数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会）第19号　1993　pp.177～192

合同変換による多角形の考察

宮崎大学教育学部　宇　田　廣　文

(1993. 2.28受理)

1．はじめに

平成元年度改訂の高等学校学習指導要領では，選択教科「数学A」の中に『平面幾何』が復活し，そこで変換の考えが取り上げられている[1)]。諸橋は，これを受けた形での研究を行っている[2)]。変換の考えは，小学校から培われてきており，大切な数学的な見方・考え方の1つであり，その有用性を探り活用していくことは数学教育における課題の1つであろう。一方，T. W. Shilgalisは多角形を対称性の観点から具体的に考察し，興味ある問題を提起している[3)]。

そこでここでは，平面図形の中の多角形に焦点を当てて，多角形を合同変換（回転変換，対称変換）の立場から考察し，その構造を明らかにしていくことを主たる目的とする。その中で，まず群の考えを活用し，合同変換からみた多角形の構造を明らかにする。さらに，その構造をもつ多角形の具体的な構成法を示し，続いて多角形を合同変換の立場から分類する。

また，2つの対称変換をもつ多角形を分析し，T. W. Shilgalis の提起した問題を考察していく。

筆者は，先行研究『分類の相等性II』の中で分数指導を例に取り，教員養成における教科専門と教職専門の中間に位置づけた『教科内容学』の必要性を示した[4)]。この観点から拙稿では，『変換の考え』における変換を捉える背景的要素としての初歩的な群の考えの有用性や大切さを示す例を与えることをめざしている。

2．多角形の合同変換

この節で，多角形の合同変換について理論的な検討，即ち群の考えを用いた基礎的な検討を行う。以下，多角形をPで，またn角形をP_nで表す。

2.1　多角形の合同変換のつくる群

合同変換には，『まわす，裏返す及びずらす』で表現されるような回転変換，対称変換及び平行移動があるが，ここでは多角形PをP自身に重ねることを扱うので，回転変換と対称変換を考察の対象とする。

多角形Pの2つの合同変換を続けて行った結果はまたPの合同変換になっている。さらに恒等変換や合同変換の逆変換がまた合同変換になっていることは明らかである。即ち，多角形Pの合同変換全体が変換の合成で群をなしていることが分かる。この群を G(P) で表すことにする。

特に，Pが正n角形のときは G(P) は

（α）n個の回転変換

（β）n本の対象軸に関する対称変換

からなる位数2nの群をつくる。この群は，正二面体群D_{2n}としてよく知られている[5)]。

aを正n角形の中心に関する $\dfrac{2\pi}{n}$ の回転とし，bを1つの対称軸に関する対称変換とすると

（α）に属するものは

$$1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots,\ a^{n-1}$$

（β）に属するものは

$$b,\ ab,\ a^2b,\ \cdots\cdots,\ a^{n-1}b$$

である。2つの要素a，bが正二面体群D_{2n}を生成するので，これを

$$D_{2n}=\langle a,b\rangle$$

で表す。a，bは次の関係を満たす。

$a^n=1$，$b^2=1$，$b^{-1}ab=a^{-1}$　（☆）

これを基本関係という。これらはそれぞれ次のことを示している。

① 回転変換aをn回繰り返して行うと，元に戻る。

② 対称変換bを2回繰り返して行うと，元に戻る。

③ 対称変換bに続いて回転変換aをさらに続けて対称変換bを行うと回転変換aの逆変換（即ち逆回し）a^{-1}を行ったことになる。

一方，正n角形の頂点を1,2,……,nとして合同変換を行うと，頂点は頂点に移るので，合同変換を行うことは{1,2,……,n}の間の置換をすることと同じになる。即ち，D_{2n}を{1,2,……,n}に関する置換を用いて表すこともできる。

例えば，$D_{2\cdot3}$，$D_{2\cdot4}$は次のようになる。(図1参照)

$D_{2\cdot3}$ = {1, (123), (132), (12), (13), (23)}

$D_{2\cdot4}$ = {1, (1234), (13)(24), (1432), (14)(23), (12)(34), (13), (24)}

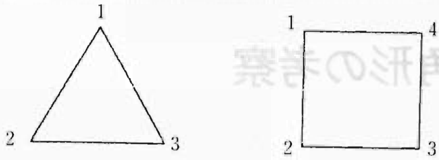


図1

一般に，n角形 P_n の合同変換は回転変換あるいは対称変換から，即ち2.1における（α），（β）の一部分から構成されるので，群 $G(P_n)$ は正二面体群 D_{2n} の部分群としてみることができる。

2.2　正二面体群 D_{2n} の部分群

後の考察のため，正二面体群 D_{2n} の部分群を決定していく。

2.2.1　巡回部分群

aを正n角形の中心に関する $\frac{2\pi}{n}$ の回転とすると，2.1の（α）における $\{1,\ a,\ a^2,\ \cdots\cdots a^{n-1}\}$ はaで生成される位数nの巡回群 $<a>$ である。また，bを1つの対称軸に関する対称変換とすると，2.1の（β）における $b,\ ab,\ a^2b,\ \cdots\cdots a^{n-1}b$ はそれぞれ位数2の巡回群 $<b>$，$<ab>$，$<a^2b>$，……，$<a^{n-1}b>$ をつくる。一般に，位数nの巡回群を C_n で表すことにする。位数nの巡回群について，次の事実はよく知られている。

（巡回群の基本定理）
位数nの巡回群をGとする。このとき，nの任意の約数mについて，位数mの巡回部分群が1つしかもただ1つだけ存在する。さらに，Gの部分群はこのタイプのものだけである。

このことは，位数nの巡回群の部分群を考えることと，nの約数を考えることが同じであることを示している。換言すれば，位数nの巡回群の部分群の構造とnの約数の構造が同じであるということである。図2は，位数6，8に関する構造図である。

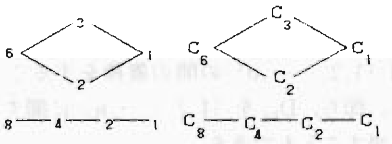


図2

従って，正二面体群 D_{2n} の巡回部分群は以下のようになる。

① nの2と異なる任意の約数mに対して，位数mの巡回部分群が1つただ1つ存在する。

② 位数2の巡回部分群については

　i）　nが偶数のとき　n＋1個

　ii）　nが奇数のとき　n個

となっている。

また，特にnが奇素数のときは，正二面体群 D_{2n} の位数3以上の巡回部分群は C_n のみである。

2.2.2　正二面体部分群

正二面体群 D_{2n} の基本関係より，任意の自然kに対して，

$$b^{-1}a^kb=a^{-k}$$

が成り立つことが分かる。また，nの任意の約数mについて，n=mkとすると，$<a^k>$ は位数mの巡回群であるから，m≧3のときは，上のことから a^k とbで生成された群 $<a^k, b>$ が正二面体群 D_{2m} になることが分かる。即ち，

$$(a^k)^m=1,\ b^2=1,\ b^{-1}a^kb=a^{-k}$$

が満たされる。このような群は全部で $k(=\frac{n}{m})$ 個あり，次のようになっている。

$<a^k, b>$, $<a^k, ab>$, ……, $<a^k, a^{k-1}, b>$

このことは，正n角形の頂点を用いて作られる正m角形がk個あるということに対応している。図3は，n＝6，m＝3；n＝8，m＝4；n＝9，m＝3の場合の例である。

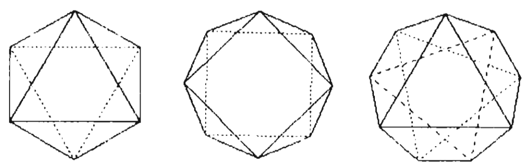


図3

従って，正二面体群 D_{2n} は，nの任意の3以上の約数mについて，$\frac{n}{m}$ 個の正二面体部分群 D_{2m} を持っている。特に，nが素数のときは，D_{2n} 以外には正二面体部分群はないということになる。

2.2.3　クラインの四元群

nが偶数のときは，正n角形には位数2の回転変換がある。即ち，n=2mとし，aを正n角形の中心に関する $\frac{2\pi}{n}$ の回転とすると，a^m は π の回転になり，従って位数2の回転変換である。

また正二面体群 D_{2n} の基本関係より，

$$b^{-1}a^mb=a^{-m}=a^m$$

となり，$\{1, a^m, b, a^m b\}$ は位数4のアーベル群になる。これはクライン（Klein）の四元群としてよく知られている群である。一般に，次の基本関係を満たす群 $<c, d> = \{1, c, d, cd\}$ をクラインの四元群といい，Kで表す。

