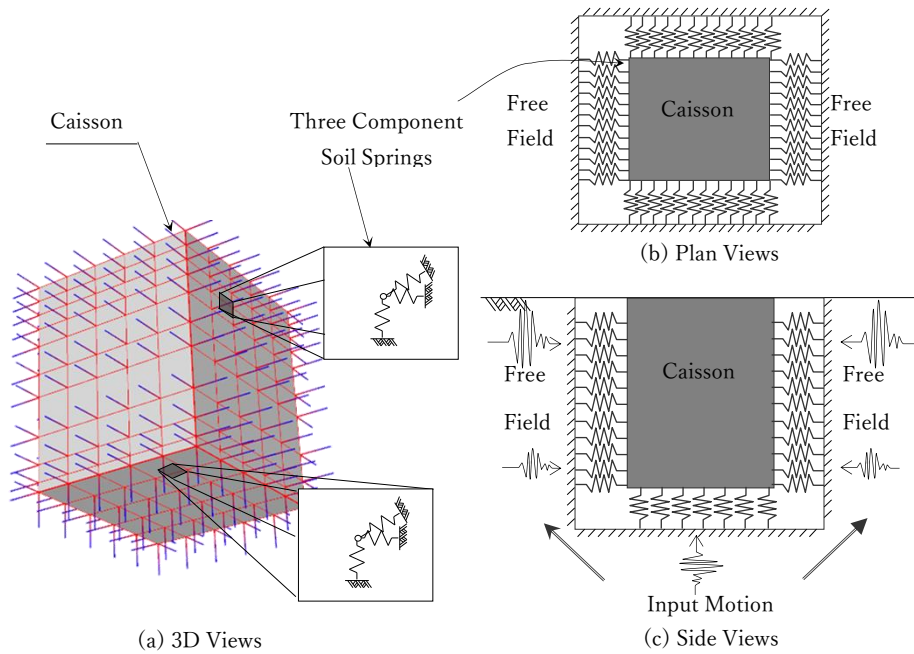


図 5.1-4 3次元 Winkler モデル

## 5.1 補助記事1 ジョイント要素との関係

有限要素法における要素の一つとして、構造物と地盤の接触面の剥離と滑りを考慮するためのジョイント要素がある。ここでは、提案した応力レベルの Winkler ばねモデルとジョイント要素の関係とその違いを説明する。

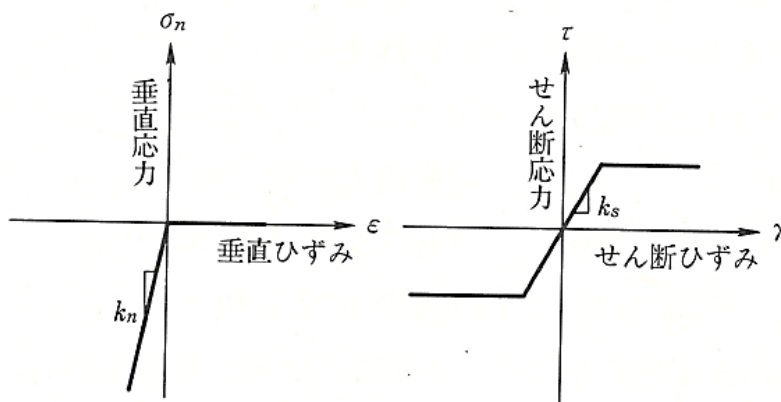


図 A5.1-1-1 ジョイント要素の構成則

ジョイント要素の鉛直応力とせん断応力は図 A5.1-1-1 のように鉛直歪とせん断歪の関数として与えられる。ここに、ジョイント要素の  $k_n, k_s$  は、応力と同じ単位で、提案モデルの地盤反力係数とは異なる。ジョイント要素の  $k_n, k_s$  は、ソリッド要素の高さを  $h$ 、ラーメの定数を  $\lambda, \mu$  とすると、次式を満たすように決められる。

$$k_n \geq \frac{\lambda + 2\mu}{h} a, \quad k_s \geq \frac{\mu}{h} b \quad (\text{A5.1-1-1a})$$

ここに、 $a, b$  はジョイント要素の変位をソリッド要素の変位を  $1/a, 1/b$  以下にするための係数で、一般に、 $a = b = 10$  が用いられる。

上式をラーメの定数を P 波速度  $C_P$  と S 波速度  $C_S$  と密度  $\rho$  で表すと、

$$k_n \geq \frac{\rho C_P^2}{h} a, \quad k_s \geq \frac{\rho C_S^2}{h} b \quad (\text{A5.1-1-1b})$$

モール・クーロンの破壊基準を使うと、降伏せん断応力  $\tau_0$  は、次式のように垂直応力の関数で与えられる。

$$\tau_0 = c + \sigma_n \tan \Phi_s \quad (\text{A5.1-1-1c})$$

### (3) 直接基礎の非線形集約回転ばねと実験結果との定性的比較

提案モデルの特性を示すために直接基礎の非線形集約回転ばねのモーメントと回転角の関係を上記(2)のファイバー要素による Winkler モデルから従来多用される集約ばねを再現し、実験結果との定性的比較を示す(原田ら(2017, 2020))。

図 5.1-5 は、基礎寸法と 20 分割したパッチを示す。底面の各パッチに表 5.1-1 の地盤反力特性を持つ非線形ばねを配置し、次の 3 つの基礎支持力の場合を調べた。

Case(1) 基礎支持力が高い場合（基礎端部支持力が極限支持力以内）。

Case(2) 基礎支持力がやや低い場合（基礎端部支持力が極限支持力を少し超える）。

Case(3) 基礎支持力が低い場合（基礎端部支持力が極限支持力を大きく超える）。支持力を超える場合の応力・変位曲線の第 2 勾配は第 1 勾配の 1/10 を仮定した。

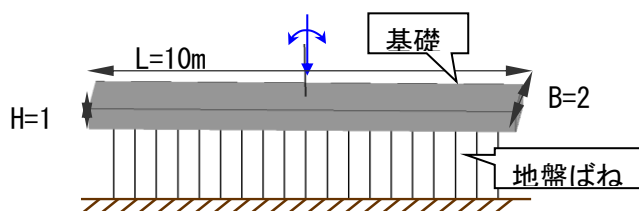


図 5.1-5 数値計算で用いた直接基礎の寸法

表 5.1-1 数値計算で用いた 3 ケースの地盤極限支持応力と地盤反力係数

| 解析ケース | $q_u$<br>( $\text{kN}/\text{m}^2$ ) | $K_v$<br>( $\text{kN}/\text{m}^3$ ) | $K_{SB}$<br>( $\text{kN}/\text{m}^3$ ) |
|-------|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| Case1 | 714.8                               | 79060.7                             | 47444.3                                |
| Case2 | 448.4                               | 79060.7                             | 47444.3                                |
| Case3 | 298.9                               | 79060.7                             | 47444.3                                |

図 5.1-6 は、提案モデルによる基礎のモーメントと回転角の非線形特性(非線形集約回転ばね、右図)および基礎端部の鉛直方向応力と変位の履歴曲線(左図)を示す。上段のものは Case(1)の結果で、端部の履歴曲線(左図)から端部支持力は極限支持力以内で、引っ張り力は零となり、浮き上がりが発生している。

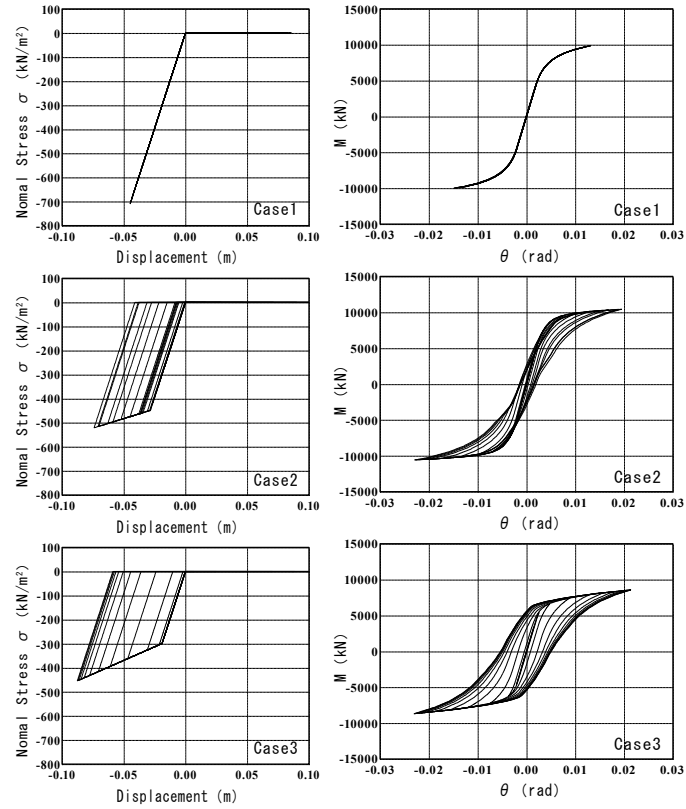


図 5.1-6 提案モデルによる 3 ケース毎のモーメント・回転角履歴特性(右図)と端部鉛直応力・変位の履歴曲線(左図) (Case(1)上段, Case(2)中段, Case(3)下段)

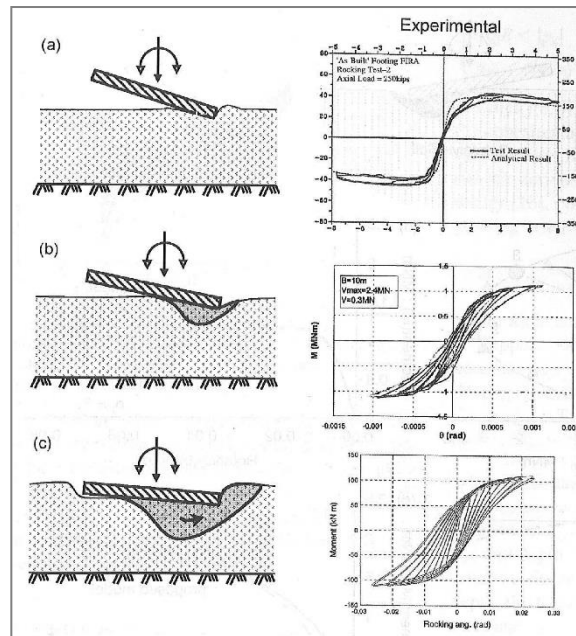


図 5.1-7 模型実験による直接基礎のモーメントと回転角の履歴特性

このモーメントと回転角の非線形特性には履歴特性が現れず骨格曲線のみが非線形性を示す典型的な浮き上がりの回転ばねが再現されている。一方、Case(2)や Case(3)のように基礎端部支持力が極限支持力を超える場合、中・下段に示すモーメントと回転角の履歴型の非線形性が現れてくる。

重要な点は、本モデルは図 5.1-1 と図 5.1-2 のような応力・変位特性にバイリニアモデルを仮定し、これらを各要素に配置し集約ばねを求めると、図 5.1-6 のように曲線的かつ履歴特性を有する非線形回転ばね特性が得られることである。

図 5.1-6 に示したモーメントと回転角の非線形特性は定性的な比較であるが、図 5.1-7 のような直接基礎の実験から得られている特性(Gerolymos and Gazetas (2006)) と同じ傾向である。すなわち、図 5.1-7 の左の実験における基礎と地盤状態の説明図にあるように基礎端部の支持力が不足すると、そこで基礎の沈下が局部的に発生し基礎の浮き上がり面積が減少する。また、モーメント荷重が零となっても基礎は傾いた状態(回転角が零に戻らない)に留まる。図 5.1-6 と図 5.1-7 を比較すると、モーメントと回転角の履歴特性の成長現象(マクロモデルの結果)が、提案モデル(マイクロモデル)から再現できていることがわかる。

## 5.2 提案モデルによる長大橋の解析例

ケーソン基礎を有する長大橋全体系の非線形地震応答解析結果を示しながら、本応力レベルの Winkler ばねモデルが地盤と基礎の局部的剥離や浮き上がり現象と、剥離や浮き上がりが生じた箇所でのせん断応力は零であること、圧縮応力が大きくなるとせん断すべり応力が増加すること(モール・クーロンの破壊基準)等が再現できることを示す。

### (1) 長大橋モデルおよび解析方法

橋梁は、橋長 1,000m(250+500+250)の長大斜張橋で軟弱地盤に建設されているものとする。P2, P3 基礎は大型ニューマチックケーソン(30m×30m)とする。図 5.2-1(b)のように地盤と基礎の接触面(基礎側面と基礎底面)を複数の長方形パッチに分割し、各パッチ内の地盤反力(応力)は一定として非線形地盤ばねを配置する。水の付加質量は無視し基礎の深さ方向には、11層に分割した各層の厚さ、密度、内部摩擦角を用いる。これらの地盤物性値から式(5.1-1)～式(5.1-7)で計算される土圧係数等を用いる。土の履歴減衰に比べ地下逸散減衰は小さいとし地下逸散減衰を無視する。

対象橋梁をファイバー要素法でモデル化し材料非線形性および幾何学的非線形性を考慮した動的複合非線形解析を行う。上部工の減衰定数は 1%レイリー減衰を仮定した。

以上のようにして基礎・上部橋梁系をモデル化したものを図 5.2-1(a)に示す。主部材や耐震上重要な部位のモデル化は次のように行った。

- ① 主塔と主桁は軸力変動と 2 軸曲げを考慮したファイバー要素でモデル化する。
- ② ケーブルはたわみ等の影響を考慮できるケーブル要素でモデル化した。
- ③ 主塔と主桁の接合部のモデル化では、地震時に主桁が橋軸方向に移動することを考慮し、弾性支承やペンデル支承の動的挙動を精度よく表現できるようにした。
- ④ 基礎周辺地盤は(2)項のファイバー要素による Winkler モデルとした。

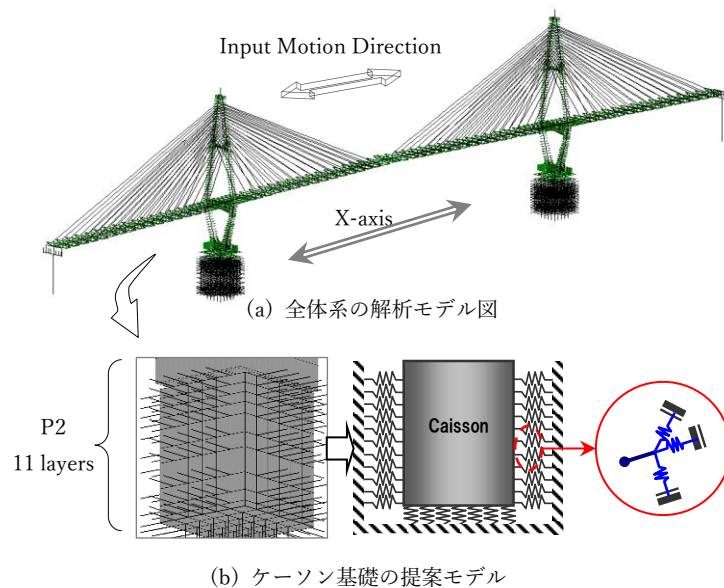


図 5.2-1 解析モデル概要

入力地震動は、1次元地盤モデルの等価非線形地震応答解析で得られる地盤の絶対加速度波形と絶対変位波形を用いた。

## (2) 解析結果

ここでは、橋軸方向の主塔基部のせん断力と曲げモーメントとともに、本モデルの特徴である地盤と基礎の接触面の単位面積当たりの地盤反力（基礎面の法線方向応力とせん断方向応力）の波形と基礎変位の履歴曲線を抽出し概観する。

主塔基部の応答特性：

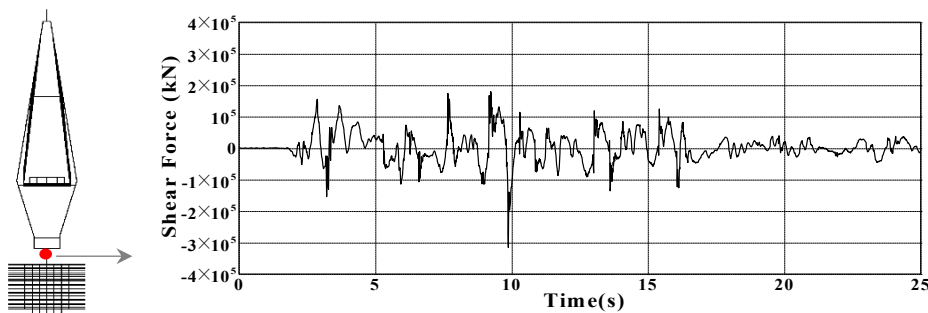


図 5.2-2 主塔基部せん断力

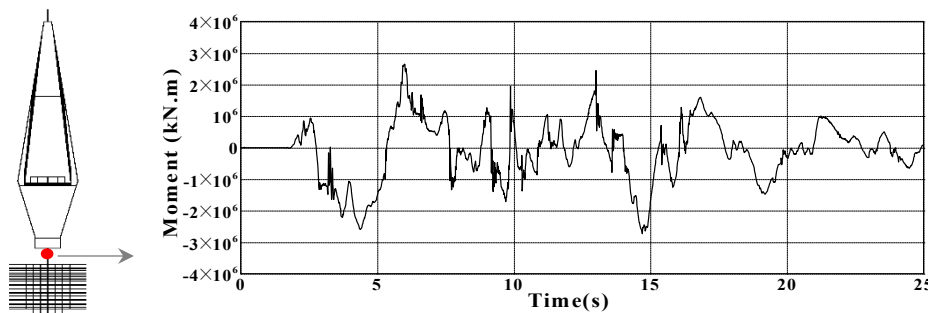


図 5.2-3 主塔基部曲げモーメント

図 5.2-2 と図 5.2-3 に主塔基部に発生するせん断力と曲げモーメントの応答波形を示す。どちらの応答も線形系の応答のように見える。その理由は、どちらかに片寄りのある波形ではないからである。



