数学教育研究紀要（西日本数学教育学会）第18号　1992　pp.61～69

比 の 相 等 性

宮崎大学教育学部　宇 田 廣 文

（1992. 2.29受理）

1．はじめに

数学的概念の導入とその相等性の捉え方は，概念形成に関わる本質的な部分を含んでおり，大変重要である。特に，分数や比などのように異なる表記で“等しい”ことが表現されるような概念の相等性の捉え方は大切である。我々は先行研究で，分数の相等性について，大学生に対する意識調査を行い，大学生が分数の相等性をどのように捉えているかを明らかにし，分数の相等性について数学的な立場と教授学習的な立場から理論的な考察を行ってきた。[1)2)]筆者は，現在の小学校における分数の相等性の導入のあり方と同様に，比の相等性の導入におけるあり方についても問題意識を持ってきている。そこで本稿では，比の定義とその相等性の捉え方について，大学生の実態調査や歴史的考察及び理論的考察を行い，比の定義のあり方や相等性の捉え方について，教授学習的な立場からの考察をしていくことを目的とする。

2．調査の結果とその分析

(1)　調査年月：平成２年９月

(2)　調査対象：分数の相等性についての講義などを受けていない小学校教員養成課程の２～３年生。
２年生…78人　３年生…109人

(3)　調査目的・方法及び内容

①　調査目的：学生が比の相等性についてどのように意識しており，どのレベルで判断するかをみることを目的とする。

②　調査方法：質問用紙に記述式で，約10分間で書いてもらう。

③　調査内容：

次の質問に答えて下さい。
(1)　$\frac{3}{4}$と$\frac{4}{5}$は等しい分数ではありません。その理由を書いて下さい。
(2)　４：６と６：９は等しい比です。その理由を書いて下さい。

なお，ここでは調査問題の(2)についてのみ考察する。

(4)　調査結果

学生の解答をまとめると，次の表１のようになる。

表１

番号	解　答　内　容	２年生	３年生
1	簡単な比におなす	40	37
2	$4\times9=6\times6$	7	7
3	比の値	10	35
4	$6=4\times\frac{3}{2}$，$9=6\times\frac{3}{2}$	2	3
5	$6\div4=1.5$，$9\div6=1.5$	0	4
6	線分図，帯図	5	14
7	情景図[3)]	2	3
8	１の40％と60％	0	1
9	30個を４：６と６：９に分割	2	0
10	誤答	2	2
11	無答	8	3
	総　　　計	78	109

この表１から，比の相等性を判定する視点として，次の３つが抽出される。

①　単位量当たりの考えの利用
前項あるいは後項を１とみる。

②　比の性質の利用
比は，《前項・後項に同じ数をかけても，また同じ数で割っても比は変わらない。》という性質をもっている。

③　比の働き（意味）
ここでは，比は，《２つの量（数）の間の関係である。》と一応捉えておき，詳しい議論は後に回す。

この３つの視点で表１を整理すると，次の表２のようになる。

表２

	表１の番号	２年生	３年生
比　の　性　質	１，２	47(60.3)	44(40.4)
単位量当たりの考え	３～５	12(15.4)	42(38.5)
比　の　働　き	６～９	9(11.5)	18(16.5)
誤　答　・　無　答	10，11	10(12.8)	5(4.6)
総　　　計		78	109

註）（　）内は小数第二位を四捨五入した％を表す。

(5) 結果の考察

学年別にみると，2年生では比の性質を利用したものが60.3%と圧倒的に多いのに対し，単位量当たりの考え特に比の値を利用したものが少ないのが特徴的である。これに対し，3年生は比の性質を利用したものと単位量当たりの考え（特に比の値）を利用したものがほぼ同じであるのが特徴的である。また，比の働きを利用したものも2年生に比較してやや多い。現在の小学校における比の相等性が比の値でもってきちんと定義されていることを考慮すれば，当然比の値でもって判断すると考えられるが，これらの結果はそうなっていないことを示している。奇妙なことである。さらに，無答及び誤答が2年生では全体の12.8%となっているが，彼らが将来比の指導をするのかと考えると危機感を覚える。分数の相等性に関する先行研究[4]でも述べたが彼らには基本的な概念とその相等性に関する指導が必要である。