$c^2 = 1$，$d^2 = 1$，$dc = cd$

この群は，合同変換群の立場からは長方形（正方形でない）の合同変換群として特徴づけられる[6)]。長方形におけるπの回転変換

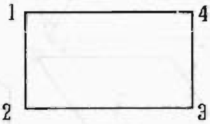


図4

をc，2本ある対称軸に関する対称変換の1つをdとすると，残りはcdになっている。今図4のように，長方形の頂点を 1, 2, 3, 4 とすると，c＝(13)(24)であり，d＝(12)(34)とするとcd＝(14)(23)となる。即ち，

$$k = \{1, (13)(24), (12)(34), (14)(23)\}$$

正二面体群 $D_{2n}(n=2m)$ におけるクラインの四元群タイプの部分群は全部でm個あり，それらは次のようになっている。

$<a^m, b>$，$<a^m, b, ab>$，……，$<a^m, a^{m-1}b>$

m≧3のとき，これらは正2m角形の2m個の頂点のうち，4つを選んでできる長方形（正方形でない）の合同変換群に対応している。1つの頂点を起点として，k番目の頂点，この頂点からt番目の頂点，その頂点からk番目の頂点，さらにt番目の頂点が最初の頂点となるように4つの頂点を結んでできる四角形は長方形になっている。即ち，k＋t＝mとなるように自然数k，tを選べば長方形をつくることができる[7)]。できた長方形が正方形でない場合には同じ形（合同）の長方形がm個ずつつくれ，正方形の場合（このときmが偶数）には先の考察の通り $\frac{m}{2}$ 個つくれる。上記のm個のクラインの四元群は，できた（正方形でない）長方形のどれかの合同変換群になっているが，特にm≧3のときは，正2m角形のm組の平行な2つの辺から構成されるm個の長方形の合同変換群に対応している。次の図5はm＝3，4（n＝6，8）の場合の長方形の例である。

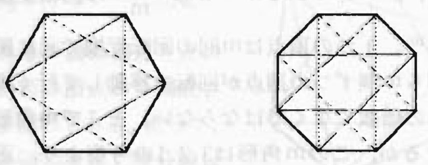


図5

2.2.4　正二面体群 D_{2n} の部分群の決定

正二面体群 $D_{2n} = <a, b>$ の部分群をGとする。ここで，a，bは先の（☆）を満たすものとする。$G \cap <a>$ は巡回群 $<a>$ の部分群であるから巡回群の基本定理から，巡回部分群である。即ち，nのある約数kが存在して，

$$G \cap <a> = <a^k> \qquad (★)$$

となっている。特にGが対称変換を含まなければ，Gは巡回部分群 $<a^k>$ と一致している。

そこでGが対称変換を含む場合を考察する。任意の自然数tに対して，

$$<a, b> = <a, a^t b>$$

であるから，bがGに含まれる場合を調べればよい。

このとき，$<a^k, b>$ は D_{2n} の部分群であり，Gに含まれている。以下これがGと一致することを示す。まず（★）より，Gに含まれる回転変換はn＝kmとおくと，

$$\{1, a^k, a^{2k}, \cdots\cdots, a^{(m-1)k}\} \qquad (★★)$$

ですべてである。また，Gは $<a^k, b>$ を含んでいるので，Gは対称変換

$$\{b, a^k b, a^{2k} b, \cdots\cdots, a^{(m-1)k} b\} \qquad (★★★)$$

を含んでいることが分かる。そこで今Gがこれら以外の対称変換 $a^s b$（sはkの倍数ではない）を含んでいたとしてみる。すると，$a^s b$，bは共にGの要素であり，Gは部分群であるから，これらの積である $a^s = (a^s b) b$ もGに含まれることになる。即ち，回転変換 a^s がGに含まれる。よって，（★★）からsがkの倍数になることが分かり，sの取り方に矛盾する[8)]。従って，Gに含まれる対称変換は（★★★）ですべてである。以上のことより，Gは $<a^k, b>$ と一致していることが分かる。

まとめると，正二面体群 D_{2n} の部分群は次のタイプのものからなる。

① 巡回部分群 $<a^k>$（kはnの約数）

② 巡回部分群 $<a^s b>$
$(s = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$

③ 正二面体群 $<a^k, a^s b>$
$(n = kt, t \geqq 3, s = 0, 1, 2, \cdots\cdots, k-1)$

④ クラインの四元群　K　（n＝2mのとき）

nが3，4，5，6のときの正二面体群 D_{2n} の部分群の構造図を資料Ⅰに示しておく。

3．G(P)の考察

G(P)＝{1}である多角形は，恒等変換以外の回転変換で重なることはなく，また対称軸を1本ももたない多角形であり，合同変換の立場からは最も不規則な多角形であるといえる。この仲間には，（等脚台形で

ない）台形も含まれている。この節では，$G(P) \neq \{1\}$である多角形について考察する。

3.1　G(P) が位数 2 の巡回群である多角形 P

正二面体群の位数 2 の部分群は，第 2 節の考察より 1 つの対称変換で生成される巡回群か，π の回転変換で生成される巡回群かのいずれかである。ただし，後者の場合は多角形の辺の数は偶数でなければならない。

従って，G(P) が位数 2 の巡回群である多角形 P は次のうちいずれかである。

① 対称軸を 1 本だけもつ多角形で，恒等変換以外の回転変換はもたない多角形

② 対称軸を 1 本ももたず，恒等変換と π の回転変換のみを回転変換としてもつ多角形

3.1.1　①型の多角形

1）辺の数が奇数のとき

このときは，図 6 から分かるように，（正三角形でない）二等辺三角形が基本図形となっている。

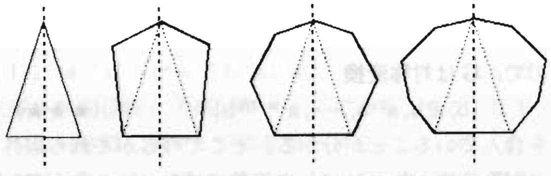


図 6

2）辺の数が偶数のとき

このときは，2 つの頂点が対称軸上にある場合と，どの頂点も対称軸上にない場合の 2 つのケースがある。

i ）2 つの頂点が対称軸上にある場合

この場合は，たこ形に代表される対称性をもっている。（図 7 参照）

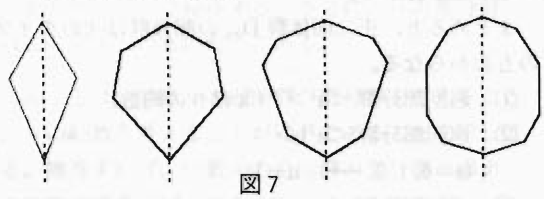


図 7

ii ）どの頂点も対称軸上にない場合

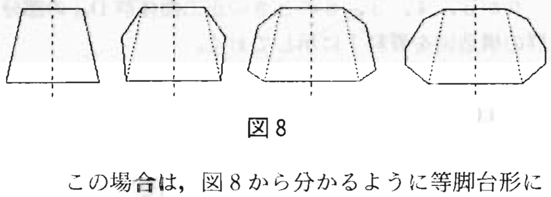


図 8

この場合は，図 8 から分かるように等脚台形に代表される対称性をもっている。また，一組の平行な辺をもつのも特徴的であろう。

3.2.2　②型の多角形

このタイプの多角形は次の図 9 から分かるように，平行四変形に代表され，すべての対辺が平行であるような多角形である。即ち，このタイプの 2 m 角形には，m 組の平行な辺がある。

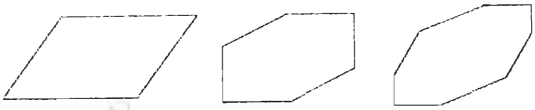


図 9

3.2　n 角形が位数 m の回転変換をもつ場合（$m \geqq 3$）

n 角形 P_n の位数 m の回転変換を a とすると，$a^m = 1$ で，$1, a, a^2, \cdots\cdots, a^{m-1}$ は，P_n のすべて異なる回転変換である。従って，$G(P_n)$ が位数 m の巡回部分群を含むことになる。逆に，n 角形 P_n の合同変換群 $G(P_n)$ が位数 m（$m \geqq 3$）の巡回部分群を含むとする。多角形 P が位数 3 以上の合同変換をもつということは，第 2 節の考察から分かるように回転変換をもつということである。従って，n 角形 P_n が位数 m の回転変換をもつことと，合同変換群 $G(P_n)$ が位数 m（$m \geqq 3$）の巡回部分群を含むこととは同じことである。