### 基礎底面の応答特性：

図 5.2-4a は、基礎底面左端の鉛直方向の応力(圧縮と引張)と変位の関係を示す。この図の左側の鉛直応力・変位の履歴曲線から、基礎底面の左端が約 2.5cm 浮き上がっているが、圧縮側の応力は圧縮極限応力以内であることがわかる。すなわち、基礎底部はわずかに浮き上がるが、支持力には問題が無い。本解析では、死荷重作用後に動的解析をしているので死荷重により基礎の浮き上がりが抑えられている。

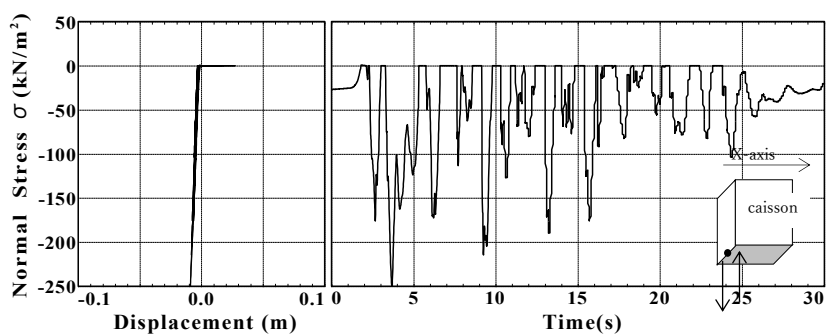


図 5.2-4a 基礎底面鉛直応力・変位の履歴

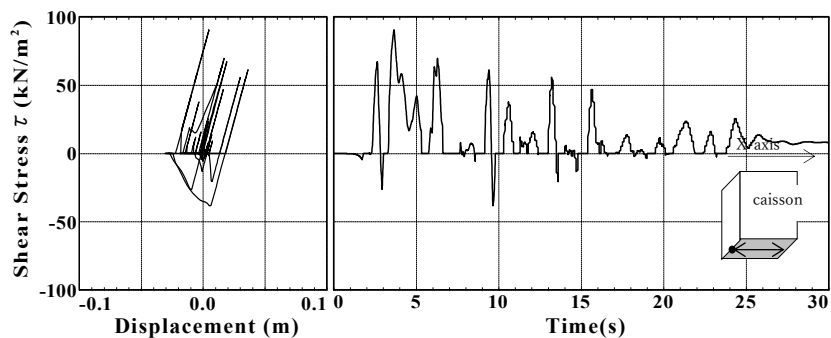


図 5.2-4b 基礎底面せん断応力・変位の履歴

例えば、図 5.2-4a 右図に示す鉛直方向の圧縮地盤応力波形は地震入力加速度が作用し始める約 2 秒までは負の一定値となっている。また、地震入力加速度の大きさが小さ

く零とみなされる約 25 秒以降でも鉛直方向の圧縮地盤応力波形は負の一定値である。

これらの圧縮地盤応力の値は長大橋の自重に相当する。

図 5.2-4b は、基礎底面の左端のせん断応力(すべり応力)と変位の関係を示す。せん断応力の履歴曲線は、モール・クーロンの破壊基準を採用しているため、すべり限界応力が式(5.1-4)のように鉛直応力に依存して複雑な履歴曲線となる。圧縮応力(負の値)が大きくなればすべり限界応力も大きくなりせん断応力もそれに応じて大きくなっている。しかし、鉛直応力が引っ張り(零の値)の時にはせん断応力は零となっている。この理由は、本非線形地盤ばねモデルでは、浮き上がりが生じた場合、その基礎底面の地点でのせん断応力が期待できないためである。

#### **基礎側面の応答特性(第 1 層の単位面積当りの地盤反力・変位)：**

図 5.2-5a は、第 1 層地盤の地震入力方向(橋軸方向)と直交する基礎側面の単位面積当たりの法線方向の地盤反力(圧縮と引張応力)と変位の関係およびその応力波形を示す。左図の法線方向応力と変位の履歴曲線から、圧縮側(負の応力)では地盤が降伏していること、引っ張り時には、地盤と基礎の間の応力は零で約 6cm の剥離が生じていることがわかる。

図 5.2-5b は、同じ地点の鉛直方向のせん断応力と変位の関係およびせん断応力波形を示す。せん断応力と変位の履歴曲線は、基礎底面と同じように複雑な履歴曲線である。

図 5.2-5a,b の応力波形から、基礎と地盤の間に剥離が生じた時には、せん断応力は零と  
なっていることがわかる。

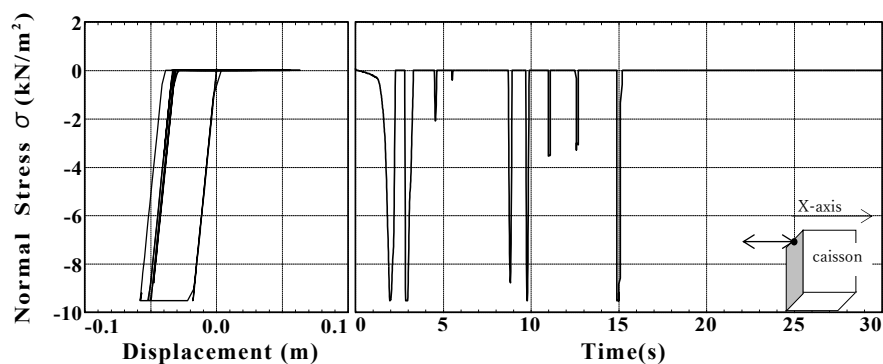


図 5.2-5a 基礎側面の法線応力・変位の履歴(第 1 層)

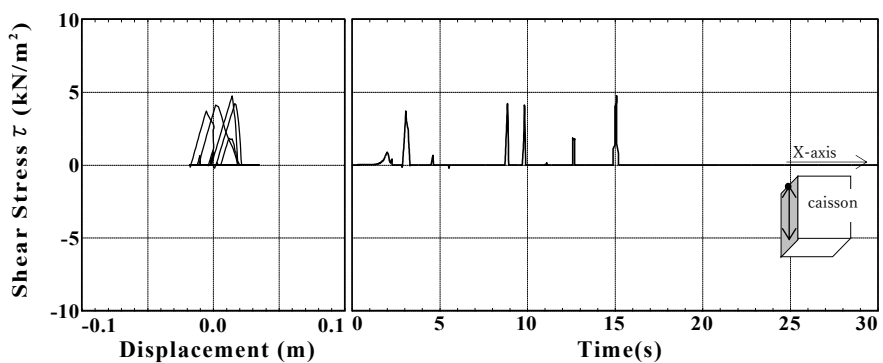


図 5.2-5b 基礎側面のせん断応力・変位の履歴(第 1 層)

本モデルは、基礎各所の地盤応力波形を観察できるために、マイクロモデルあるいは応  
力レベルの Winkler モデルと呼べる。しかし、従来の集約地盤ばねモデルは、各所の地  
盤応力波形を見ることができないため、マクロモデルと言えよう。

## 5.3 杭基礎を有する高炉ガスホルダー試算例

杭基礎に支持された高炉ガスホルダー(BFGホルダー)の非線形地震応答解析例を通して、BFGホルダーの地震時応答特性や基礎固定とした場合と応力レベルのWinklerばねモデルを使った杭基礎の相互作用を考慮した場合の応答の比較から、局部的剥離による履歴曲線による振動エネルギー吸収による応答の低減効果を示す。

### (1) 高炉ガスホルダーの概要

製鐵所においては、コークス炉、高炉、転炉などを用いて操業する場合、必ずガスが生成される。これらのガスは、燃料ガスとして再利用可能であることから、炉から排出された後、円筒型の貯蔵タンク(ガスホルダーという。高炉ガスの場合BFGホルダーという)内にいったん貯蔵され、必要に応じて取出される。

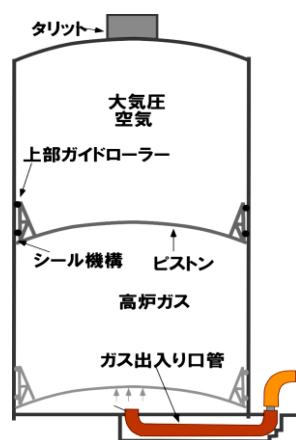


図 5.3-1 BFGホルダーの構造イメージ

通常、ガスホルダー内には周縁にシール手段を備えた蓋状のピストン機構(以下、単にピストンという)が装着されており、ピストンは、ホルダー下部に供給され、かつ下部から排出されるガス量(ガス圧)に対応して昇降摺動しガスを封じ込む構造となっている。図 5.3-1 に BFG ホルダーの構造イメージを示す。

## (2) BFG ホルダーのモデル化

モデル化の詳細は、原田ら(2008)に譲る。ここでは、15 万 m<sup>3</sup> クラスの大型高炉ガス(BFG)ホルダーを想定し、図 5.3-2 に示すように 3 次元骨組モデルにモデル化する。地震時に塑性化する可能性の高い BFG ホルダー基柱は 3 次元ファイバー要素でモデル化する。BFG ホルダーの側壁(側板)・屋根・タリット部などの平面構造と曲面構造は、同様に塑性化が表現できるシェル要素でモデル化する。モデル化された BFG ホルダーの外観を表示させると図 5.3-3 のようになる。

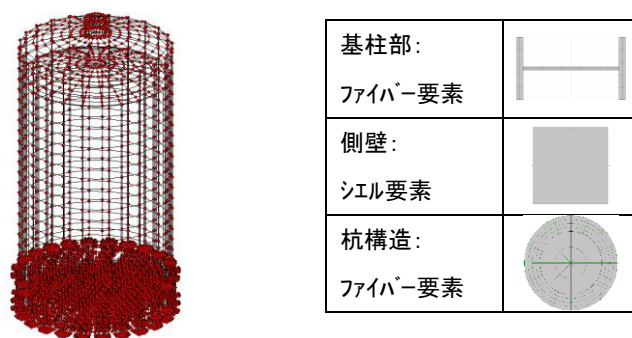


図 5.3-2 ガスホルダーの 3 次元骨組モデル

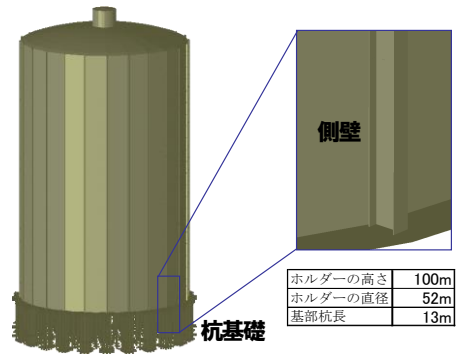
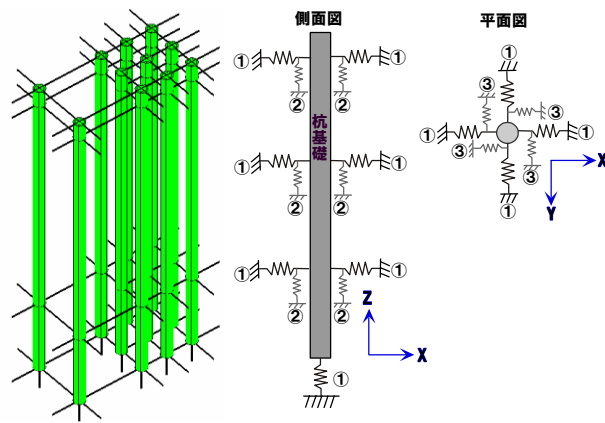
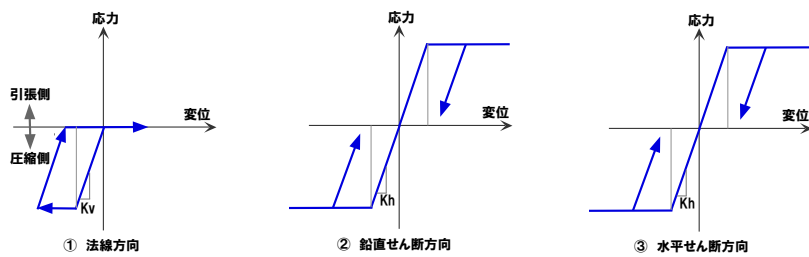


図 5.3-3 ガスホルダーの 3 次元イメージ



(群杭構造モデル)

(a) 3 成分地盤ばねのイメージ図



(c) 3 成分地盤ばねの構成則

図 5.3-4 地盤相互作用を考慮した杭基礎の提案モデル

ホルダー底面の杭基礎系に対し、基礎と地盤接触面の単位面積当りに作用する地盤反力と基礎の変位の関係を表す応力レベルの Winkler モデルを採用した非線形地盤ばねモデルを用いる。この地盤ばねは、図 5.3-4 に示すように法線、鉛直と水平方向の 3 成分の連成ばねである。ただし、杭は密に設置されているため、群杭効果により全体の地盤ばねは、群杭効果により単杭の地盤ばねを杭本数だけ足し合わせたものよりはかなり小さくなる。ここでは、群杭効果を無視したモデルとしているため、後で示す杭・ガスホルダー系の固有周期はあまり変化しないが、動的相互作用の効果によりガスホルダーの地震時最大歪は大きく低減されている。

### (3) 地盤と基礎の非線形相互作用の影響

ここでは、地盤と基礎の上部構造物応答への影響を示すために、ピストンがホルダーの上端部に位置するケース 1 において基礎固定とした場合(ケース 1')との比較をする。基礎固定の場合(ケース 1')と基礎を考慮した場合(ケース 1)の 1 次固有周期の比較を表 5.3-1 に示す。

表 5.3-1 ケース 1' とケース 1 の 1 次固有周期の比較

| 周期<br>T(s) | 基礎固定  | 杭基礎を考慮 |
|------------|-------|--------|
| X軸方向       | 0.562 | 0.565  |
| Y軸方向       | 0.648 | 0.650  |
| Z軸方向       | 3.514 | 3.514  |

この表 5.3-1 から、本モデルは群杭が密に打設され、基礎がかなり堅固であることや群杭効果を見逃したモデル化のため、両ケースの固有周期はほとんど変わらない。ただし、ケース 1 における水平方向の固有周期は僅かに長周期化している。

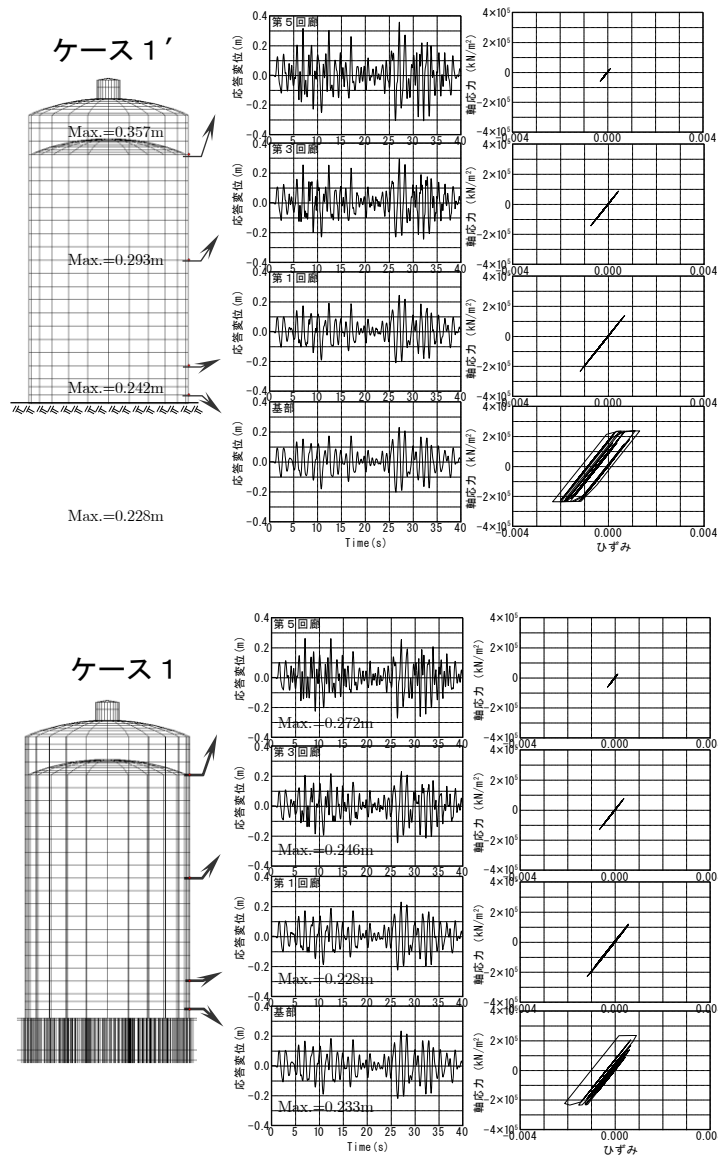


図 5.3-5 基柱の応答波形(絶対応答変位)と基柱断面の軸応力と歪みの応答履歴曲線 (ケース 1' とケース 1)