3．比の定義と比の相等性

この節で，比の定義と比の相等性がどのように捉えられてきたかをいくつかの資料を基に考察していく。

(1) ユークリッドの『原論』[5]

「比」の概念を最初に明確にしたのはユークリッドであるらしい。[6]

その『原論』第5巻定義3で，比は次ように定義されている。[7]

「比とは同種の二つの量の間の大きさに関するある種の関係である。」

ここでは比を同種の量の間のみに限定している。これは，フロイデンタールという《internal ratio》に相当している。[8]

また，比の相等性は第5巻定義5で次のように定義されている。

「第1の量と第3の量の同数倍が第2の量と第4の量の同数倍に対して，何倍されようと，同順にとられたとき，それぞれ共に大きいか，共に等しいか，または共に小さいとき，第1の量は第2の量に対して第3の量が第4の量に対すると同じ比にあるといわれる。」

これは現代流に書くと

$$a:b=c:d \overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\begin{array}{l}\text{任意の自然数 } m,\ n \text{ について} \\ ma>nb \Longrightarrow mc>nd \\ ma=nb \Longrightarrow mc=nd \\ ma<nb \Longrightarrow mc<nd\end{array}}$$

となる。この定義は難しく定義されているが，比の値の概念や実数論がそれほど発達していなかったことを考えると，充分に意味のある定義であろう。即ち，次のような事実の認識が背景になっていることは確かであろうが，『原論』ではきちんとした形では明示されていない。

> （量の稠密性）a，b，c を a＞b となる同種の3量とする。このとき，
>
> $$ma>nc>mb$$
>
> を満たす自然数 m，n が存在する。

これは，アルキメデスの原理から導かれるが，この事実が上のタイトルのように量や有理数の稠密性を示している。[10]

また，このように定義された関係が同値関係であることは容易に分かる。『原論』第5巻ではこの定義から比の相等性に関する多くの性質を示しているが，それらを順に現代風に列挙すれば次の表3のようになる。[11] ただし，不等号，＞，＜に関する部分は省いてある。

表3

命題の番号	内容
4	$a:b=c:d \Longrightarrow ma:nb=mc:nd$(註)
7	$a=b \Longrightarrow a:c=b:c$ かつ $c:a=c:b$
7の系	$a:b=c:d \Longrightarrow b:a=d:c$[12]
9	$a:c=b:c$ または $c:a=c:b$ $\Longrightarrow a=b$[13]
11	$a:b=c:d$ かつ $c:d=e:f$ $\Longrightarrow a:b=e:f$
12	$a:a'=b:b'=c:c'=\cdots\cdots \Longrightarrow$ $a:a'=(a+b+c+\cdots):(a'+b'+c'+\cdots)$
14	$a:b=c:d$ のとき $a>c \Longrightarrow b>d$ $a=c \Longrightarrow b=d$ $a<c \Longrightarrow b<d$
15	$a:b=ma:mb$
16	$a:b=c:d \Longrightarrow a:c=b:d$
17	$a:b=c:d$ $\Longrightarrow (a-b):b=(c-d):d$
18	$a:b=c:d$ $\Longrightarrow (a+b):b=(c+d):d$
19	$a:b=c:d$ $\Longrightarrow (a-c):(b-d)=a:b$
19の系	$(a+b):b=(c+d):d$ $\Longrightarrow a:(a-b)=c:(c-d)$
22	$a:b=e:f,\ b:c=f:g,\ c:d=g:h$ $\Longrightarrow a:d=e:h$
23	$a:b=e:f,\ b:c=d:e$ $\Longrightarrow a:c=d:f$
24	$a:b=c:d,\ e:b=f:d$ $\Longrightarrow (a+e):b=(c+f):d$

(2) 中世西欧

ここでは,『数学の歴史II(中世の数学)』[14]における高橋による第1章第5節の『中世西欧の比例論－伝承と展開－』[15]から,比の定義と比の相等性が当時どのように捉えられていたかをみていく。高橋はカンパヌス版『原論』(Campanus Novariensis,? 1296)をまず取り上げて中世における比例論の考察を始めている。その理由として,《彼の『原論』は中世の標準的テクストとして,最も広くかつ深い影響を及ぼし,中世盛期の数学的思想の基盤を形成したからである。………》[16]をあげている。なお,中世におけるカンパヌス版『原論』の位置づけを,資料Iに付記しておく。[17]