3.2.1　n＝m のとき

a の反時計回りの回転角を $\theta (0 < \theta \leqq 2\pi)$ とすると $a^n = 1$ より $n\theta$ は 2π の自然数倍である。そこで $n\theta = 2\pi k$（k は自然数）とおくと，n と k は互いに素になっている[9]。そこで，$ns + kt = 1$ となる整数 s, t（$1 \leqq t \leqq n-1$）をとると，a^t の回転角 $t\theta$ は $\frac{2\pi}{n} - 2\pi s$ となり，a^t は $\frac{2\pi}{n}$ の回転変換と同じになる。このことは，n 角形の各頂点が，a^t により 1 つずつ左隣の頂点に移動していくことを示している。即ち，n 角形 P_n が正 n 角形であることに外ならない。まとめると，位数 n の回転変換をもつ n 角形は正 n 角形であり，従ってその合同変換群は正二面体群 D_{2n} に一致する。

3.2.2　n>m のとき

まず，$a^m = 1$ であるから a は $\frac{2\pi}{m}$ の回転変換としてよい[10]。1 つの頂点は m 回の回転変換で元に戻るので，即ち m 個ずつの頂点が回転で移動して行くので，n は m の倍数でなくてはならない。そこで m 角形が問題になるが，この m 角形は3.2.1の考察より，正 m 角形でなければならない。即ち正 m 角形を何個か（2 個以上）中心が一致するようにしておいたとき，各頂点を結んでできた多角形が，位数 m（$\geqq 3$）の回転変換

をもつ多角形ということになる。一方，このことは次のようにも言い換えることができる。

合同な多角形m個をそれらの対応するm個の辺が正m角形を作るようにおいてできる多角形は位数m（≧３）の回転変換をもつ多角形である。図10は合同な４角形を３個用いて正三角形上に並べてできた十二角形である。図10の十二角形が凸多角形であるためには，図から分かるように

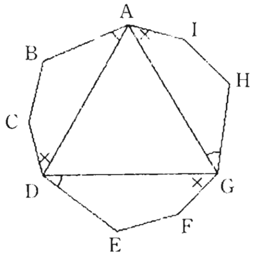


図10

$$\angle BAD + \angle CDA + \frac{\pi}{3} < \pi$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CDA < \frac{2\pi}{3}$$

でなければならない。一般に正m角形を基本図形として凸多角形を作るには，その両辺の角の和が $\frac{2\pi}{m}$ より小さくなるように合同な多角形をおかなければならない。

3.3　G(P)に含まれる最大の巡回部分群の位数が m(≧3)である多角形P

n角形 P_n の合同変換群 $G(P_n)$ に含まれる最大の巡回部分群の位数が m（≧3）であるとすると，$G(P_n)$ は正二面体群 D_{2n} の部分群であるから，第２節より $G(P_n)$ は位数mの巡回群 C_m か正二面体群 D_{2m} のいずれかであることが分かる。またnはmの倍数であるので，n=kmとおく。このとき，先の3.2.1からk≧2の場合を考察すればよい。

3.3.1　k=2のとき（n=2m）

このときは，三角形をm個用いて２m角形Pを構成することになる。

1）２m角形Pの２m個の頂点が同一円周上にある場合

この場合，Pは基本の正m角形をその中心の周りに，ある角 θ $(0<\theta<\frac{2\pi}{m})$ 回転してできるm個の頂点と元の正m角形の頂点から構成される多角形である。従って，Pの各辺の垂直二等分線は回転の中心を通り，対辺を垂直に二等分しており，しかもそれらはPの対称軸に

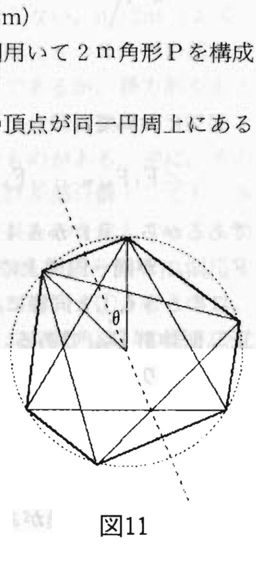


図11

なっている。即ち，Pはm本の対称軸をもっていることが分かる。このことは，Pの合同変換群G(P)が正二面体群 D_{2m} を含んでいることを示してる。（図11参照）

①　三角形が二等辺三角形の場合

このときは，$\theta = \frac{\pi}{m}$　（１辺の中心角の半分）

だから，正２m角形がつくられたことになる。従って，G(P)は正二面体群 D_{2n} に一致する。

②　三角形が不等辺三角形の場合

このときは，$\theta \neq \frac{\pi}{m}$ であるから，Pは正２m角形にはならない。従って，Pの合同変換群G(P)は正二面体群 D_{2m} である[11]。（図12参照）

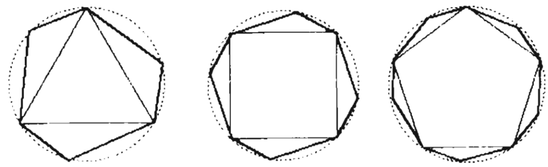


図12

2）２m角形Pの２m個の頂点が同一円周上にない場合

このときは，明らかにPは正多角形にはならない。

①　三角形が二等辺三角形の場合

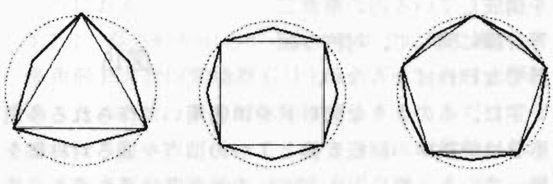


図13

この場合，二等辺三角形の底辺の垂直二等分線上に頂点があるということから，Pはm個の対称軸をもつ図13のような多角形になる。このときもPの合同変換群G(P)は，正二面体群 D_{2m} になる[12]。

②　三角形が不等辺三角形の場合

回転変換をもつ多角形に対称軸があれば，回転の中心は対称軸上になければならない[13]。ここで考察している多角形Pの辺は２m個であるから，対称軸は対辺の垂直二等分線，あるいは２つの頂点を通る直線になっている。前者のときは，正m角形を回転させたものになり，後者の場合は用いている三角形が二等辺三角形になる。結局ここでの場合には，仮定からPは一本も対称軸をもたないことになる。従って，Pの合同変換群G(P)は位数mの巡回群 C_m になる。（図14参照）

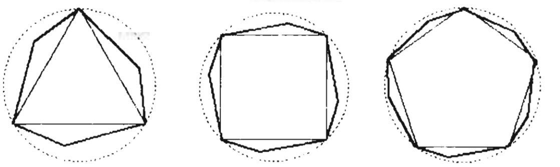


図14

3.2.2　一般の場合（$k \geqq 2$, $n = km$）

3.2.2における条件を満たす合同な $k+1$ 角形Fを m 個用いて構成した km 角形をPとする。ここでは，対称軸に焦点を当てて考察していく。

1）多角形Pが対称軸をもつ場合

多角形の対称軸には，1つの頂点を通るものと2つの辺の垂直二等分線になっているものとがある。また，Pの位数 $m(\geqq 3)$ の回転変換をa，1つの対称変換をbとすると，Pの合同変換群G(P)は $\langle a, b \rangle$，即ち正二面体群 D_{2m} を含んでいることが分かる。

①　多角形Pの1つの頂点を通る対称軸がある場合

基本となる正m角形を取り替えることにより，Fを図15のように置いたときを考察すれば十分である。

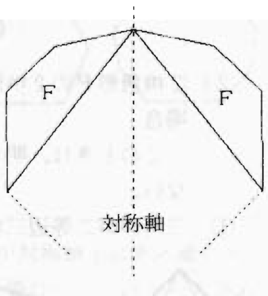


図15

このとき，FとFを裏返したものが重ならなければならない。即ち，正m角形を構成している辺の垂直二等分線に関して，対称な図形でなければならない。

逆に，このような図形Fをm個用いて作られる多角形Pは位数mの回転変換と1つの頂点を通る対称軸を持っている。特に，$k=2, 3$ のときFはそれぞれ二等辺三角形，等脚台形になっている。$k=st$ となる自然数 $s(<k)$, t について，多角形Pの頂点をs個おきに結んでできるtm角形が正多角形でなければ，Pは位数mより大きな回転変換はもたず，従って，m本以外の対称軸も持たない[14]。従って，このときの多角形Pの合同変換群G(P)は $\langle a, b \rangle$ 即ち正二面体群 D_{2m} である。またこのような多角形は，多角形Fにおいて，$s+1$ 個ずつ頂点を結んでできるt個の多角形が線対称な図形でないか，あるいはk個の正m角形が合同でないようにすれば得ることができる。図16はその例である。