次に、第6番基柱の基部と第1、第3と第5回廊部の基柱の応答変位と基柱断面の軸応力と歪みの応答履歴を出力し、図 5.3-5 に両者の比較を示す。ただし、ここに出力している応答変位は、絶対応答変位となっている。

図 5.3-5 に示す基柱部の応答変位の最大値は、ケース 1' では、BFG ホルダーの基部で 22.8cm(地表面応答変位)に対し、ケース 1 では、杭基礎の影響のためわずかに大きい 23.3cm の変位が現れている。このわずかな違いは、堅固な杭基礎と群杭効果を無視したモデルにより地盤ばねが大きく評価されているためである。

しかし、このような基部の応答変位とは逆に、BFG ホルダー上部の最大応答変位は、ケース 1' では、上から 35.7cm、29.3cm、24.2cm に対し、ケース 1 では、27.2cm、24.6、22.8cm と相互作用考慮した場合の応答変位の方が小さくなっている。これが非線形動的相互作用の影響である。

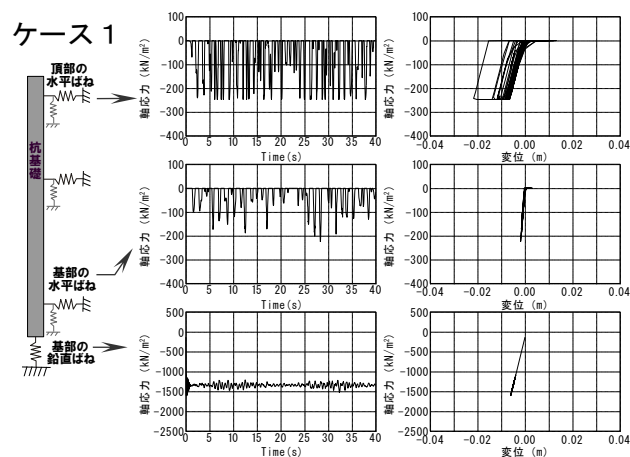


図 5.3-6 非線形動的相互作用を考慮したケース 1 の杭上部・中部・下部の水平ばね応力の時刻歴波形(左)とその履歴曲線(右)

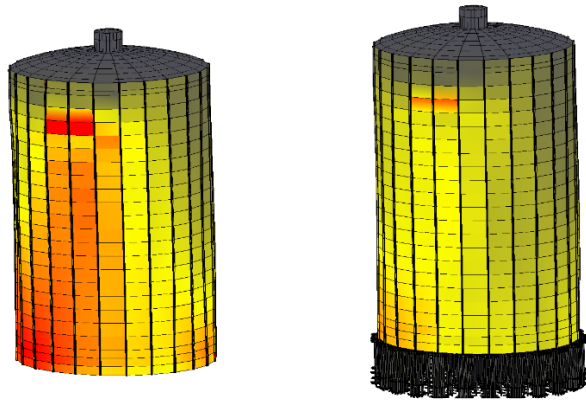


図 5.3-7 基礎固定(左)と杭基礎考慮(右)の2 ケースのガスホルダー側壁の地震時最大歪分布(濃い赤色ほど歪が大きい)の比較

この非線形動的相互作用の影響には、以下の2つの要因が関係している。

- (1) 図 5.3-6 に示すように基礎の履歴曲線による減衰効果による上部構造の応答変位の減少。
- (2) この上部構造の応答変位の減少による上部構造部材の非線形応答ひずみの減少  
(図 5.3-7 は地震時最大歪の比較を示す)。

図 5.3-5 に示す右側の応答履歴曲線の比較から、基礎固定のケース 1' では応答変位が大きいため、基柱基部の降伏回数が多く、最大応答歪がケース 1 より大きい。

以上のように、弾性解析 1 次固有周期には相互作用効果の影響は、ほぼないが、上部構造の応答に影響することが確認できた(応答変位と基柱基部の応答ひずみがかなり緩和される)。群杭効果を考慮すると固有周期も長くなり、履歴曲線によるエネルギー吸収もさらに大きくなるものと思われる。

## 5.4 大型ボックスカルバート道路高架橋の試算例

地震に対して安全性や修復性を確保するために部材寸法が大きくなり、落橋防止構造等を設置する必要性から高コストになる高架橋の代わりに、従来土構造の一部を構成する要素として用いられていたカルバートを大きくし、連続化することにより、本体道路として大型ボックスカルバート高架橋が使用され始めている。通常の橋梁の3次元非線形応答解析法とその応答挙動に関する研究は進んでいるが、ボックスカルバート道路高架橋の解析モデルや動的解析の研究が少ない。

地盤と構造物を一体化した3次元非線形FEM応答解析が理想であるが、ここでは、応力レベルのWinklerばねモデルと3次元非線形FEM応答解析の結果が同じになることを確認し、地盤の効果を応力レベルのWinklerばねモデルでモデル化した全体系解析の試算例を示す。この試算例により、重要な耐震性チェック項目を示す。この方法を使うと計算時間の大幅な減少になったので、実務設計と実務の詳細解析に用いることができるものと思われる。

### (1) 解析用の橋梁概要

図5.4-1は、大型ボックス形式高架橋の写真で、橋梁は、以下のようなものとする。

- ① 橋 長： $L=277.40\text{m}$
- ② 構造形式：RC5・6径間連続ボックス形式高架橋9連(橋軸方向の連結無し)

(24.20m+2×25.10m+24.30m+4×25.10m+28.25m)

③ 基礎形式：直接基礎（II種地盤）

（上下線；頂版、底版側壁分離、拡幅部；頂版、底版一体、側壁分離）

この解析に用いた橋梁の構造特性を踏まえれば、橋軸方向に連結されていないことから、大規模地震時における各連の相対変位によるずれが懸念される。そこで、大規模地震時における地盤の沈下・変形、併せて構造物の耐震性能(部材の限界状態、各連の開きやずれ)を評価する。



図 5.4-1 大型ボックス形式道路高架橋の写真例

## （2）対象橋梁のモデル化の概要

表 5.4-1 と表 5.4-2 に各所のモデル化の概要と各要素数を示す。ボックスカルバート構造に対しては、FEM の積層タイプシェル要素(厚肉板構造に対応)で評価する。橋軸方向の隣接ボックス同士の頂版と底版は連結してないため、隣接ボックスにおいて遊間分の相対変位が発生した場合には、頂版同士、底版同士の衝突が発生する。このため隣接頂版と底版間に衝突を表現できる衝突ばねを設ける。また、地盤と設置面積が大きい底版を有するボックス構造のすべりや浮き上がり等を検討するため、構造物底面から支

持地盤まで3成分Winkler非線形連成地盤ばねを設け、地盤と構造物の動的相互作用を考慮する。

表 5.4-1 モデルの種類

| 部 位       |                         | モデル化                        | 備 注           |
|-----------|-------------------------|-----------------------------|---------------|
| 軀 体       | 鉄筋コンクリート<br>頂版・底版・側壁・中壁 | 積層シェルモデル                    | 3次元非線形構成則     |
| 基 礎 地 盤   | 底面鉛直軸バネ                 | 3成分応力レベルの<br>Winkler非線形地盤ばね | 軸方向引張無抵抗      |
|           | 底面水平せん断バネ               |                             | せん断方向 R-O モデル |
|           | 側面水平軸バネ                 | 3成分応力レベルの<br>Winkler非線形地盤ばね | 軸方向引張無抵抗      |
|           | 側面水平せん断バネ               |                             | せん断方向 R-O モデル |
| 側面鉛直せん断バネ | せん断方向 R-O モデル           |                             |               |
| 始点側       | 頂版側                     | A1橋台と支承連結                   | 橋軸固定、直角固定     |
|           | 底版側                     | 3成分応力レベルの<br>Winkler非線形地盤ばね | せん断方向 R-O モデル |
| 終点側       | 頂版側                     | A2橋台と支承連結                   | 橋軸固定、直角固定     |
|           | 底版側                     | 3成分応力レベルの<br>Winkler非線形地盤ばね | せん断方向 R-O モデル |

表 5.4-2 モデルのメッシュ数

| 部 位               | 要素数   | 節点数   |
|-------------------|-------|-------|
| 構造本体の積層シェル要素      | 24004 | 36040 |
| 底面と側面地盤の非線形ばね要素   | 11456 |       |
| 隣接ボックス同士および桁端衝突要素 | 1223  | —     |

図 5.4-2 は、解析対象橋の地盤・ボックスカルバート道路橋全体系のモデル化のイメージ図を示す。図 5.4-3 は、全体系の No.8 部分の地盤・ボックスカルバート道路橋モデルの拡大図を示す。

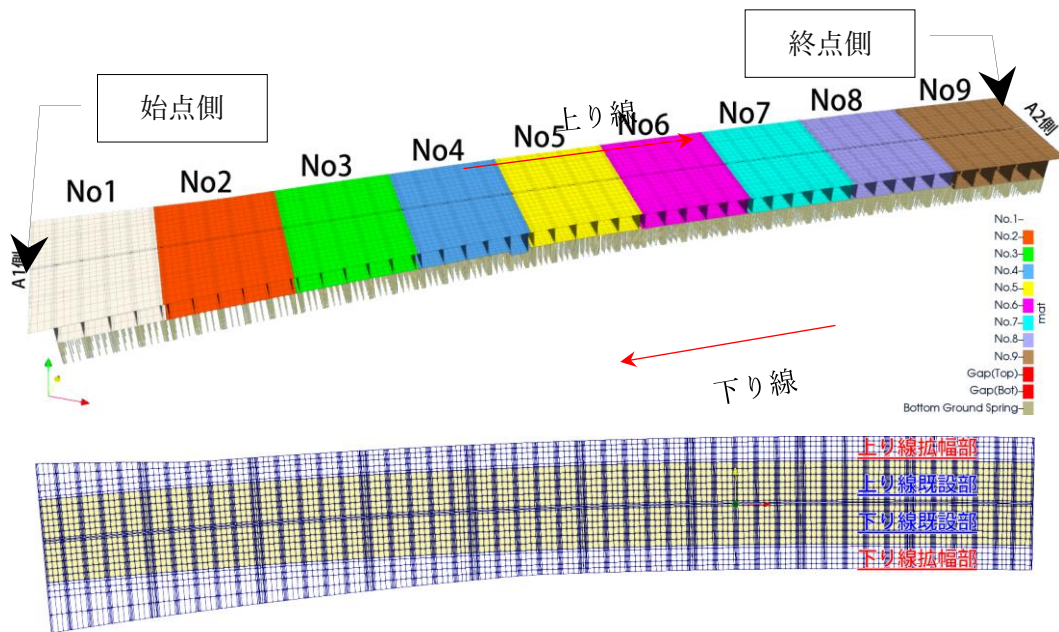


図 5.4-2 橋梁全体系モデルのイメージ図

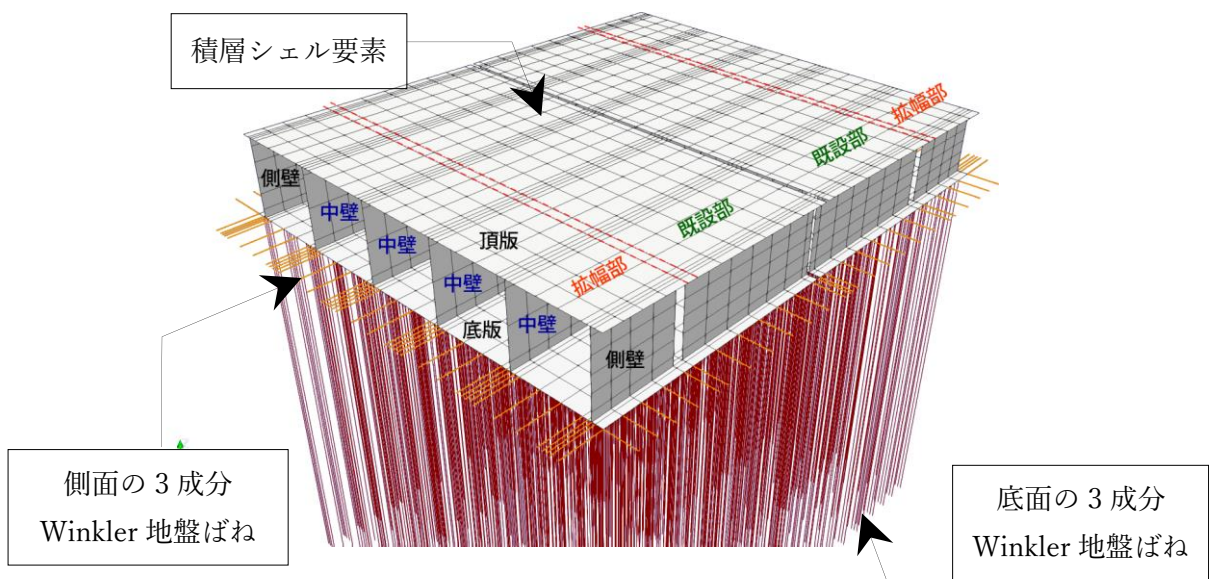


図 5.4-3 ボックス構造モデル(No.8 のイメージ図)

### (3) 隣接ボックス間の衝突モデル

地震時に、隣接のボックス同士が遊間分まで移動すると、圧縮・衝突によるハードニング現象が発生する。そこで、図 5.4-4 のように橋軸方向と橋軸直角方向(上り線と下