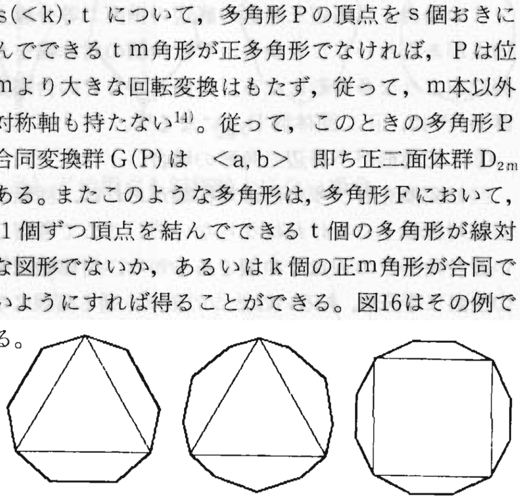


図16

②　多角形Pの2つの辺の垂直二等分線が対称軸になっている場合

このときはkまたはmが偶数になっている場合である。①と同様に基本となる正m角形を取り換えることにより，正m角形を構成している辺と頂点を共有しているFの辺の垂直二等分線がPの対称軸になっているとしてよい。図17は $m=3$, $k=4$ の例である。対称性から，次のことが分かる。

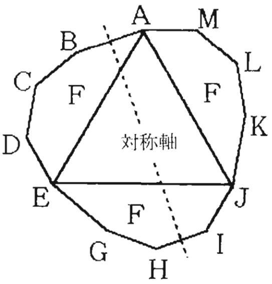


図17

$BC=DE$, $\angle C = \angle D$, $\angle B = \angle BAM$

従って，$\angle B = \angle BAE + \angle DEA + 60°$

さらに，$\angle EBA = 120°$, $CD = BE$ であることも分かる。即ち，四角形BCDEが等脚台形（線対称な図形）になっている。一般には，Fの頂点を F_1, F_2, ……, F_{K+1} とし，辺 F_1F_{K+1} が正m角形の1辺で，辺 F_1F_2 の垂直二等分線が多角形Pの対称軸になっているとすると，Fは次の性質を満たす。

ｉ）多角形 F_2 ……F_{K+1} は辺 F_2F_{k+1} の垂直二等分線に関して線対称な図形である。

ii）$\angle F_{k+1}F_2F_1 = \dfrac{\pi(m-1)}{m}$，

$\angle F_2F_1F_{k+1} + \angle F_{k+1}F_1F_2 = \dfrac{\pi}{m}$

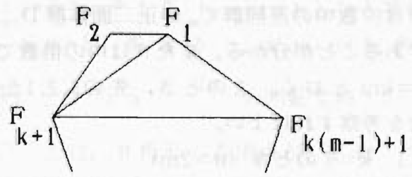


図18

図18において，

$$\angle F_1F_{k(m-1)+1}F_{k+1} = \frac{\pi}{m}$$

であるから，ii）から4つの頂点，F_1, F_2, F_{k+1}, $F_{k(m-1)+1}$ が同一円周上にあることが分かる。

このときも①と同様に，一般にはPの合同変換群は，正二面体群 D_{2m} である。即ち，できた多角形Pが位数がmより大きい回転変換を持たないときは，正二面体群 D_{2m} である。特に，$k=2$ のときは図12のような不等辺三角形に相当している。また，図19は $k=3$ $(m=4)$ のときの例である。$k=3$ のときは，位数がmより大きい回転変換があれば，それは位数3mの回転変換になり，結局Pの合同変換群G(P)は正二面体群

D_{2n}と一致し，Pが正多角形になる。従って，Fは特殊なタイプの等脚台形になる[15]。特に，Fを等脚台形でない四角形に取ると，求めるPの合同変換群G(P)は正二面体群D_{2m}になる。

2）多角形Pが対称軸を持たない場合

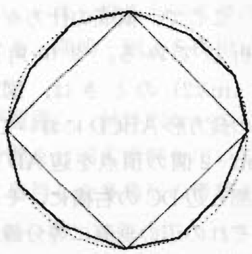


図19

1）で考察した図形ではないFを用いてできる多角形Pにおいて，k=stとなる任意の自然数s(<k)，tについて，頂点をs個おきに結んでできるtm角形が正多角形でなければ，多角形Pの合同変換群G(P)が巡回群C_mであることが分かる。特に，k個の正m角形がすべて大きさが異なるならば，できた多角形Pの合同変換群G(P)は巡回群C_mである。(図20，21参照)

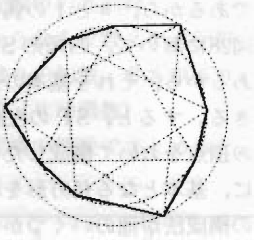


図20

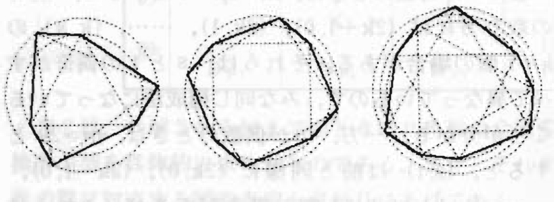


図21

3.4　クラインの四元群を合同変換群にもつ多角形P

第2節での考察から，このとき多角形Pは偶数個の頂点からなっていなければならない。n=2mとおく。クラインの四元群を合同変換群にもつ多角形の基本図形は長方形（正方形でない）であるか，長方形をもとに構成された多角形の中にその合同変換群がクラインの四元群を部分群としてもつものがある。逆に，その合同変換群がクラインの四元群を部分群としてもつ多角形は，その内部構造として長方形を含んでいる。特に，正2m角形（m≧3）は特殊な長方形をm個用いて構成されている。例えばmが3，4，5のときは，縦（多角形の1辺）と横（1つの対角線）の長さの比がそれぞれ

$$1:\sqrt{3}\ ,\ 1:1+\sqrt{2}\ ,\ 1:\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10+\sqrt{5}}}{4}$$

である長方形を用いて構成される。(図22参照)

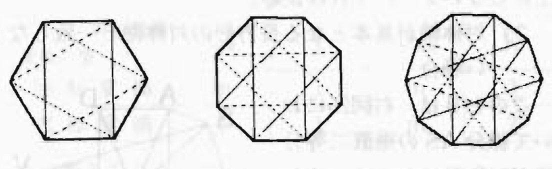


図22

また，これらは長方形をその中心の周りに回転した図形としても見ることができる。さらに，正2m角形は長方形の辺を構成する辺に関して線対称な多角形2枚ずつ二組（あるいは一組）を対辺にくるように置いたものとして，見ることもできる。(図23参照)

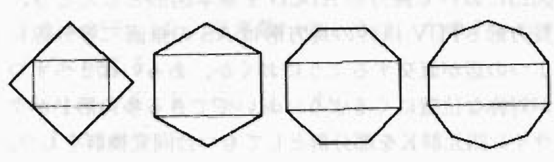


図23

従って，その合同変換群がクラインの四元群Kを含む多角形は次のような2つの方法で構成できる。但し，ここでは正方形でない長方形のみを考える。

① 長方形を中心が一致するようにおく。

② 長方形の辺を構成する辺に関して線対称な多角形2枚ずつ二組（あるいは一組）を対辺にくるようにおく。

3.4.1　長方形を中心が一致するようにおく場合

多角形Pの合同変換群G(P)がクラインの四元群Kであるためには，Pの対称軸は直交する2本だけでなくてはならない[16]。従ってこのときは，対称軸が基本となる長方形の対称軸と一致する場合とそうでない場合の2つのケースがある。

1）対称軸が基本となる長方形の対称軸と一致する場合

このときは，次の図24から分かるように，長方形を構成する辺の垂直二等分線に関して対称な多角形2枚を一組の対辺にくるようにおく場合と同じである。

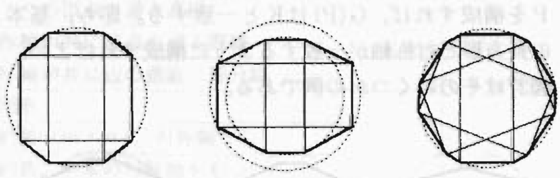


図24

できた2m角形Pが位数が2より大きい回転転換を持たないようにすれば，Pの合同変換群G(P)はクラインの四元群になる。特に，異なる長方形が同一円周

上にこないようにすればよい。

2）対称軸が基本となる長方形の対称軸と一致しない場合

このときは，右図25において線分ASの垂直二等分線が対称軸になっているとしてよい。対称性から，2つの長方形ABCD, STUVは合同であることが分かる。従って，長方形STUVは長方形ABCDをその中心の周りに回転したものになっている。故に，図25において長方形ABCDを基本図形としたとき，長方形STUV以外の長方形はASの垂直二等分線に1つの辺が直交するようにおくか，あるいは2つずつが対称な位置にくるようにおいてできる多角形Pがクライン四元群Kを部分群としてもつ合同変換群をもつ。特に，できた多角形Pが，位数2以上の回転変換をもたなければ，Pの合同変換群G(P)はクラインの四元群Kになる。図26はそのような例である。

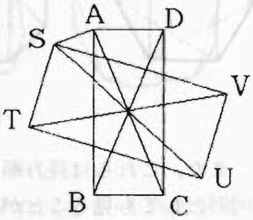


図25

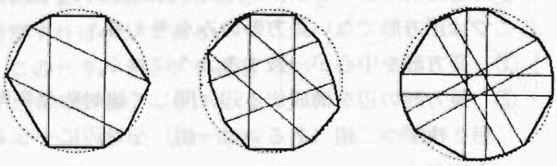


図26

3.4.2　長方形の辺を構成する辺に関して線対称な多角形2枚ずつ二組（あるいは一組）を対辺にくるようにおく場合

一組の場合は，3.4.1の1）と同様であるので，ここでは二組用いる場合のみ考察する。合同でない線対称な2つの多角形を2枚ずつ用いてできた多角形Pの合同変換群G(P)はクラインの四元群Kを部分群として含むので，位数が2より大きい回転変換を持たないようにすれば，G(P)はKと一致することになる。特に，同一円周上になる点が4個以下になるように，多角形Pを構成すれば，G(P)はKと一致する。即ち，基本の長方形と対称軸が一致するように構成すればよい。図27はそのいくつかの例である。

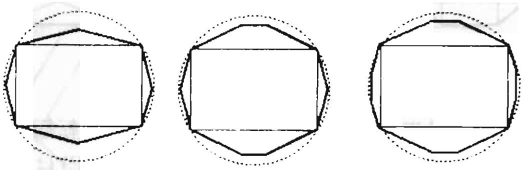


図27

ここで，構成の仕方を分析してみる。2m角形（m≧2）のときは，図28の長方形ABCDにおいて，m−2個の頂点を辺AD上部と辺DCの右横に，それぞれの辺の垂直二等分線に関して対称になるようにおかなければならない。今，ADの上部にs個，DCの右横にt個（s+t=m−2）おいたとする。このとき，s≧tとしてよい。図28はs=2，t=1，m=5の場合である。図28のようにmが奇数のときは，m−2も奇数であるから，sとtの偶奇が異なる。そこで，例えば図28において，四角形STUVは作り方から長方形であるから，それを基本の長方形として考えることもできる。すると，STの左横に3個，SVの上部に0個の頂点をおいて構成したことになっている。このように，基本となる長方形を取り替えることにより，1つの構成法が他のいくつかの構成法と一致していることが分かる。この（m=5）場合，(s,t)が(2,1)と(3,0)のときは同じ構成であることを示している。一般にmが奇数のときは，m=2k+1とすると，(s,t)の取り方には(2k+1,0)，(2k,1)，……，(k,k)のk+1個の場合がある。それらは，sとtの偶奇がすべて異なっているので，みな同じ構成法になっていることが分かる。一方，mが偶数のときは，m=2kとすると，(s,t)は前と同様に(2k,0)，(2k−1,0)，……，(k,k)のk+1個の場合があるが，これらは（偶，偶）と（奇，奇）の2つのタイプに分かれている。従って，この場合には2種類の構成法があることになる。

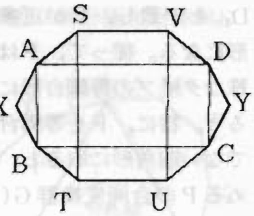


図28

以上（3.4.1，3.4.2）の考察を対称軸と多角形の交わり方に着目してまとめると，次のようになっている。

① mが奇数のとき
　1本の対称軸は多角形の2つの頂点を通る直線で，他方の対称軸はそれと平行な対辺の垂直二等分線

② mが偶数のとき
　i）2本の対称軸が多角形の二組の対辺の（直交する）垂直二等分線
　ii）2本の対称軸が共に多角形の2つの頂点を通る（直交する）直線

4．合同変換群による多角形の分類

第1節でn角形P_nの合同変換群G（P_n）は正二面体群D_{2n}の部分群であることを示し，また第2節では正二面体群D_{2n}の部分群の構造を考察してきた。さら

に第3節では，正二面体群 D_{2n} の部分群を合同変換群にもつn角形が存在することを，理論と例示を併用して示してきた。

この節では，それらをまず整理し，具体的ないつくかのnについて，n角形の分類を合同変換群を用いて行う。また，対称軸の個数に着目した多角形の考察をする。

4.1　多角形の合同変換群の種類

これまでの考察をまとめると，n角形 P_n の合同変換群 $G(P_n)$ には次の4つのタイプがある。

① 巡回群　C_m（mはnの約数，m≠n）

：回転変換からなる位数mの巡回群

② 巡回群T：対称変換からなる位数2の巡回群

③ 正二面体群 D_{2m}（mはnの約数，$3 \leqq m \leqq n$）

④ クラインの四元群　K（nは偶数）

これらを回転変換と対称変換の個数でまとめると，

表1

群の種類 / 変換の型	C_m	T	D_{2m} ＊	K
回転変換	m	1	m	2
対称変換	0	1	m	2

次の表1のようになる。

但し，恒等変換は回転変換して数えている。

また，＊印におけるmは3以上の自然数である。

さらに，nを具体的に与えるとn角形の合同変換群の型を完全に決定できる。即ち，合同変換による多角形の分類を完成することができる。特に，nが奇素数のときは次の3つのタイプしかない。

C_1　　T　　D_{2n}

またnが2p（p：奇素数）のときは，次の7つのタイプに増える。

C_1　C_2　T　K　C_p　D_{2p}　D_{2n}

表2

n	3	4	5	6	7	8	9	10
群の形	C_1 T $D_{2\cdot3}$	C_1 C_2 T K $D_{2\cdot4}$	C_1 T $D_{2\cdot5}$	C_1 C_2 C_3 T K $D_{2\cdot3}$ $D_{2\cdot6}$	C_1 T $D_{2\cdot7}$	C_1 C_2 C_4 T K $D_{2\cdot4}$ $D_{2\cdot6}$	C_1 C_3 T $D_{2\cdot6}$ $D_{2\cdot9}$	C_1 C_2 C_5 T K $D_{2\cdot5}$ $D_{2\cdot10}$

表2は，nが3から10までのときのn角形の合同変換群の型を具体的に求めたものである。また，それぞれの群に対応する図的表現を資料IIにあげておく。

4.2　多角形を合同変換の立場からみたときの基本図形

学校数学における多角形の分類の観点は，平行性および辺や角の相等性である。特に，よく知られた四角形については，結果的にみると辺や角の相等性よりも平行性が先んじているようである。また，四角形の場合には辺の関係性と角の関係性に着目した分類なども知られている[17]。しかし，これらはいずれも辺の数を指定したときの分類である。一方，これまで考察してきた合同変換の立場で多角形をみると，辺や頂点の数に捕らわれない形で多角形の特徴を捉えることができる。この場合の基本図形は次の表3のようになっている。

表3

基本図形	合同変換群	n	作られるn角形の特徴
二等辺三角形	T	奇数	対称軸が頂点から辺への垂直二等分線
等脚台形	T	偶数	対称軸が辺の垂直二等分線
たこ形	T	偶数	対称軸が2つの頂点を通る直線
ひし形	K	偶数	2本の対称軸が共に頂点を通る直線
長方形	K	偶数	2本の対称軸が共に辺の垂直二等分線
平行四辺形	C_2	偶数	点対称な図形
正m角形	C_m		m：nの約数（m≠n），対称軸なし
正m角形	D_{2m}		m：nの約数，m本の対称軸をもつ