り線間)ボックス同士の衝突、または、A1、A2 橋台側の頂版とパラペットの接触衝突を表現できる衝突ばねモデルを配置する。

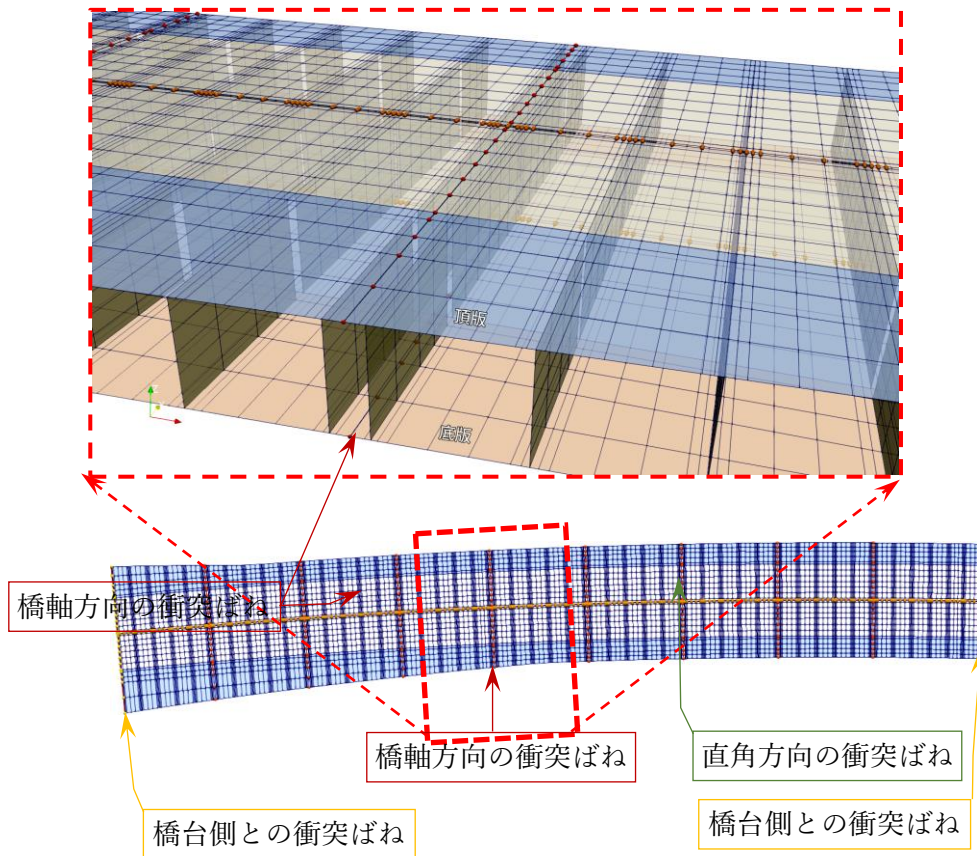


図 5.4-4 衝突モデルの配置位置

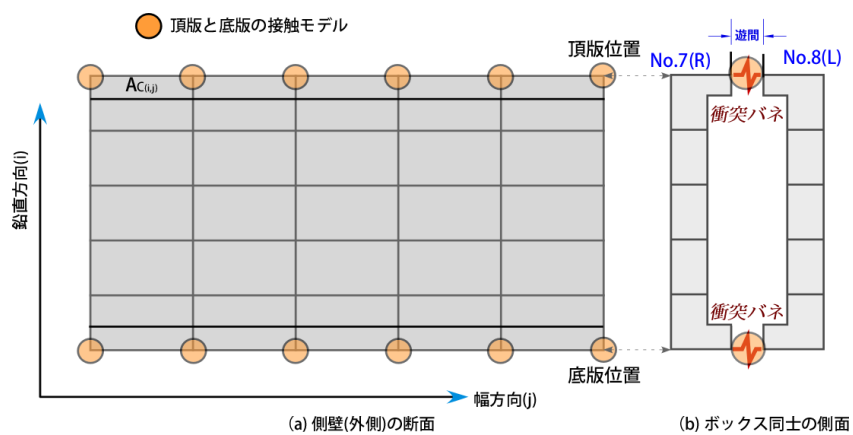


図 5.4-5 橋軸方向のボックス同士の接触モデル

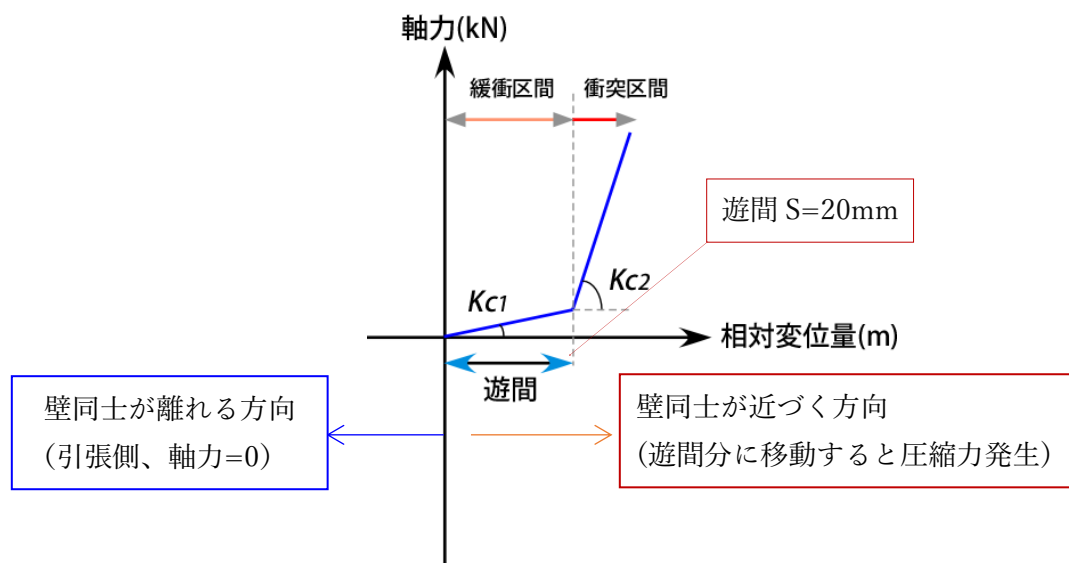


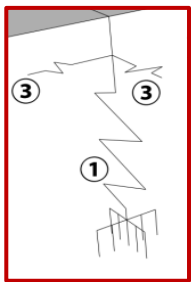
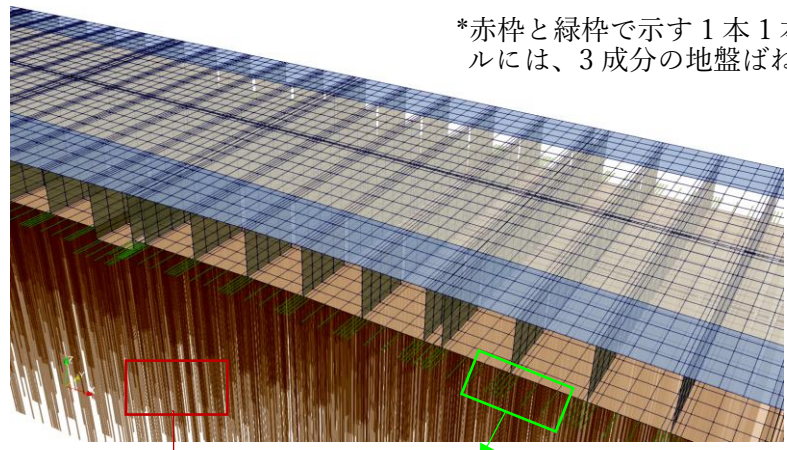
図 5.4-6 緩衝と衝突のバネモデル

図 5.4-5 に橋軸方向のボックス同士間の衝突構造のイメージ図を示す。また、衝突バネのモデル化は、図 5.4-6 のように設定する。なお、遊間部の緩衝剛性( $Kc1$ )は、緩衝材がないため、剛性を零とし、衝突剛性( $Kc2$ )を部材の接触面積を考慮して推定する。この衝突ばねは、引張に対して完全無抵抗とし、地震応答中に壁同士の移動で遊間分の相対変位が発生した場合には、緩衝剛性から衝突剛性に切り替わる。

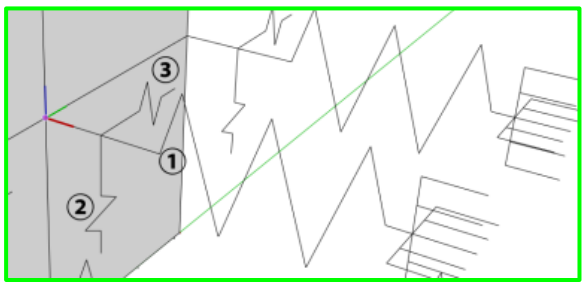
#### (4) 地盤の応力レベルの Winkler ばねモデル

図 5.4-7 と図 5.4-8 に示すようにカルバート構造の底版と地盤間の相互作用を考慮するため、3成分 Winkler 非線形連成地盤ばねモデルを使用する。





a. 基礎底面の3成分地盤ばね



b. 基礎側面の3成分地盤ばね

①鉛直方向と③水平せん断2方向

①水平軸方向と②鉛直せん断方向, ③水平せん断方向

図 5.4-7 3成分 Winkler 非線形連成地盤ばねモデルのイメージ図

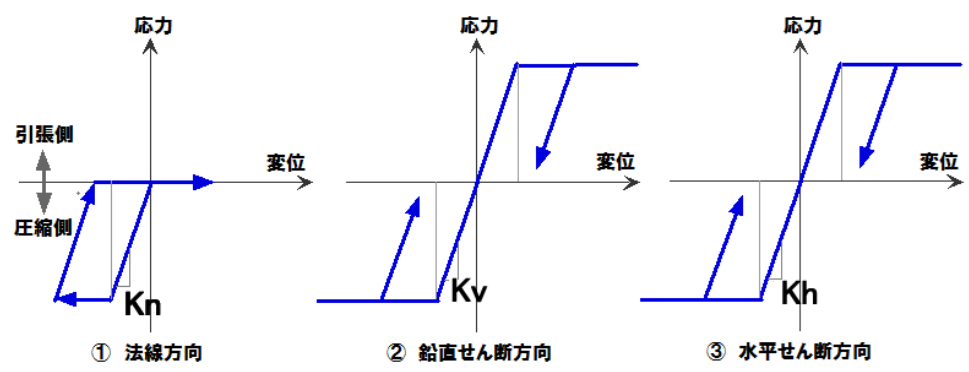
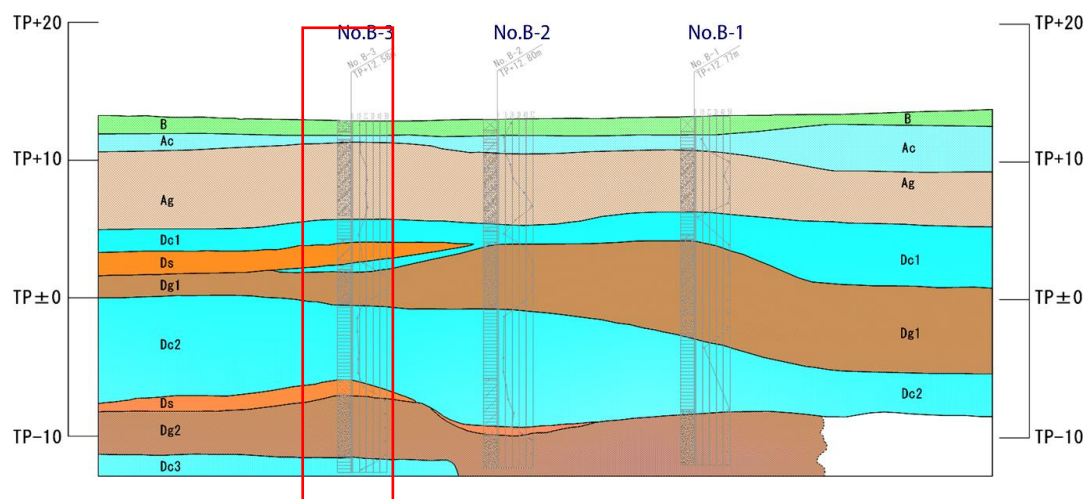


図 5.4-8 3成分の地盤ばねモデルの非線形特性

この地盤ばねは、軸方向ばね①とせん断ばね②③が連成するようにモデル化されている。この連成地盤ばねモデルは、法線方向の圧縮応力が大きくなると、せん断すべり限

界応力が大きくなり、土層中の側面・底面と地盤支持面の間のすべり抵抗が大きくなる。

一方、浮き上がりが生じた場合、その基礎底面の地点でのせん断方向の抵抗応力が期待できないというような現象が表現できる。



| 地質区分 | 地層名   | 記号  | 特徴                             |
|------|-------|-----|--------------------------------|
| —    | 盛土    | B   | 層厚は0.80～1.10m程度。               |
| 沖積層  | 粘土層   | Ac  | 砂分狭在。                          |
|      | 礫層    | Ag  | φ 30～50mm礫混入し、全体に緩い。           |
| 洪積層  | 第一粘土層 | Dc1 | 均質な粘性土。B-3では砂層を狭在し、上下2層に区分される。 |
|      | 第一礫層  | Dg1 | よく縮まっている。                      |
|      | 第二粘土層 | Dc2 | 均質な粘土。                         |
|      | 砂層    | Ds  | Dc1中やDc2直下に局所的に分布。細砂主体で全体に緩い。  |
|      | 第二礫層  | Dg2 | よく縮まっている。                      |
|      | 第三粘土層 | Dc3 | 均質な粘土。                         |

図 5.4-9 ボーリングの位置と推定地盤断面図

図 5.4-9 の地質調査結果(3 箇所)のボーリング位置 NoB-1,NoB-2,NoB-3)を元に、地盤の 3 次元 FEM 解析および、Winkler ばねの検証では、NoB-3 孔位置の地盤構造を用いる。また、3 次元地盤 FEM モデルは、十分な支持力が得られる洪積礫質土(Dg2)層までのモデル化をするので、検証する地盤ばねの深さは 24.35m となる。

## (5) 地盤の応力レベルの Winkler ばねモデルの FEM による検証

ここで、図 5.4-10 に示すように No.B-3 ボーリング調査位置に最も近い No.8 ボックスの 3 次元 FEM モデルを構築し、Winkler 地盤ばねモデルによる軟弱地盤の残留変位量を検証する。また、地盤ばねの検証精度を重視し、洪積砂礫層(Dg2)までほぼ全地層を対象に地盤の 3 次元モデルを作成した。

検証用の 3 次元 FEM 詳細モデルの材料特性は、地盤のひずみ依存性に基づく修正 Ramberg-Osgood モデル(以下「修正 R-O モデル」という)を用いた。

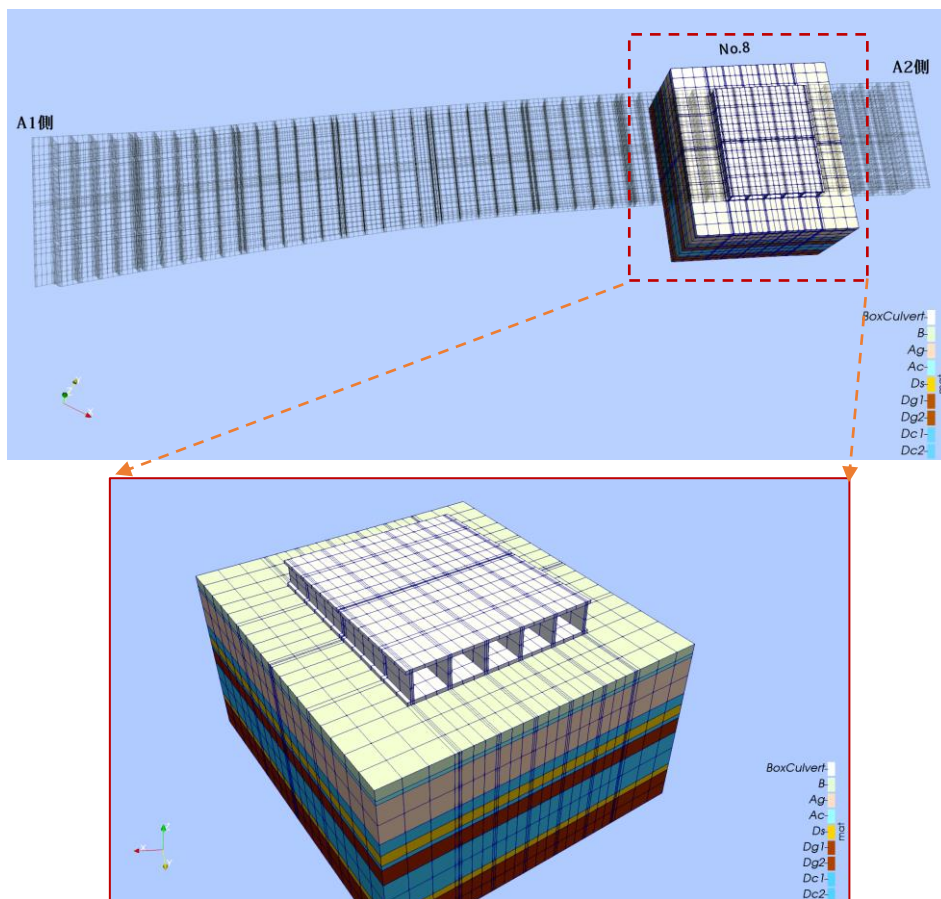
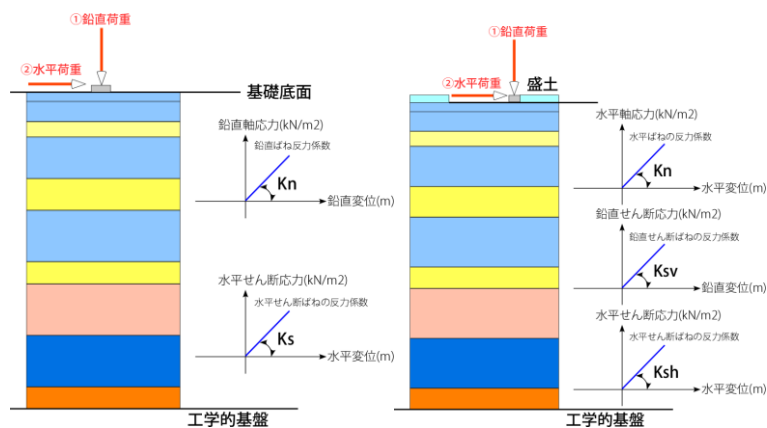


図 5.4-10 検証用構造モデル(No.8)の位置

## (1) 検証の手順

ステップ1：図 5.4-11 に示すように 3次元 FEM モデルから、PushOver 解析で地盤ばねの反力係数を設定する。



a. 基礎底面のばね剛性の推定

b.基礎側面のばね剛性の推定

図 5.4-11 地盤ばねの反力係数の設定

ステップ2：工学基盤までの Winkler 地盤ばねモデルを作成する

ステップ1で推定したばね反力係数を用いて、図 5.4-12 のように単位面積当たりの Winkler 地盤ばねモデルに置き換えて提案モデルを作成する。

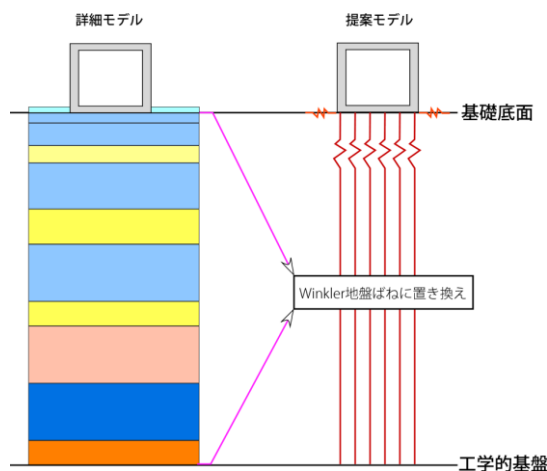
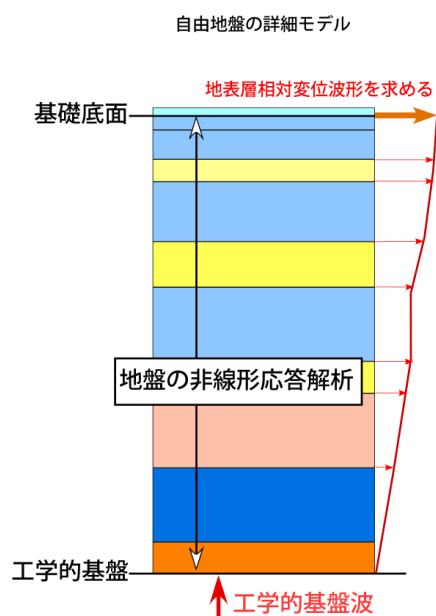


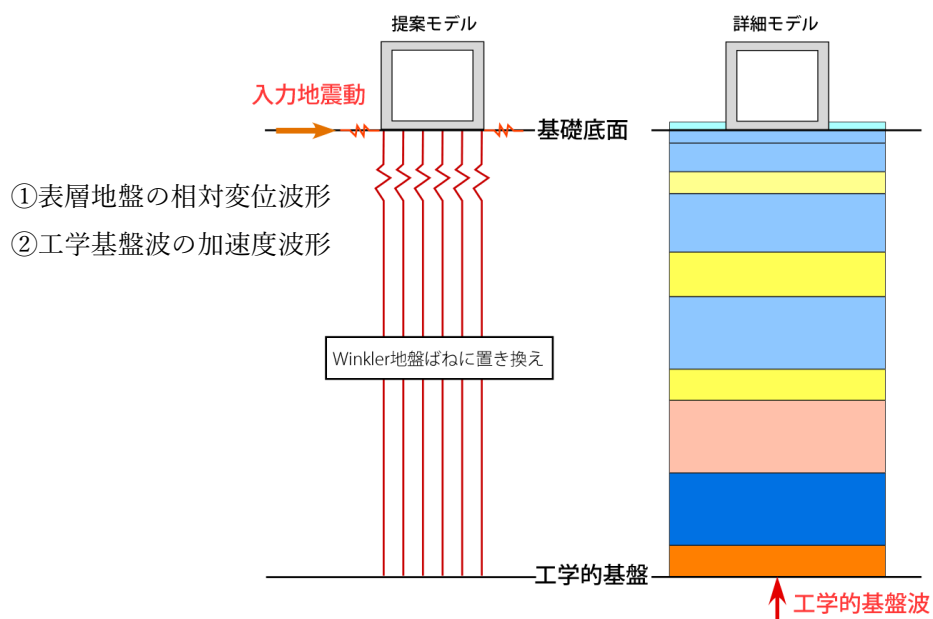
図 5.4-12 Winkler 地盤ばねモデルの作成

ステップ3：工学基盤までの Winkler 地盤ばねモデルと 3次元 FEM モデルの地震応答の比較による検証

地震応答の検証では、図 5.4-13 のように、まず、全体系の詳細モデルを自由地盤として、地震応答解析から地表面付近(基礎底面位置)の地表面変位波形(工学的基盤からの相対応答変位)を求める。次に、この地表面変位波形と工学基盤の地震加速度を入力地震動として提案モデルに入射させ、構造物の地震応答を求める。なお、地表面変位波形の入射は、基礎側面の地盤ばねを介して、地盤反力として構造物に与える。最後に、ボックス構造の頂版付近の応答について、提案モデルと全体系の詳細モデルによる比較をする。



(a) 自由地盤としての地震応答解析



(b) 提案モデルと詳細モデルの地震応答解析

図 5.4-13 地震応答の検証

## (2) 全体系の詳細モデルによる地盤ばねの推定

図 5.4-14 は、洪積砂礫層 (Dg2 層) までの 3DFEM 詳細モデルと、地盤全体を Winkler ばねに置き換えた提案モデルを示す。

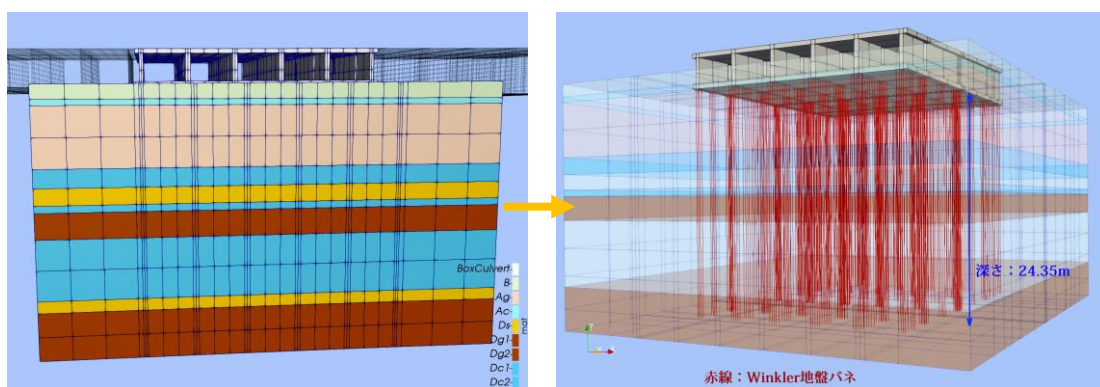
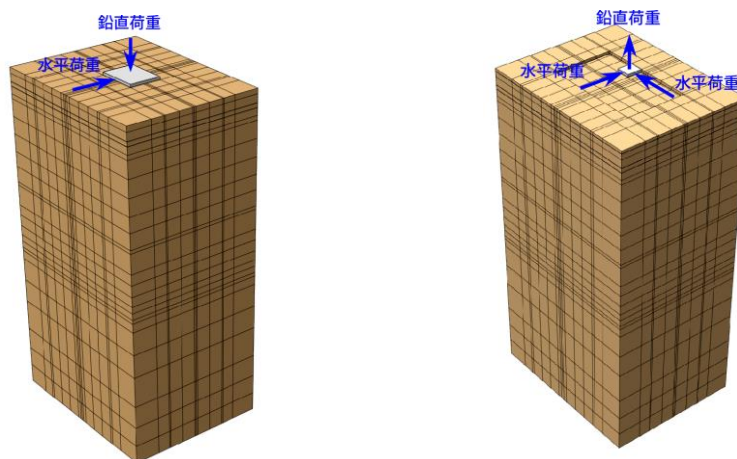


図 5.4-14 詳細モデルと提案モデル



地盤反力係数の推定には、図 5.4-15 に示すようにボックス底面の支持層と側面の盛土に、鉛直荷重と水平荷重をかけ、それぞれの PushOver 解析で各成分の地盤反力係数を推定する。



a. 基礎底面の地盤反力係数の推定    b. 基礎側面(盛土)の地盤反力係数の推定

図 5.4-15 地盤反力係数の推定方法

表 5.4-3 降伏応力度と詳細モデルから推定した地盤の反力係数

| 地盤種類      | 成分     | 降伏応力度<br>kN/m <sup>2</sup> | 地盤反力係数<br>kN/m <sup>3</sup> |
|-----------|--------|----------------------------|-----------------------------|
| 底面地盤      | ①鉛直方向  | 8516.1                     | 3.677E+04                   |
|           | ③水平せん断 | 6653.5                     | 3.577E+03                   |
| 側面地盤 (盛土) | ①水平方向  | 25.8                       | 1.966E+04                   |
|           | ②鉛直せん断 | 16.7                       | 7.230E+03                   |
|           | ③水平せん断 | 16.7                       | 2.880E+03                   |

図 5.4-16 と図 5.4-17 は、基礎底面と基礎側面の地盤反力係数の計算値と近似値を示す。また、表 5.4-3 には、用いた非線形 Winkler ばねモデルのパラメータ値を示す。

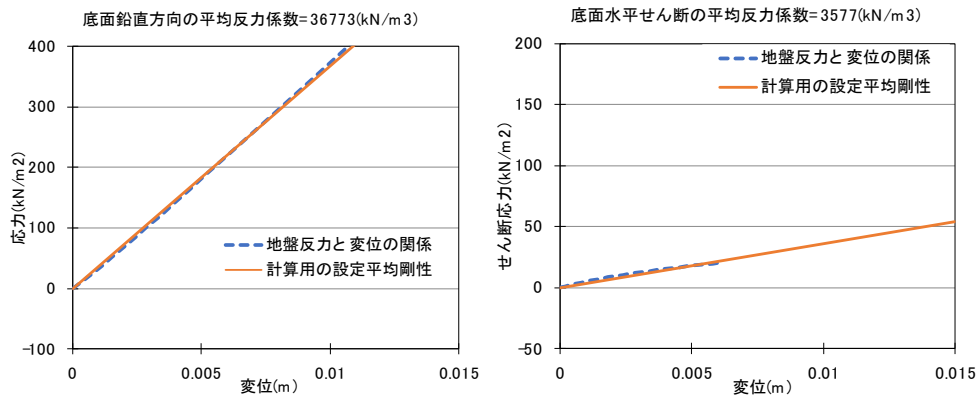


図 5.4-16 詳細モデルから推定した基礎底面地盤の反力係数

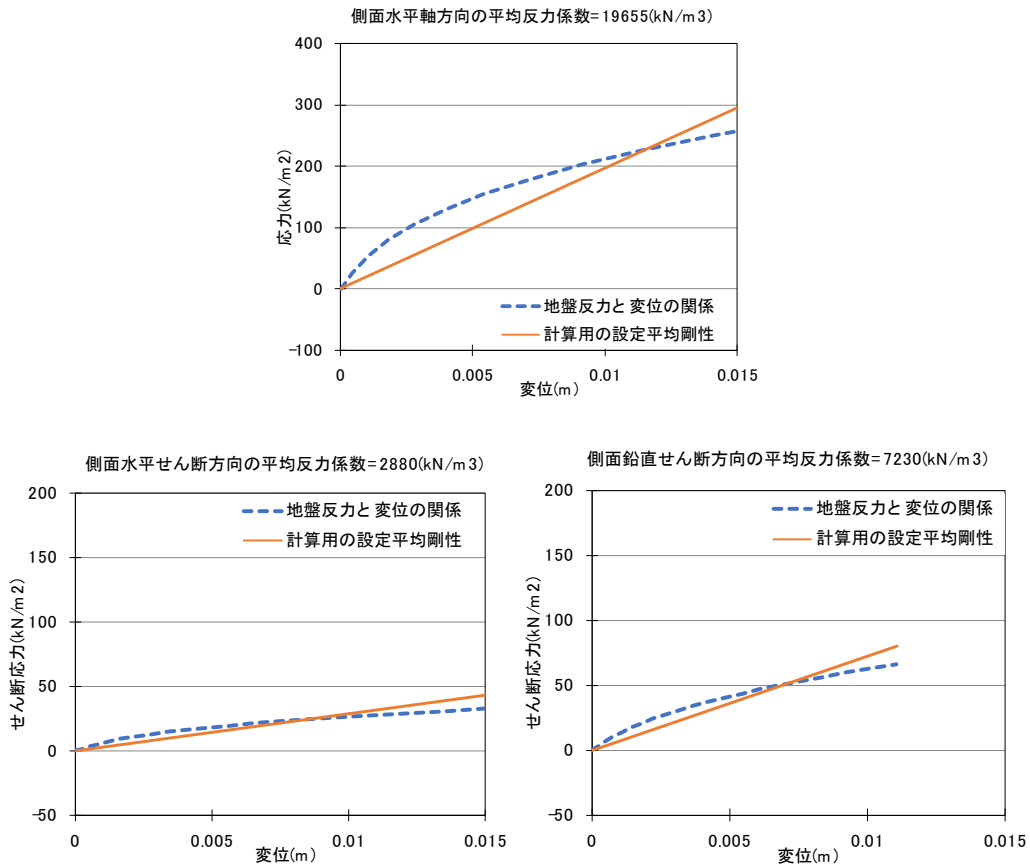


図 5.4-17 詳細モデルから推定した基礎側面地盤の反力係数

### (3) 3次元 FEM の詳細モデルと提案モデルの結果の比較



地震応答解析では、表 5.4-4 の基本設定を用い、図 5.4-18 のように橋軸方向入力とし、A と B 点の地震応答波形を計算した。

表 5.4-4 動的解析の基本設定

| 項 目       |                   |
|-----------|-------------------|
| 非線形解析     | 材料非線形考慮           |
| 直接積分法     | Newmark $\beta$ 法 |
| 減衰        | レーリー減衰            |
| 工学基盤入力地震動 | H24道示波形 (T211)    |
| 積分時間間隔    | 0.002秒            |
| 解析時間      | 15秒               |
| 出力ステップ間隔  | 0.1秒              |

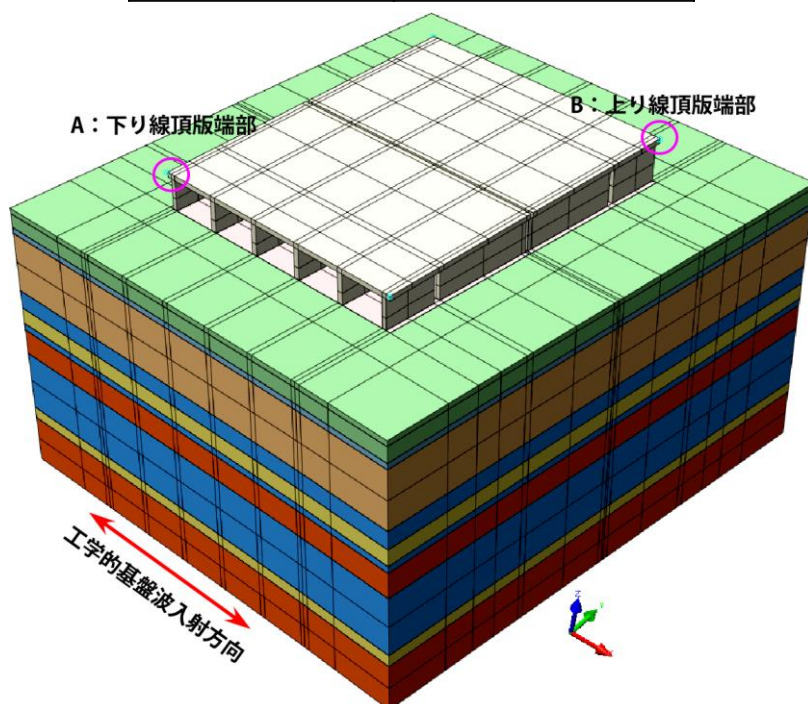
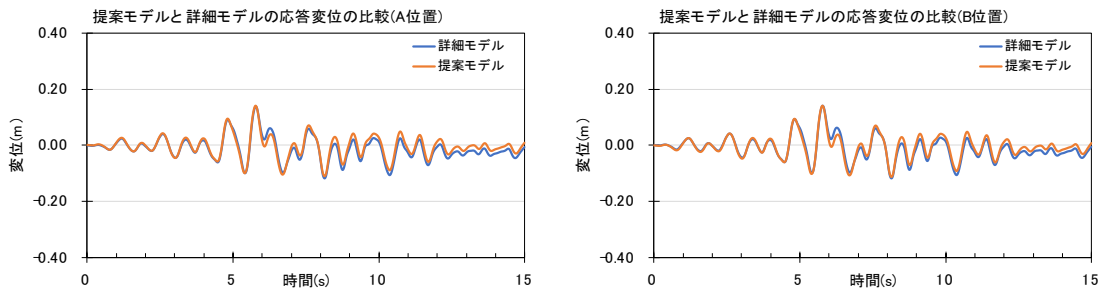
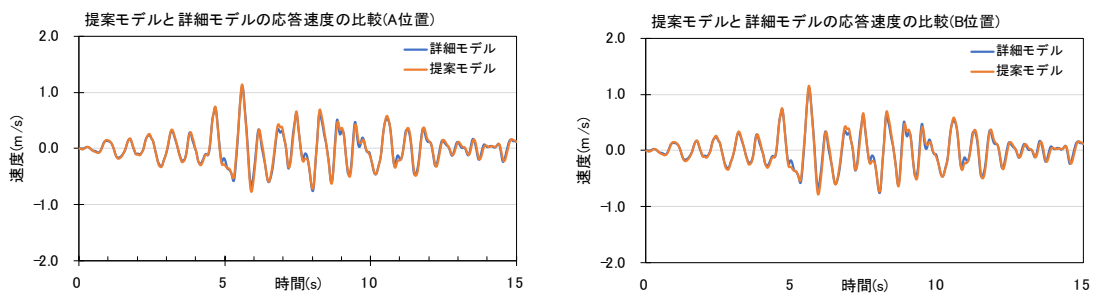