4,.3　対称軸の数による多角形の考察

多角形における対称軸の個数に着目すると，これまでの考察と表1から次のことが分かる。

① n角形の対称軸の本数は，0またはnの約数である。

② 多角形が2本の対称軸をもてば，その多角形には恒等変換以外の回転変換がある。

③ nを3以上の自然数とするとき，nの任意の約

数mについて，対称軸の本数が丁度m本であるようなn角形が存在する。

④　n角形がn本の対称軸をもつならば，それは正n角形である。

⑤　n角形が対称軸を丁度2本もつならば，nは偶数である。

⑥　nが奇素数のとき，n角形の対称軸の本数は0，1，nのうちのいずれかである。特に，対称軸を2本以上もつn角形は正n角形である。

これらはいずれも群論的な考察の結果である。特に，①，③，⑤，⑥は群の考えの有用性（よさ）を示している。

②に関しては，一般に次のことがよく知られており，それは初等幾何学的にも証明することができる。

> 平面上において，平行でない2直線に関する対称変換を続けて行った結果は，2直線の交点の周りの回転変換になる。

T. W. Shilgalis は非正多角形の対称性について具体的な考察をし，次を問題にした[18]。

> 非正n角形の対称軸の最大本数を f(n) で表すとき，f(n) を求める。

T. W. Shilgalis は具体的なn角形について帰納的に考察し，次を示唆し，一般的な場合の証明は省いている。

> f(n)＝n の最大の約数（n自身は除く）[19]

この問題は我々の考察から分かるように，群論的に解決できる。即ち，先の4.3の③がその解決を肯定的に与えていることになる。具体的には，nのn以外の最大の約数をmとするとき，正m角形を基本図形として3.3.2で考察した方法でn角形を構成すればよい。

一方，対称軸の本数m(≧3)を指定したとき，対称変換の個数が丁度mであるような非正n角形 P_n は次のようにしても構成できる。

即ち，正m角形を対称軸に関して線対称になるように，しかもできた形が正多角形にならないように切断していけばよい。このときできた多角形の合同変換群は正二面体群 D_{2m} である。図29，図30はmがそれぞれ3，4のときの例である。

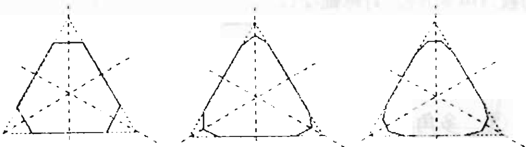


図29

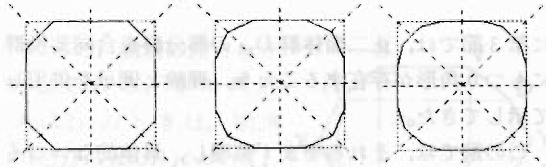


図30

また，対称軸を二本にしたときには，その指定の方法により多角形の構造が変化する。即ち，対称軸の本数が決定される。n角形の場合に，対称軸の本数がnの約数の構造によって決定されることは今までの考察から明らかである。特に，nが奇素数のときは，二本の対称軸をどのように指定しても，n角形が正多角形である。ここでは，十二角形における例を資料IIIとしてあげておく。

5．結語

我々は，合同変換の立場から多角形の構造を理論的に考察し，また具体的な構成法について検討してきた。その結果，以下のようなことを示すことができた。

①　理論的な構造の解明には，群論が有効である。このことは，変換を考えること自体がその群構造と密接に絡んでいるので，当然のことである。

②　合同変換の構造を解明するには，正多角形の構造が本質的である。

③　多角形の基本構造（基本図形）を合同変換の立場から解明した。

④　与えられた合同変換の構造（合同変換群）をもつ多角形は，③の基本図形から構成できる。

⑤　多角形の対称軸に関する性質を群の考えから明確にできた。その結果として，T. W. Shilgalis の課題を理論的に確認できた。

⑥　合同変換の指導の背景的素養として，群の考えが有用であり大切である。

変換の考えに基づいて平面図形の指導を行う場合には，帰納的に図形を考察していくことは勿論大切なことではあるが，指導者としてはそれだけでなく，その理論的背景に基づいた図形の構造を可能な限り把握しておくことはさらに重要なことである。そのためには，数学としての群論を学習したり，指導目標・内容としての図形を表層的に捉えたりするだけでは不十分である。即ち，図形の構造をその背景にある群の考えを活用して解明し，図形の指導内容の位置づけを明確にしておかなければならない。このように，教員養成に関わる学生には，いわゆる数学教育内容学としての指導及び研究が必要である。

今後の課題としては，合同変換による多角形に関する実証的な研究や，教科内容学の成立に向けてさらなる検討を行うことなどが上げられる。

注及び引用・参考文献

1）文部省，高等学校学習指導要領，1989.

2）諸橋孝明，「変換を中心とした『平面幾何』の展開」，日本数学教育学会誌『数学教育』，第74巻，第9号，1992，pp.292－300.

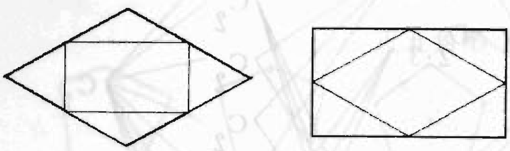
3）T. W. Shilgalis, “Symmetries of Irregular Polygons”, Mathematics Teacher, Vol.85, No.5, 1992, 342－344.

4）拙稿，「分数の相等性II－大学生の意識を中心に－」，『数学教育学研究紀要』第17号，西日本数学教育学会，1991，pp.123－128.

第25回日数論文発表会において，演題『数学教師の数学』で特別講演された朴漢植氏は，講演の中で数学教育内容学の必要性を訴えられたが，それは，筆者の期待する教科内容学に通じるものである。

5）近藤武，『群論Ｉ』，岩波講座基礎数学，岩波書店，1976.

6）ひし形（正方形でない）の合同変換群としても特徴づけられる。下図のようにひし形は長方形から，また長方形はひし形から構成されるので，ここではクラインの四元群を長方形の合同変換群として捉えていくことにする。本稿における以下の長方形に関する考察は，ひし形における考察に置き換えることができる。

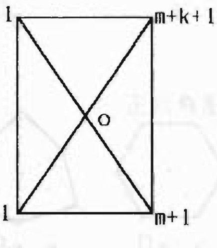


7）正２ｍ角形の頂点を１，２，……，２ｍとし，外接円の中心を０とする．$k+t=m$ のとき，下図のように頂点１，$k+1$，$m+1$，$m+k+1$ をとると，

$$\angle 10(k+1)=\frac{2\pi k}{n}，\angle(k+1)0(m+1)=\frac{2\pi t}{2}$$

であるから，

$$\angle 0(k+1)1=\frac{\pi-\frac{2\pi k}{n}}{2}，$$



$$\angle 0(k+1)(m+1)=\frac{\pi-\frac{2\pi t}{n}}{2}$$

となる。$k+t=m$ であるから，

$$\angle 1(k+1)(m+1)=\frac{\pi}{2}$$

となり，長方形がつくれることがわかる。

8）$a^s=a^{ik}(1\leqq i\leqq m-1)$ とすると，ａの位数がｎであるから，$s-ik$ はｎの倍数になる．即ち，ｓがｋの倍数となる。

9）ｎとｋが互いに素でないとして，最大公約数を $d(>1)$ とする。$n=ds$，$k=dt$ とおくと，$s\theta=2\pi t$ となるから，$a^s=1$ となる．従って，ａの位数が $s<n$ となり，矛盾が生じる。

10）3.2と同様の考察

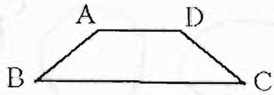
11）合同変換群が D_{2m} を含むことは，先に示してある。また，D_{2m} は D_{2n} の極大な部分であり，Ｐは正多角形ではないから，G(P) が D_{2m} と一致することが分かる。

12）合同変換群が D_{2m} を含むことは，各二等辺三角形の頂点から底辺に下ろした垂線が対称軸になっていることが分かる。したがってまた，注10）と同様に G(P) が D_{2m} と一致することが分かる。

13）多角形Ｐの回転変換をａ，１つの対称変換をｂとすると，Ｐの合同変換群 G(P) は〈a，b〉を含む。$a^m=1$（$m\geqq 2$）とすると，Ｐは対称変換，b，ab，……，$a^{m-1}b$ をもつ．$ab\cdot b=a$ より，この２つの対称変換を行うと元の回転変換ａが得られる．即ち，２つの対称軸の交点が回転の中心になっていることが分かる。