図 5.4-18 提案モデルと詳細モデルの応答結果の比較位置と地震動の入射方向

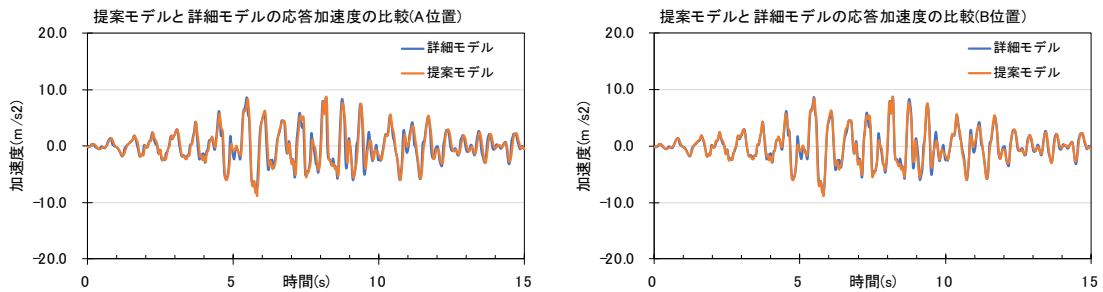
図 5.4-19 は、地震応答解析による両地点の応答波形を比較したものである。この図より、A・B 位置での地震応答変位・速度・加速度波形は、両者でほぼ同じであることがわかる。



(a)変位応答波形



(b)速度応答波形



(c)加速度応答波形

図 5.4-19 A・B 位置の提案モデルと 3D 詳細モデルの応答波形の比較

したがって、提案した 3 成分 Winkler 非線形地盤ばねモデルは、詳細モデルの地震応答が精度よくの再現ができると言える。

### (3) 提案モデルによる全体系解析による照査項目と結果の概要

ここで示したボックスカルバート高架橋のレベル2地震動による地震応答解析では、以下の項目を確認し、耐震性向上対策が必要でないことを確認した。以下の項目は、大型ボックスカルバート高架橋の大規模地震時の耐震性の重要なチェック項目になるものと思われるからである。

### 1) 橋軸方向の動的解析：

#### ① ボックス構造本体の損傷状況の照査結果

最大応答ひずみは照査値の範囲であり、応答挙動による曲げ損傷は生じない。

#### ② 橋梁本体のせん断耐力照査

せん断力は照査せん断耐力の範囲であり、全体のせん断による損傷が発生しないことが確認できる。

#### ③ ボックス同士間の衝突有無の照査結果

衝突した位置の最大圧縮応力がコンクリートの最大圧縮応力度 ( $\sigma_c=0.85\sigma_{ck}$ )以下であり、衝突による頂版と底版の損傷は発生しないことが確認できる。

#### ④ アンカーバーの塑性化照査結果

A1 と A2 橋側のアンカーバーは、全て塑性化することが確認された。なお、橋台側との最大相対変位量は約 114mm になるが、地震終了後の最終相対変位量（残留変位量）はわずか 5.7mm 程度であり、アンカーバーの塑性化による使用性への悪影響はないものと判断できる。

## ⑤ パラペットの照査結果

A1 と A2 とともに押し抜きせん断耐力を超えるせん断力は発生しない。

## 2) 橋軸直角方向の動的解析：

### ① ボックス構造本体の損傷状況の照査結果

最大応答ひずみは、照査値の範囲であり、曲げによる損傷は生じない。

### ② 橋梁本体のせん断耐力照査

橋軸方向と同様、全橋の頂版・底版と側壁・中壁に対して、部材ごとのせん断耐力の照査を実施した結果、橋梁端部のせん断力は比較的大きくなるが、全体の応答値は、照査せん断耐力の範囲であり、せん断による損傷が発生しない。

### ③ ボックス同士間の衝突有無の照査結果

終点側付近で側壁の両端部で局所的に衝突が確認されたが、衝突した位置の最大圧縮応力がコンクリートの最大圧縮応力度 ( $\sigma_c=0.85\sigma_{ck}$ )以下であり、衝突による側壁の大きい損傷は発生しない。

### ④ アンカーバーの塑性化照査結果

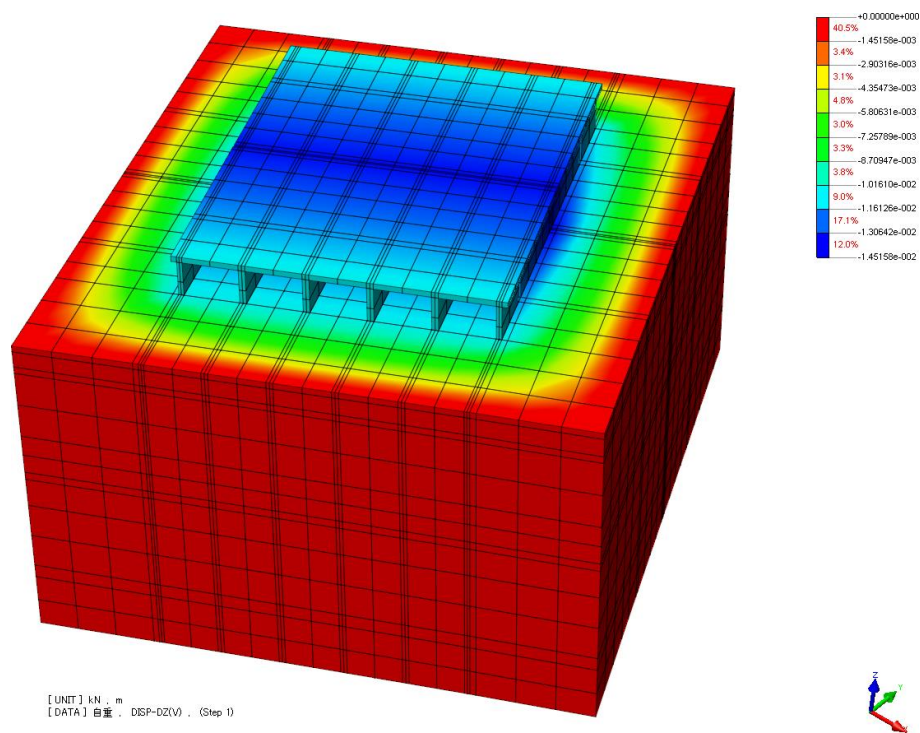
A1 と A2 橋側のアンカーバーは、全て塑性化したことが確認された。最大相対変位量は 75mm 程度であり、地震終了後の最終相対変位量（残留変位量）はわずか 6.6mm 程度である。アンカーバーの塑性化による使用性への悪影響はない。

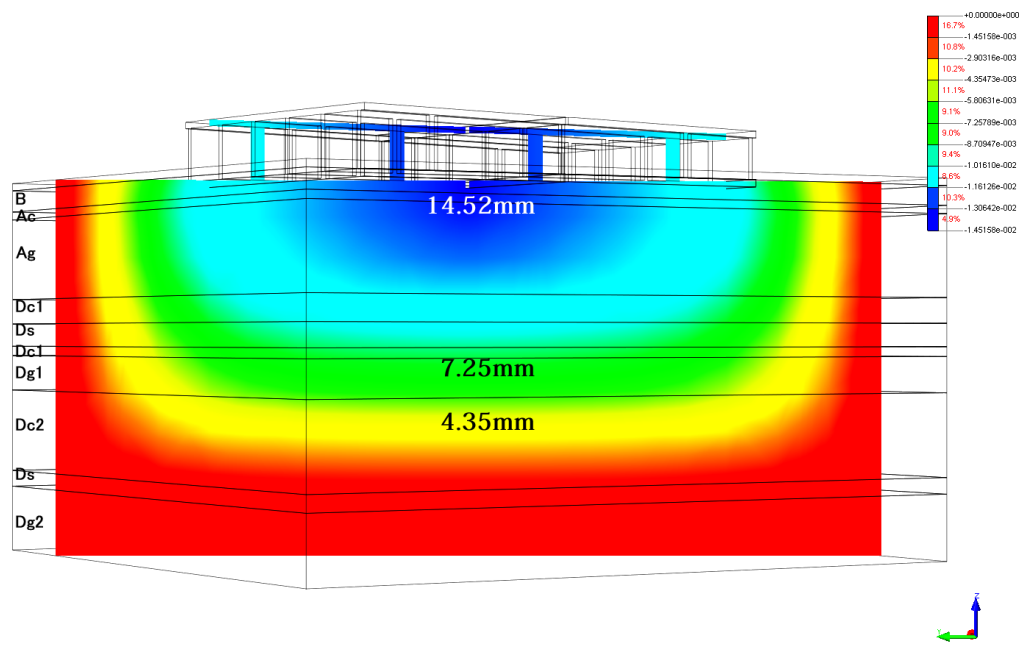
## 3) 衝突対策について

衝撃力を低減するため、ゴム製の緩衝材か、あるいはアスファルト乳剤（樹脂）を注入する対策も考えられるが、現況の解析結果より、衝突による最大圧縮応力は、コンクリートの最大圧縮応力度以下であるため、衝突による頂版・底版と側壁の損傷の可能性は低い。また、パラペットのせん断力発生は主に桁端衝突によるものであるものの、パラペットに押し抜きせん断破壊は生じないと判定できるため、対策は必要ない。

#### 軟弱地盤の残留変位量：

ここで、3DFEM 詳細モデルによる残留変位量を推定した。図 5.4-20 に示すように得られた最大沈下量は、上り線と下り線の中央分離帯付近で発生し、表面最大 14.5mm となるが、洪積砂礫層（Dg1）付近になると、わずか 7.26mm 程度である。また、この結果と既存の土質調査報告書の結果とほぼ一致し、モデル化の妥当性が確認される。





[UNIT] kN, m  
 [DATA] 変位, DISP-D2C0, (Step 1)

図 5.4-20 3D-FEM の詳細モデルによる沈下量分布

## 6 章 有限要素法による 3 次元地盤・基礎・構造物系の解析

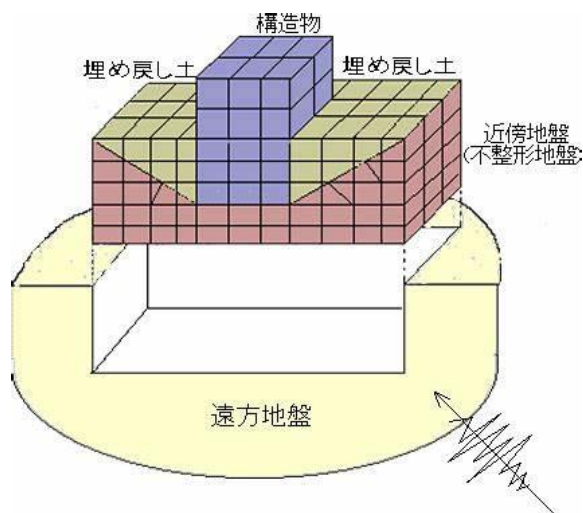
「まえがき」で述べたように、基礎は地中に埋設されるので、上部工と比較すれば基礎工の地震被害の発見は手間と予算がかかり遅れる、または難しいか、見過ごされる。このような考え方と共に、基礎工は地盤という材料特性や鉛直・水平方向の支持力特性が上部工の鉄筋コンクリートや鋼材に比べると圧倒的に不確実な材料に支持されるため、基礎工は地震時にも健全であるよう丈夫に設計する考え方が広く受け入れられている。そして、基礎工の設計は、上部工の設計とは独立に進められる傾向となっている。この現状を改善するために、本書では、基礎本体への損傷は無いが、基礎周辺地盤の局部的剥離を許容し、この基礎周辺地盤の履歴減衰と基礎の振動エネルギーの地下逸散減衰を考慮し、上部構造物の免震装置や履歴減衰を考慮した非線形モデルにより、ストレス等によって全体系の終局安全性の最適配分をするための方法を解説した(2~5章)。

現在の計算機機能の飛躍的進展を考えると、有限要素法による地盤・基礎・構造物の全体系の 3 次元地震応答解析法は、上記の具体的方法の 1 つにもなる。そこで、ここでは、1970 年代の地盤・基礎系の等価線形化レベルの有限要素法の解析法や 2000 年代の非線形性を取り入れた OpenSees の有限要素法の解析例を示す。ただし、OpenSees で

は地盤材料の非線形構成則を取り入れ、地盤の残留変位まで解析はできるが、その精度は、研究途上であることに注意して結果の解釈をすることが極めて重要である。

## 6.1 地盤・基礎系の等価線形化レベルの3次元有限要素法

ここでは、例として、図 6.1-1 に示すような地盤・基礎系の等価線形化レベルの3次元有限要素の解析コード(株)地震工学研究所が開発した SuperFLUSH/3DS)を紹介する。



3次元地盤-構造物連成系概念図

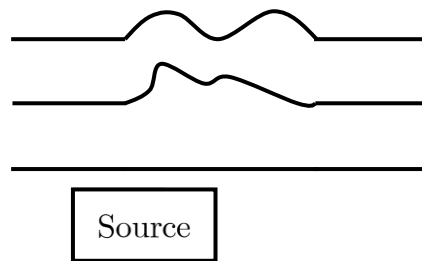
図 6.1-1 地盤・基礎系の等価線形化レベルの3次元有限要素の解析コードの概要図  
(株)地震工学研究所 SuperFLUSH/3DS)

この解析コードでは、地震波入力による構造物・基礎周辺地盤の不整形性を考慮し、3次元 FEM モデルで離散化する。遠方地盤と3次元 FEM モデルの接続方法は、2.2 節の境界法(切欠き型)の以下のような拡張版を使う(原田・本橋(2017), (2020))。

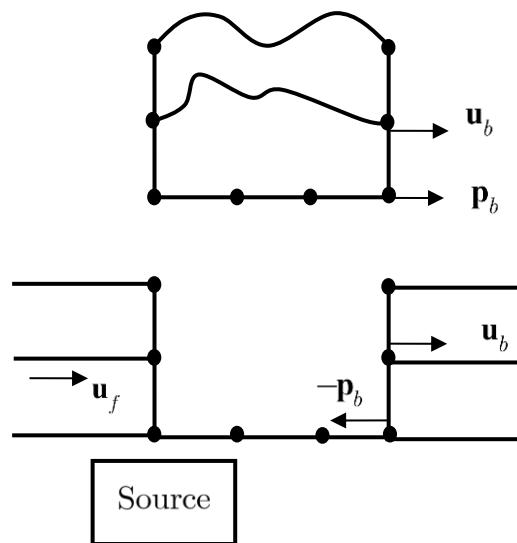


## (1) 震源断層・不整形地盤系の地震動

3次元有限要素法(FEM)や境界要素法での定式化は、原田・本橋(2017), (2020)に譲る。



(a) 震源断層・水平多層地盤・不整形地盤系



(b) 震源断層・水平多層地盤・不整形地盤系の分割

図 6.1-2 震源断層・水平多層地盤・不整形地盤系とその記号

ここでは、重ね合わせの原理を使って、震源断層・水平多層地盤と不整形地盤系の図 6.1-

2a のような断層・地盤系の地震動計算のための部分解析法の定式化を説明する。

不整形地盤系は3次元FEMでモデル化し、断層・水平多層地盤系は、振動数・波数領域の剛性行列法で解析するものとする。部分解析法では、断層・水平多層地盤系の解析で得られる各離散点変位と単位面積当たりの力と各層の剛性行列を使い、3次元FEMでモデル化された不整形地盤系の地震動が求められる。

図6.1-2bのように不整形地盤系の部分を取り出す。不整形地盤系は、FEMでモデル化する。節点変位を境界変位 $\mathbf{u}_b$ とその他の変位 $\mathbf{u}_a$ に分けると、振動数領域の次式の連立1次方程式となる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{aa} & \mathbf{D}_{ab} \\ \mathbf{D}_{ba} & \mathbf{D}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_b \end{pmatrix} \quad (6.1-1a)$$

ここに、次式の質量行列 $\mathbf{m}_{mn}$ 、減衰行列 $\mathbf{c}_{mn}$ 、剛性行列 $\mathbf{k}_{mn}$ から成る3次元FEMの振動数領域の係数行列である。

$$\mathbf{D}_{mn} = -\omega^2 \mathbf{m}_{mn} + i\omega \mathbf{c}_{mn} + \mathbf{k}_{mn} \quad (6.1-1b)$$

変位 $\mathbf{u}_a$ が不整形地盤の地震動で、これを求める問題となるが、この式の境界節点外力 $\mathbf{p}_b$ は未知数である。

そこで、図6.1-2bの不整形地盤を取り除いた切欠けのある断層・水平多層地盤系(断層・切欠け水平多層地盤系)より、以下のように未知外力を求める。

図6.1-2bの断層・切欠け水平多層地盤系は、振動数・波数領域の連立1次方程式から求められるので、波数積分の結果を次式のように表現する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_f \end{pmatrix} \quad (6.1-2)$$

次に、断層・切欠き水平多層地盤系において、切欠き部の不整形地盤系の反力である節点外力  $\mathbf{p}_b = \mathbf{0}$  とした断層・切欠き水平多層地盤系の地震応答を求める。この場合の切欠け境界節点変位を  $\mathbf{u}_b^*$ 、その他の節点変位を  $\mathbf{u}_f^*$  とすると、次式の連立 1 次方程式となる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b^* \\ \mathbf{u}_f^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_f \end{pmatrix} \quad (6.1-3)$$

この 2 つの式を引き算すると、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{bb} & \mathbf{K}_{bf} \\ \mathbf{K}_{fb} & \mathbf{K}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^* \\ \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_f^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (6.1-4a)$$

この式の縮合より、次式が得られる。

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u}_b - \mathbf{u}_b^* = -\mathbf{p}_b, \quad \mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bf} \mathbf{K}_{ff}^{-1} \mathbf{K}_{fb} \quad (6.1-4b)$$

この式の  $\mathbf{p}_b$  を式(6.1-1a)に代入すると、次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{aa} & \mathbf{D}_{ab} \\ \mathbf{D}_{ba} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{K}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^* \mathbf{u}_b^* \end{pmatrix} \quad (6.1-5)$$

この式から不整形地盤系の地震動変位  $\mathbf{u}_a$  は求められる。しかし、この連立 1 次方程式を解くためには、 $\mathbf{u}_b^*$  と  $\mathbf{K}^*$  を与えなければならず、これら 2 つの特性値は、図 6.1-3a の断層・切欠き水平多層地盤系の地震応答から  $\mathbf{u}_b^*$  を求め、式(6.1-4b)から求められる  $\mathbf{K}^*$

は、図 6.1-3c の断層の無い切欠け水平多層地盤系の境界節点力による境界節点変位から求められる複素ばね係数である。

切欠き地盤系の解析をせずに、断層・水平多層地盤の解析から境界変位  $\mathbf{u}_b^0$  と内部節点力  $\mathbf{q}_b^0$  を計算して  $\mathbf{u}_b^*$  と  $\mathbf{K}^*$  を求める方法を以下に示す。

この方法は、図 6.1-3 に示すように図 6.1-3b から図 6.1-3c を差し引くと、図 6.1-3a の切欠き地盤系となることを利用する。

$$\mathbf{u}_b^* = \mathbf{u}_b^0 - \mathbf{u}_b^{**} = \mathbf{u}_b^0 - \mathbf{K}^{*-1} \mathbf{q}_b^0 \quad (6.1-6)$$

上式を式(6.1-5)に代入すると、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{aa} & \mathbf{D}_{ab} \\ \mathbf{D}_{ba} & \mathbf{D}_{bb} + \mathbf{K}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^* \mathbf{u}_b^0 - \mathbf{q}_b^0 \end{pmatrix} \quad (6.1-7)$$

この式が、厳密な断層・水平多層地盤系の境界変位  $\mathbf{u}_b^0$  と内部節点力  $\mathbf{q}_b^0$  (振動数・波数領域の剛性行列法から求められる(原田・本橋(2017),(2020) )から不整形地盤系の地震動変位を求める定式である。

この定式化でも、切欠き地盤の複素ばね係数  $\mathbf{K}^*$  が必要となる。これも水平多層地盤系のグリーン関数から求められる(例えば、原田・本橋(2017), (2020) )。近似的には、FEM で多用される速度比例のダッシュポットに置き換えられる(例えば、Lysmer・Kuhlemeyer(1969), 原田・本橋(2017), (2020) )。原田・本橋(2017), (2020)は、断層・不整形地盤系の部分解析法を3次元境界要素法で定式化し、複素ばね係数  $\mathbf{K}^*$  の代

わりに、次式のダッシュポットに置き換えることの有用性を示している。P・SV 波と

SH 波のダッシュポットは、

$$\mathbf{K}_{P.SV}^* = \begin{pmatrix} i\omega\rho C_S & 0 \\ 0 & i\omega\rho C_P \end{pmatrix}, \quad K_{SH}^* = i\omega\rho C_S \quad (6.1-8)$$

調和振動  $\exp(i\omega t)$  を仮定し、 $\rho, C_S, C_P$  は地盤密度と S 波・P 波速度である。

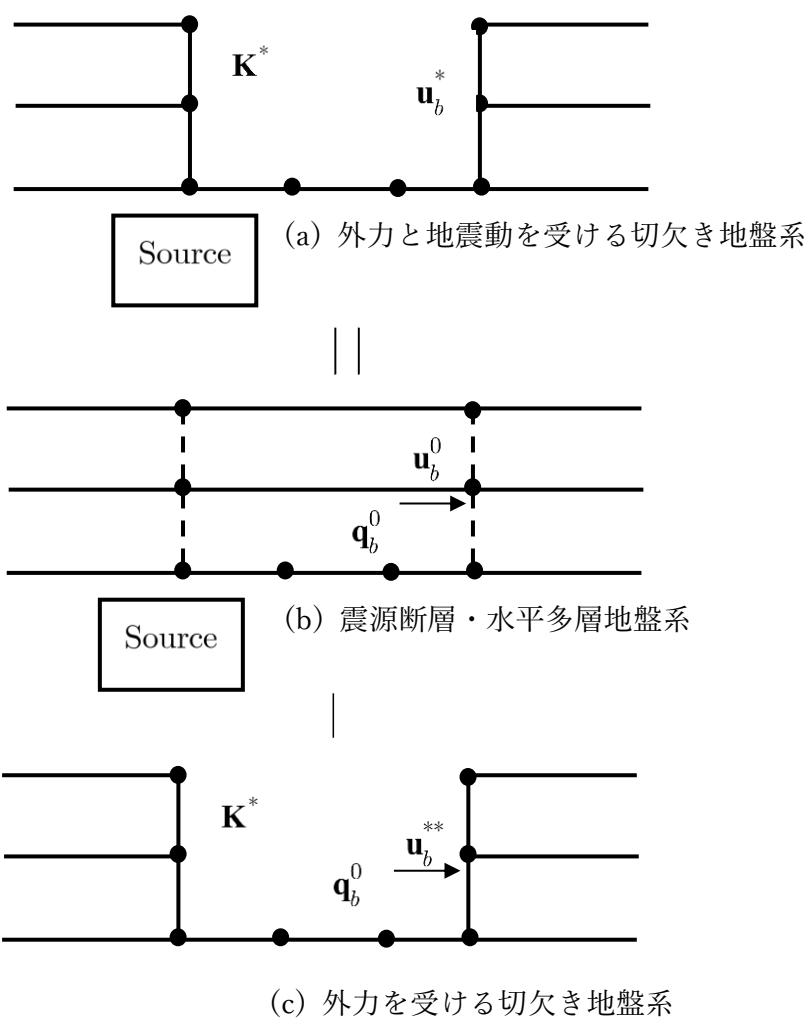


図 6.1-3 震源断層・水平多層地盤系と切欠き地盤系の複素ばね係数や地盤振動の関係 ((a)=(b)-(c))

## 6.2 地盤・基礎・構造物系の非線形 3 次元有限要素法

地盤・基礎・構造物全体系の非線形 3 次元有限要素法は、概念的には理想の道具である。しかし、多数の解析コードが提案されているものの、基礎や構造物の材料非線形性のモデルに比べると、圧倒的に地盤材料の非線形構成則に関する不確定性が大きいのが現状である。このため、地盤と基礎は等価線形化レベルの非線形性を考慮した設計にするのが良いと著者らは考えている。解析結果を、地盤と基礎と構造物系の非線形性の不確定性を十分考慮した考察は当然であるが、大抵はそれが不十分である。ここでは、解析コード OpenSees の概要と計算例を示す。計算例は、Elgamal ら(2008)による橋長 330 m、幅 10m、高さ 12m 程度の橋梁と基礎・地盤系の 3 次元非線形地震応答解析である。しかし、私達には、OpenSees の単なるデモンストレーションのように映る。この程度の橋梁での解析が必要か、残留変位等も計算しているが、検証は出来ているのか等の多くの課題は残る。

### (1) OpenSees の概要

この解析コードは、カリフォルニア大学バークレー校にある Pacific Earthquake Engineering Research Center(PEERC)が地震による構造物や地盤応答挙動の再現解析

(物理シミュレーション)用として開発したものである。概要等は、以下から知ることができる。Open System for Earthquake Engineering Simulation-Home Page (berkeley.edu)。

## (2) 地盤・群杭・橋梁系の地震応答解析例

図 6.2-1 は、解析で用いた Humboldt Bay bridge の写真((a)(b))と地盤・群杭基礎・上部構造物の全体図(c)を示す。9 スパンの橋桁は、4 つのプレキャスト PC-I 桁と現場打設 RC 床版である。I 桁は、橋軸・橋軸直角方向にせん断キーを有する橋脚桁受台で支持されている。橋脚 3 と 6 の上端には(c)、伸縮継ぎ手が設置されている。

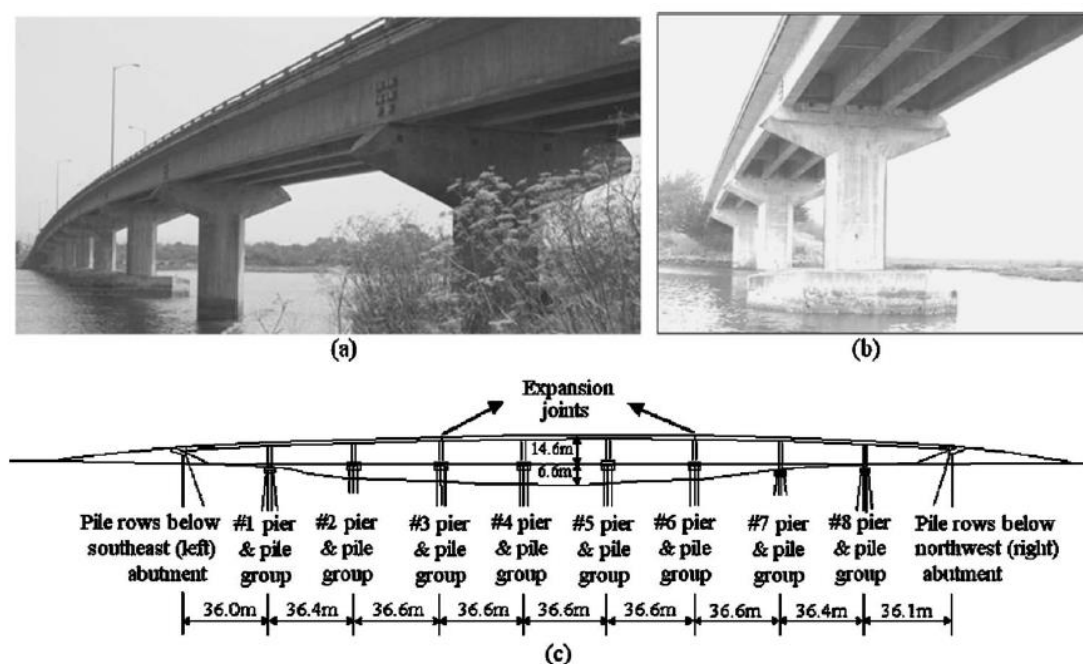


図 6.2-1 Humboldt Bay bridge の写真と全体概要図

### 各種要素：

OpenSees を用いて 3次元非線形地震応答解析を行っている。地盤・群杭・上部構造物のモデル化では、次の種々の要素を用いている：(1) 3D・線形柱・梁要素、(2) 3D・非線形ファイバー要素、(3) 4 節点線形シェル要素、(4) 6 面体ソリッド要素(8 節点要素)、(5) 2 節点を同一節点で接合する linear zerolength 要素。

### 3D-FEM モデルの留意点：

図 6.2-2 は、全体系を種々の要素で離散化した 3D-FEM モデルを示す。このモデル化では、次の点のモデル化に留意している：(1) 橋梁・基礎周辺地盤のモデル化、(2) 地盤・基礎・構造物の動的相互作用と変形効果の可視化。可視化は、プレ・ポストプロセッサ GiD を使っている(図 6.2-3 は可視化の例)。図 6.2-2 のモデルでは、30,237 節点、1,140/280 の線形/非線形柱・梁要素、81 線形シェル要素、23,556 非線形ソリッド要素、1,806 linear zerolength 要素と 2,613 同自由度拘束節点となっている。地盤部は、長さ 650m、幅 151m、深さ 74.5m の領域を離散化している。地盤材料は、ミーゼス多層面塑性基準に基づく非線形履歴材料としてモデル化している。



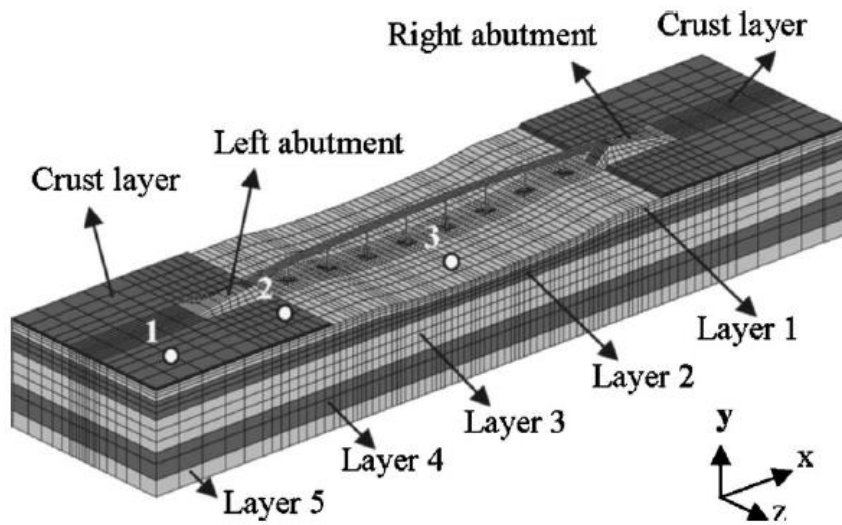


図 6.2-2 全体系を種々の要素で離散化した 3D-FEM モデル

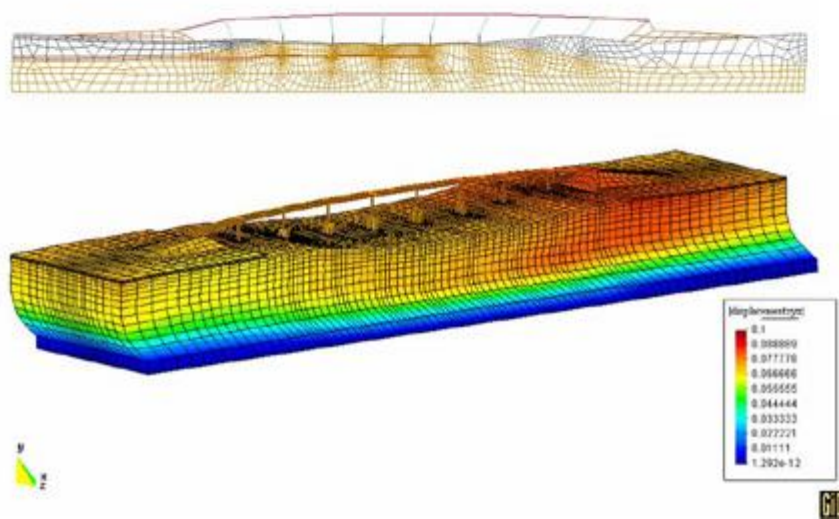


図 6.2-3 全体系の永久変位表示例

### 入力地震動：

図 6.2-4 は、SHAKE コードを用いた露頭の地震動を 1 次元せん断地盤モデルにより  
 基盤地震動に変換して、3D-FEM モデル底面への地震波入力地震動作成手順を示す。