14）多角形Ｐにおける任意の対称変換をｃとする。一方，多角形Ｐは注13）におけるｍ個の対称変換を持っている。今 $c\neq b$ とする。このとき，後述するようにｃとｂの積 cb は回転変換になっている。（4.3参照）今，回転変換は a^i（$0\leqq i<m$）だけであるから，$cb=a^i$（$1\leqq i<m$）となる。すると，$c=a^ib$ であるから，即ちＰの対称変換がｍ個だけであることが分かる。

15）次の図において，四角形ABCDの辺BCが正ｍ角形の１つの辺であるとする。すると四角形ABCDは $AB=CD=AD$，$\angle ABC=\angle DCB=\frac{2\pi}{3m}$ を満たす等脚台形である。



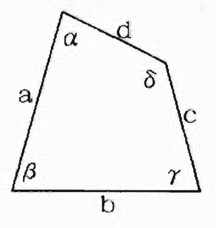
16）注13）の $m=2$ の場合から分かる。即ち，２つの対称変換を続けて行えば，回転変換になっている。今の場合，それは π の回転である。従って，２つの対称軸は直交しなければならない。

17）右の図において，辺の関係性，角の関係性に着目し，次の４つの四角形を基本図形として考える。

Ｉ　$a+c=b+d$
…外接四角形

II　$a+b=c+d$
…対称的安定性

III　$\alpha+\beta=\gamma+\delta$
…平行性（台形）



Ⅳ　$\alpha+\gamma=\beta+\delta$

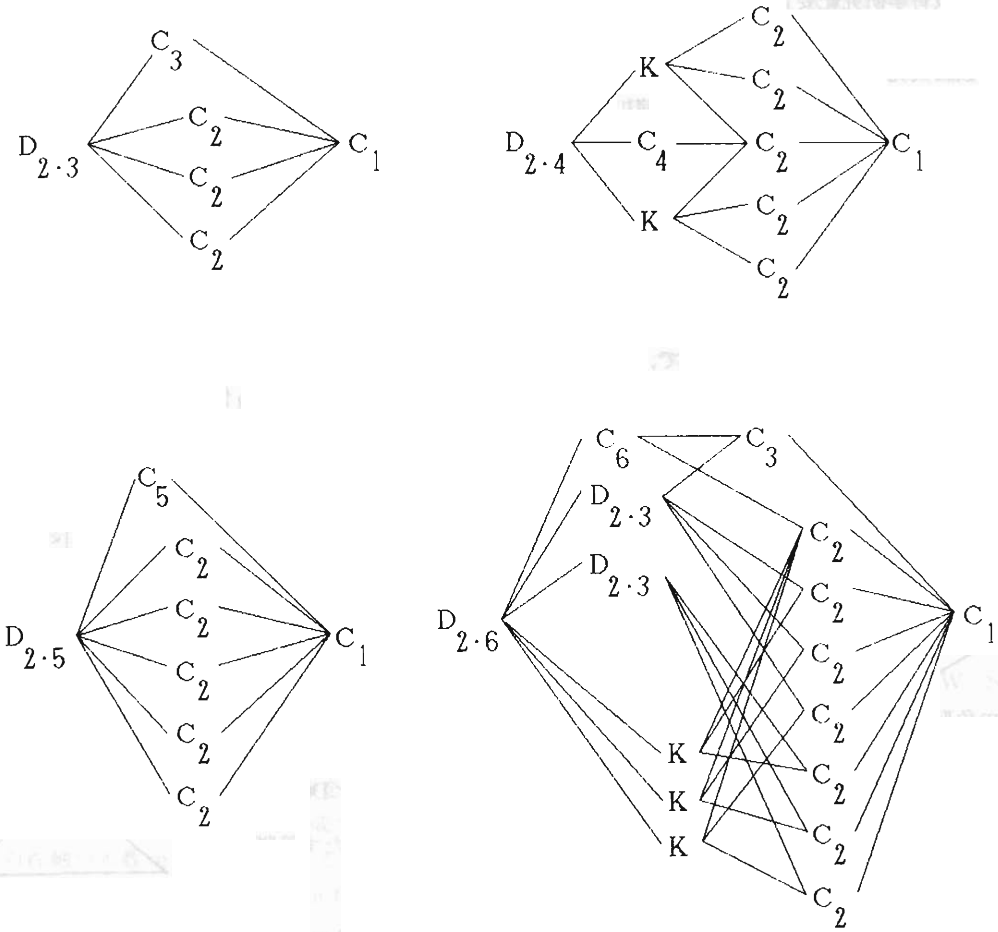
…内接四角形

この観点で四角形を分類していくと，よく知られた四角形を含む16通りの場合がある。

18)　前掲書3).

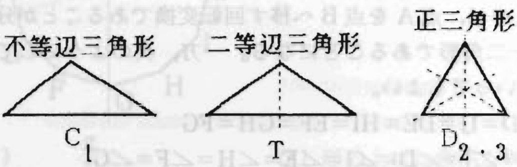
19)　前掲書3). p.344.