もちろん、この手順は簡便な方法であるが、(1)項で述べた方法を使って、震源断層からの地震動を 3D-FEM モデルに入力する方法も考えられる。

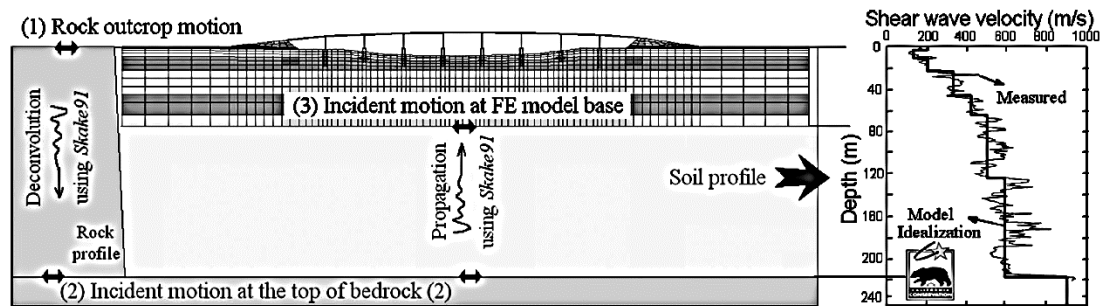
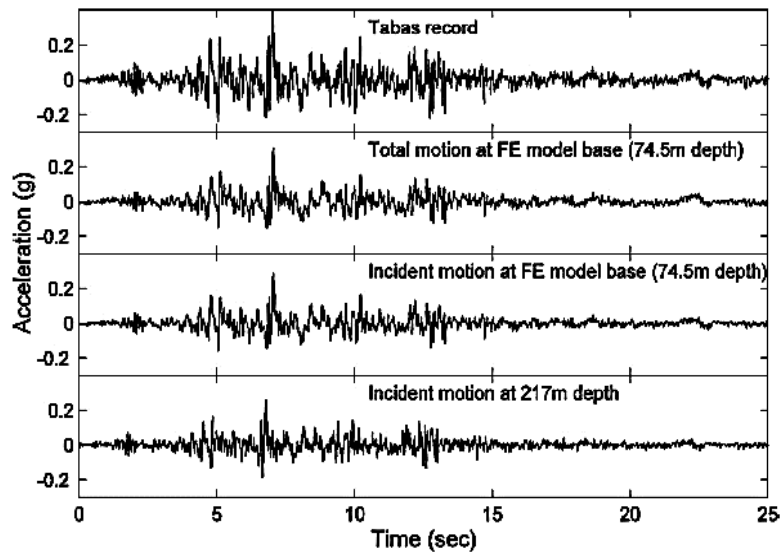
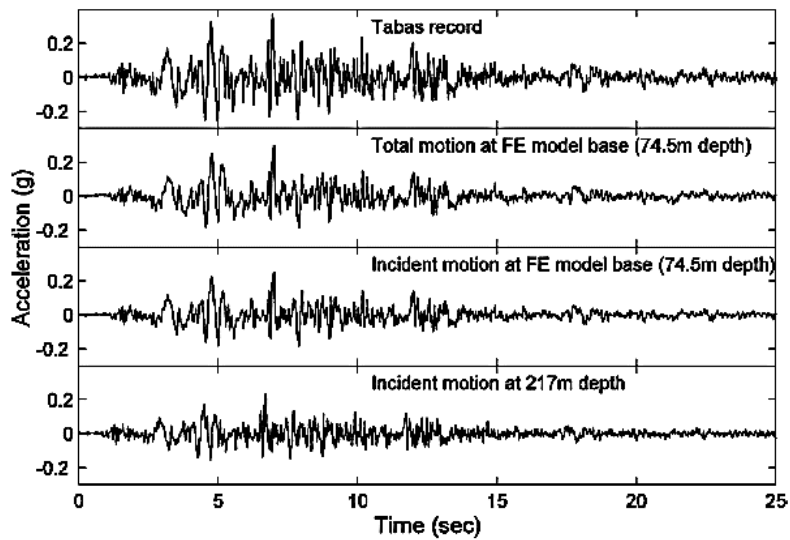


図 6.2-4 SHAKE コードを用いた露頭地震動の基盤地震動への変換手順と 3D-FEM モデル底面への入力地震動作成手順

図 6.2-5 は、上記手順による各地点の橋軸と橋軸直角方向の加速度波形を示す。各図 (a) と (b) の上段は、計算で使用した露頭地表面の加速度波形(図 6.2-4 の(1)の波形)を、下段は、SHAKE による基盤地震動に変換した加速度波形(図 6.2-4 の(2)の波形)を示す。また、2 段と 3 段は、FE モデル底面への入射波(E)と内部境界波(E+F)を示す。FE モデル底面への入射地震動(E)の最大加速度は、橋軸方向 0.255G と橋軸直角方向 0.233G で、露頭地表面の最大加速度 0.439G、0.373G に比べると、小さい。FE モデル底面への入射地震動の鉛直成分波形(最大加速度 0.185G)は、露頭地表面の鉛直加速度波形の半分として用いている。



(a) Longitudinal direction



(b) Transversal direction

図 6.2-5 露頭地表面加速度波形と 1 次元地盤モデルの等価線形化解析コード SHAKE による各深さの計算加速度波形

**地震応答解析結果：**

OpenSees による全体系の解析は、1.7GHzCPU と 3Gbytes の PC(personal com.)を使い、解析コード中の疎行列ソルバーを用いて、40 時間の解析時間で終了している。

図 6.2-6 は、3次元非線形地震応答解析から求められた地表面の3地点(図 6.2-2 の1,2,3の番号地点；地点1は橋梁の入り口付近、地点2は、橋台付近、地点3は河川中央)の加速度波形を示す。河川中央の地点3の加速度波形には、短周期成分も多く含まれ、長さ330m程度の区間にもかかわらず、橋梁各地点での入力地震動は異なっている。

図 6.2-7(図 6.2-3 も参照)は、3次元非線形地震応答解析から求められた全体系の永久変位を示す。図 6.2-8(a)(b)の矢印は、地盤の移動方向と沈下方向を示す。最大の水平方向の変位量0.28mは、河川堤防位置で生じている。

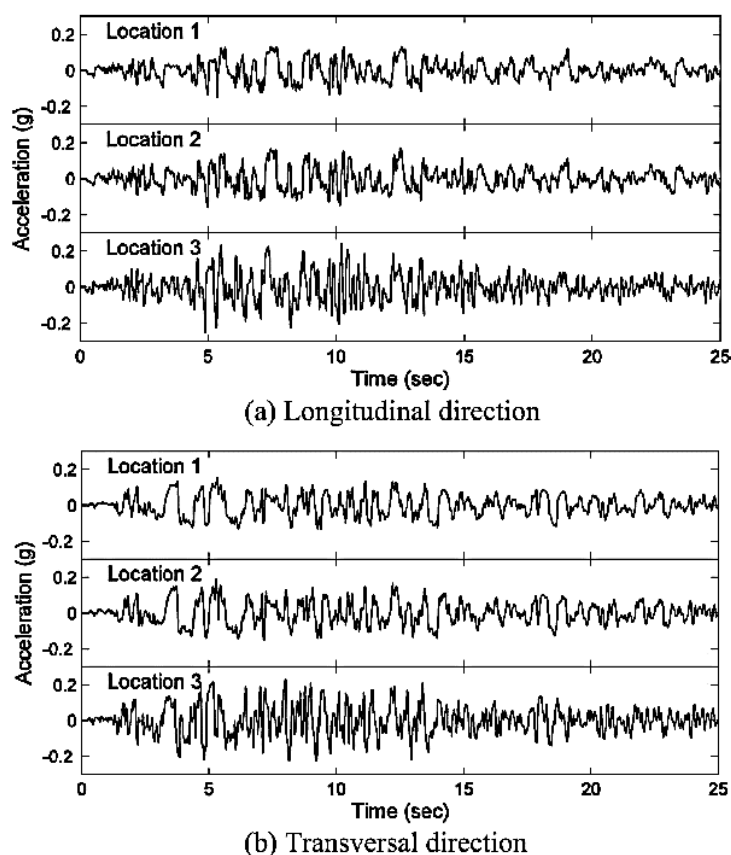


図 6.2-6 3次元非線形地震応答解析から求められた地表面の3地点の加速度波形  
(図 6.2-2 の1,2,3の番号地点；地点1は橋梁の入り口付近、地点2は、橋台付近、地点3は河川中央)

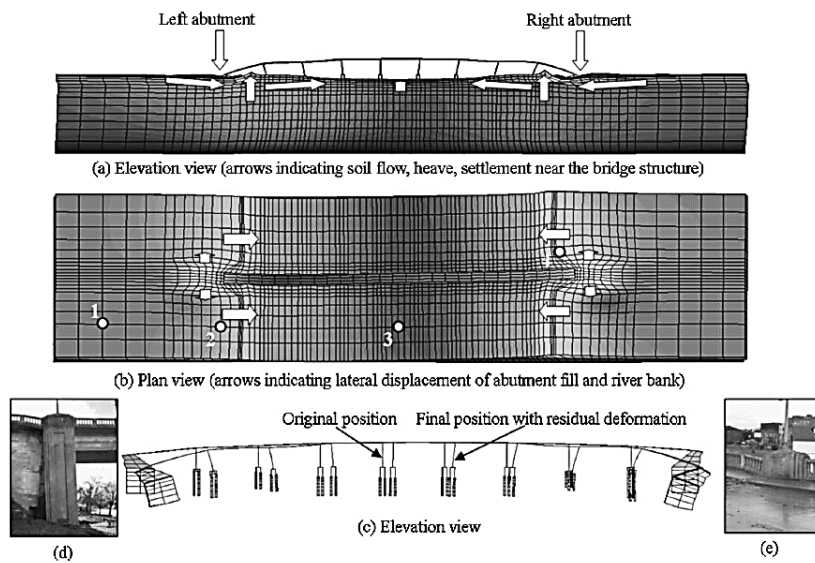


図 6.2-7 3次元非線形地震応答解析から求められた全体系の永久変位(図 6.2-3 参照)

また、最大値沈下量 0.3m、0.4m は、左の橋台と右の橋台位置で発生している。図 6.2-8(c)には、永久変位の断面図を示すが、両橋台は沈下と共に河川側に回転し張り出している。このような橋台の変形は、過去の地震被害によく見られる。図 6.2-8(d)(e)は、過去の橋台付近の地震被害の写真を示す。ただし、この過去の橋台地震被害の写真は、Humboldt Bay bridge の過去の地震被害の写真ではないことに注意せよ。地盤の沈下や変動量の予測は、大変に難しい(1/2~2 倍：ファクター 2 のばらつきは当然)のが現状である(浜田(2013))。

## 参考文献

- 土木学会(1989): 地盤と構造物基礎の動的相互作用解析, 4 章, 動的解析と耐震設計, 第 2 巻, 動的解析の方法, 技報堂出版.
- 土木学会(1986): 国鉄建造物設計標準解説, 基礎構造物, 杭土圧構造物.
- Elgamal, A., Yan, L., and Conte, J.P. (2008): Three-dimensional seismic response of Humboldt Bay bridge-foundation-ground system, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol.134, No.7, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:7(1165).
- Gerolymos, N. and Gazetas, G. (2006): Development of Winkler model for static and dynamic response of caisson foundation with soil and interface nonlinearities, *Soil Dynamic and Earthquake Eng.*, Vol.26, pp.363-376.
- Gutierrez, J.A. (1976): A substructure method for earthquake analysis of structure soil interaction, EERC Report 76-9, University of California, Berkeley.
- Gupta, S., Lin, T.W., Penzien, J., and Yen, C.S. (1980): Hybrid modelling of soil structure interaction, EERC Report 80-9, University of California, Berkeley.
- 長谷川正幸, 護雅史(1989): 質点-ばね系モデルによる杭支持建物の非線形地震応答解析法, ORI 研究報告 98-02, (株)大崎総合研究所.
- 浜田政則(2013): 地盤耐震工学, 丸善出版.
- Housner, G.W. (1957): Interaction of buildings and ground during an earthquake, *Bull. Seism. Am.*, Vol.47, No.3, pp.179-186.
- 原田隆典, 浜崎晃, 王宏沢(本橋英樹), 杉野仁彦 (2008): 地盤との非線形動的相互作用を考慮した高炉ガスホルダーの地震応答解析, *応用力学論文集*, Vol.11, pp.1071-1079.
- Hadjian, A.H., Luco, J.E., and Tsai, N.C. (1974): Soil structure interaction: continuum or finite element?, *Nuclear Engineering and Design*, Vol.31, pp.151-167.
- Harada, T., Kubo, K., and Katayama, T. (1980): Dynamic soil structure interaction analysis by continuum formulation method, *東京大学生産技術研究所報告*, Vol.29, No.5.
- 原田隆典, 久保慶三郎, 片山恒雄 (1983): 地中埋設剛体構造物の地震応答解析モデルの考え方, *土木学会論文報告集*, 334 号, pp.173-176.
- 原田隆典, 山下典彦, 坂梨和彦(1994): 地盤との動的相互作用を考慮した道路橋橋脚の周期と減衰定数に関する理論的研究, *土木学会論文集*, No.489/I-27, pp.227-234.

- 原田隆典, 坂梨和彦, Gorges, W. (1994) : 地盤との動的相互作用を考慮した連続橋の周期と減衰定数の評価方法, 土木学会論文集, No.489/I-27, pp.235-242.
- 原田隆典, 本橋英樹(2017): 入門・弾性波動理論～震源断層・不整形多層弾性体の地震動や地盤振動問題への応用～, 現代図書.
- 原田隆典, 本橋英樹(2020): 入門・数理地震工学～生産・社会インフラ施設の地震・津波対策の基礎知識と数学的方法～, 技報堂出版.
- 原田隆典, 本橋英樹(2021): 土木環境数学 I, 土木環境数学 II, 現代図書.
- 原田隆典, 広瀬利光, 山田静郎(1988) : 基礎の動的非線形復元力評価におけるウィンクラーモデルの適用, 宮崎大学工学部研究報告, 第 31 号.
- 原田隆典, 野中哲也, 馬越一也, 岩村真樹, 王宏沢(2007) : ファイバー要素を用いた地盤・基礎の非線形動的相互作用モデルとその橋梁全体系の地震応答解析への適用, 応用力学論文集, Vol.10, pp.1047-1054.
- Harada, T., Nonaka, T., Wang, H., Magoshi, K. and Iwamura, M.(2008) : A nonlinear dynamic soil foundation interaction model using fiber element method and its application to nonlinear earthquake response analysis of cable stayed bridge, Proc. of the 14<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Eng., Beijing, China.
- 原田隆典, 浜崎晃, 王宏沢(本橋英樹), 杉野彦(2008): 地盤との非線形動的相互作用を考慮した高炉ガスホルダーの地震応答解析, 応用力学論文集, Vol.11, pp.1071-1079.
- Kausel, E., Whitman, R.V., Elsasbee, F., and Morray, J.P. (1977) : Dynamic analysis of embedded structures, Proc. of the 4<sup>th</sup> SMIRT, K2/6.
- Kausel, E. and Roesset, J.M. (1981) : Stiffness matrices for layered soils, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 71, No.6, pp.1743-1761.
- Kaynia, A.M.(1982) : Dynamic stiffness and seismic response of pile groups, Research Report R82-03, Order No. 718, Department of Civil Engineering, MIT.
- Luco, E.(1969) : Dynamic interaction of a shear wall with the soil, J. of the Engineering Mechanics Division, Proc. of ASCE, Vol.95, No. EM2, pp.333-346.
- Lysmer, J., Raissi, M., Tajiniam, F., Valdan, S., and Ostandan, F.(1981) : SASSI-A System for analysis of soil structure interaction, Geotechnical Report 81-02, University of California, Berkeley.
- Matsushima, Y. (1975) : Spectra of apatially variant ground motions and associated transfer function of soil-foundation system, 第 4 回日本地震工学シンポジウム講演集, pp.351-358.
- Merritt, R.G. and Housner, G.W. (1954) : Effect of foundation compliance on earthquake stresses in multistory buildings, Bull. Seism. Am., Vol.44, No.4, pp.551-569.

- Newmark, N.M., Hall, W.J., and Morgan, J.R. (1977): Comparison of building response and free field motion in earthquakes, 6th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. II, pp.972-978.
- Nigam, N.C. and Jennings, P.C. (1964) : Calculation of response spectra from strong motion earthquake records, Bull. Seism. Soc. Am., Vol.59, No.2, pp.909-922.
- 日本建築学会(1996): 入門・建物と地盤との動的相互作用, 日本建築学会.
- 山原浩(1969): 地震時の地震動と地震波の入力損失, 日本建築学会論文報告集, No.165, pp.61-66.
- Penzien, J., Scheffey, C.F., and Parmelee, R.A. (1964) : Seismic analysis of bridges on long piles, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No.3, pp. 223-254.
- Sezawa, K. and Kanai, K. (1935) :Decay in the seismic vibrations of a simple or tall structure by dissipation off their energy into the ground, Bull. Earthquake. Research Institute, Vol.13, No.3, pp.681-697.
- Thau, S.A. (1967) :Radiation and scattering from a rigid inclusion in an elastic stratum, Trns. of ASME, Series. E, Vol.34, pp.509-511.