資料　Ⅰ

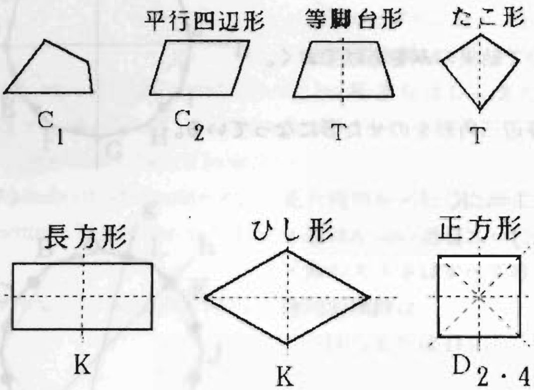


資料 II

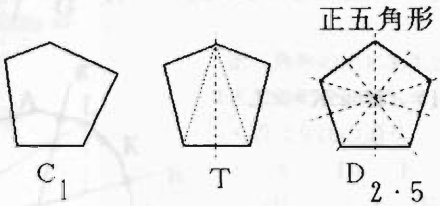
(1) 三角形



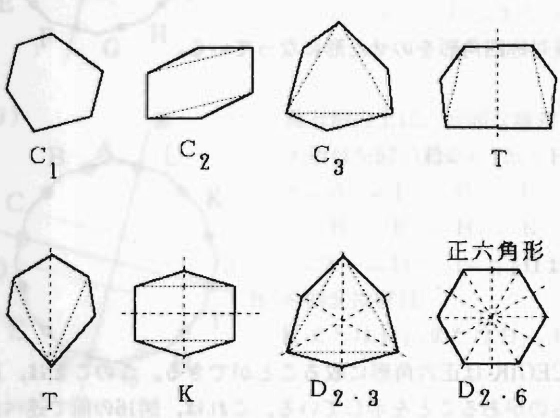
(2) 四角形



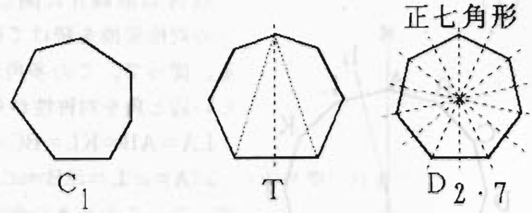
(3) 五角形



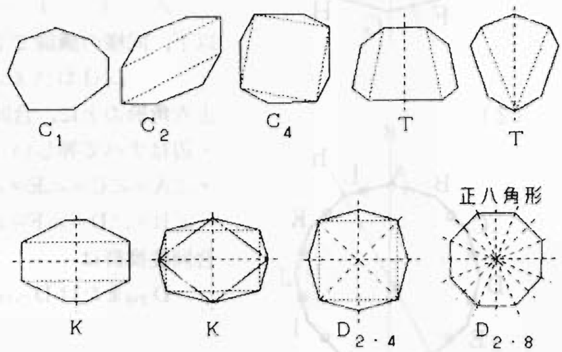
(4) 六角形



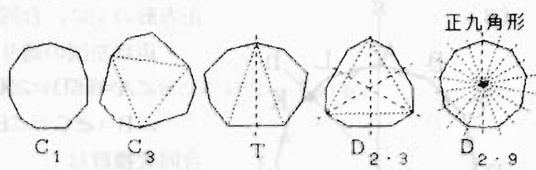
(5) 七角形



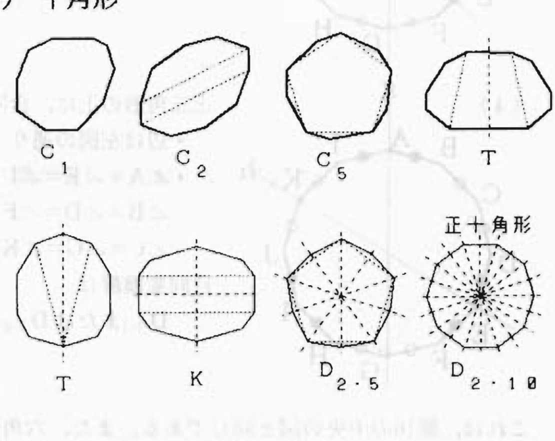
(6) 八角形



(7) 九角形



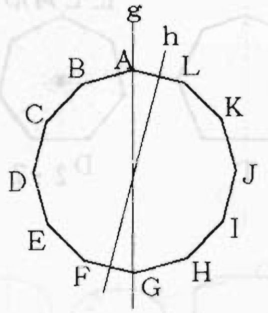
(8) 十角形



資料　III

十二角形における２本の対称軸の位置関係は以下の９通りの場合がある。

（1）



点Ａは直線ｈに関して点Ｌに移り，点Ｌは直線ｇに関して点Ｂに移るので，２つの対称変換を続けて行ったものは，点Ａを点Ｂへ移す回転変換であることが分かる。従って，この多角形が正十二角形であることになる。一方，次のようにして等しい辺と角を対称性から求めていってもよい。

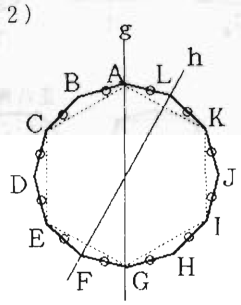
LA＝AB＝KL＝BC＝JK＝CD＝IJ＝DE＝HI＝EF＝GH＝FG

∠A＝∠L＝∠B＝∠K＝∠C＝∠J＝∠D＝∠I＝∠E＝∠H＝∠F＝∠G

従って，このときの合同変換群は$D_{2\cdot 12}$である。

以下，同様の議論でできるので結果のみをあげておく。

（2）



正六角形の上に，合同な二等辺三角形をのせた形になっている。

・辺はすべて等しい

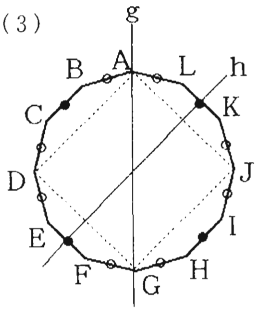
・∠A＝∠C＝∠E＝∠G＝∠I＝∠K

∠B＝∠D＝∠F＝∠H＝∠J＝∠L

合同変換群は

$D_{2\cdot 6}$または$D_{2\cdot 12}$

（3）



正方形の上に，合同な等脚台形をのせた形になっている。

・辺は左図の通り

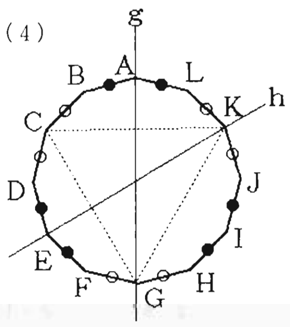
・∠A＝∠D＝∠G＝∠J

∠B＝∠C＝∠E＝∠F＝∠H＝∠I＝∠K＝∠L

合同変換群は

$D_{2\cdot 4}$または$D_{2\cdot 12}$

（4）



正三角形の上に，合同な線対称四角形をのせた形になっている。

・辺は左図の通り

・∠A＝∠E＝∠I

∠B＝∠D＝∠F＝∠H＝∠J ＝ ∠L

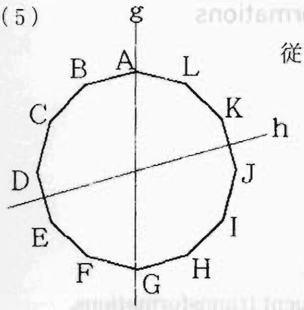
∠C＝∠G＝∠K

合同変換群は

$D_{2\cdot 3}$または$D_{2\cdot 6}$または$D_{2\cdot 12}$

これは，図16の中央の図と同じである。また，六角形 ACEGIK は正六角形に取ることができる。このことは，正六角形を内蔵している十二角形で対称軸が３本しかないものがあることを示している。これは，図16の前で述べたことの逆が必ずしも正しくないことを意味する。

(5)

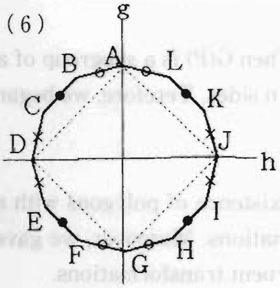


この場合は，正十二角形になることが分かる。

従って，合同変換群は

$D_{2\cdot12}$

(6)



ひし形の上に，合同な四角形をのせた形になっている。(のせ型に注意！)

・辺は左図の通り

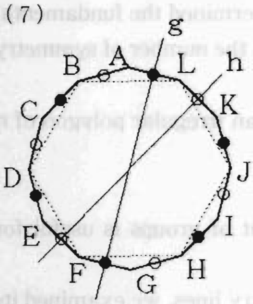
・$\angle A=\angle G, \angle D=\angle J$

$\angle B=\angle F=\angle H=\angle L, \ \angle C=\angle E=\angle I=\angle K$

合同変換群は

Kまたは$D_{2\cdot4}$または$D_{2\cdot6}$または$D_{2\cdot12}$

(7)



正六角形を回転した形になっている。

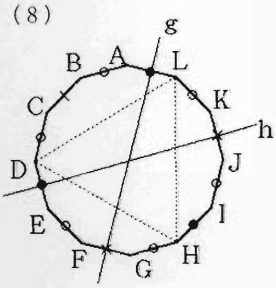
・辺は左図の通り

・角の大きさはすべて等しい

合同変換群は

$D_{2\cdot6}$または$D_{2\cdot12}$

(8)



正三角形の上に3.3.2の方法で合同な五角形をのせた形になっている。

(正三角形を回転して，等脚台形をのせた形)

・辺は左図の通り

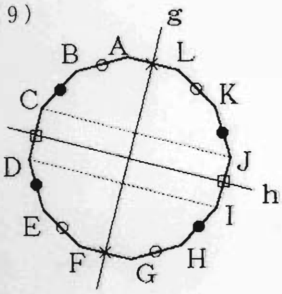
・$\angle A=\angle D=\angle E=\angle H=\angle I=\angle L$

$\angle B=\angle C=\angle F=\angle G=\angle J=\angle K$

合同変換群は

$D_{2\cdot3}$または$D_{2\cdot6}$または$D_{2\cdot12}$

(9)



長方形の上に，合同な線対称が六角形をのせた形になっている。

・辺は左図の通り

・$\angle A=\angle F=\angle G=\angle L$

$\angle B=\angle E=\angle H=\angle K$

$\angle C=\angle D=\angle I=\angle J$

合同変換群は

Kまたは$D_{2\cdot4}$または$D_{2\cdot6}$または$D_{2\cdot12}$

A Study of Polygons by means of Congruent Transformations

Hirohumi UDA
Faculty of Education, Miyazaki University

Abstract

In this paper we study the following

i) the structure of polygons by making use of congruent transformations,

ii) the concrete constructions of polygons with a given structure of congruent trannsformations,

iii) an investigation of the problem presented by T.W. Shilgalis.

Let P be a polygon and G(P) be the set of all congruent transformations of P. Then G(P) is a subgroup of a suitable dihedral group D_{2n}, where D_{2n} is the dihedral group of a regular polygon of n sides. Terefore, we began with a decision on subgroups of the dihedral group D_{2n}.

The outline of conclutions is as follows.

(1) We determined the subgroups of the dihedral group D_{2n} and showed the existence of polygons with a given subgroup of the dihedral group D_{2n} as a group of congruent transformations. Moreover, we gave the concrete constructions of polygons with a given group－structure of congruent transformations.

(2) We classified polygons by using groups of congruent transformations and determined the fundamental polygons in a viewpoint of congruent transformations. Moreover, we considered the number of symmetry lines and rotations in polygons, and made these properties clear.

(3) T. W. Shilgalis denonted by f(n) the maximum number of symmetry lines in an irregular polygon of n sides and suggested the following:

$$f(n) = \text{the largest divisor of n (except n itself).}$$

This fact can be given by considerations in (2). This implies that a concept of groups is useful for investigations of polyogns.

(4) Concerning a polygon－in particular a dodecagon－having two given symmetry lines, we examined its properties concretely and determined its group－theoretical stucture.