① カンパヌス版『原論』

カンパヌス版『原論』における比の定義は,定義3で次のように与えられている。[18]

「比とは同一類にある二つの任意の量の一方の他方に対する確定的関係である。」

比の相等性については,定義6で次のようになっている。[19]

「第1の量が第2の量に対し,また第3の量が第4の量に対しひとつの[同じ]比に応じて存在するといわれるような諸量とは,それらの第1量と第3量の同多倍が,同順にとられると,超過あるいは不足あるいは相等性において,第2量と第4量の同多倍に類似しているもののことである。」

高橋は,《カンパヌス版では定義はほぼ正しく解釈されている。しかしそれは内容理解の正しさを保証するものではない。前の定義の誤解が本定義の誤解を招いたのである。註釈から明らかなように,(A, B) = (C, D)を(mA, nB) = (mC, nD)によって定義してしまったのである。………》[20]とし,その原因を定義5の連続的比例の誤解においている。[21]ここではそのことには深く追求しないが,比の相等性の解釈がトートロジィでしかなく,結局のところ相等性の議論が混乱をきたしていくことになる点だけを示しておく。[22]

また,高橋は,《(A, B) = (C, D)を示すのも多倍をnA, nBではなく,mC, mDでもなく,nA, nCとmB, mDをとる必然性が示されていない。》[23]とし,《カンパヌスをはじめとして中世の数学者には「多倍をとる技法」(equimultiple technique)が比の相等性に何故かかわるのかが皆目わかっていなかったのではなかろうか。》[24]と述べている。従って,有理数の稠密性(もっと直接的には,量の稠密性)が比の相等性とどのように関わっているのかが意識されていなかったということになろう。

一方,中世には現代の比の値に相当するものとして比のデノミナティオ(denominatio)の概念が中世比例論のキーワードとして存在しており,次のように解釈されていた。[25]

「比のデノミナティオとは,他方の量に対する一方の量の正確な大きさあるいは小ささを指示する数である」

「これ対あれの比のデノミナティオとは,これをあれで割ることからでてくるものである。」

② ブラドワディーンの『運動における速さの比についての論考』

高橋は,次のように述べて,ブラドワディーンの『運動における速さの比についての論考』を取り上げている。[26]

………カンパヌス版の偽作定義5(連続的比例)と定義6(非連続的比例)の介入により,有理量・無理量をとわず,量一般に対する比の相等性の判定基準を全く誤解してしまったからである。………中世は無理量を扱う方途を失ってしまったかにみえる。………たしかに中世の人々はエウドクソスの理論的遺産を失いはしたが,不十分の手持ちの素材から出発して,無理比を理論的に処理する新たな方途をつくりあげたのである。現資料から判断する限り,その重要な一歩はブラドワディーン(Thomas Bradwardine, 1290頃～1349)によって踏みだされたと思われる。

そこでは,比の適用範囲をユークリッドにおける定義より拡張し,比は一般的意味で言われる場合と固有の意味で言われる場合の2つがあるとし,次のように定義されている。[27]

一般的意味での比……「比とは,比較される二つのものがそこにおいて比較されるような或ものにおける,一方対他方の関係である。」

固有の意味での比……「比とは,同一類にある二量の一方対他方の関係である。」

ブラドワディーンは,それまで有理比に対してのみ適用可能であったデノミナティオの概念を無理比に対しても適用可能にしていく中で,伝統的な「関係」としての比を新たに「量」とみなし,算法の対象とみなしていったようである。[28]

また,彼は第1章第3節前提1で比の相等性を次の

ように導入している。[29]

「そのデノミナティオが同一あるいは等しいような比はすべて等しい。」

ここにきて初めて，現在小学校で指導されているような比の値による比の相等性の捉え方が見られる。

さらに，高橋は続けてパリ学派のオレム（Nicole Oresme，1325頃～82）の『比の比』理論に言及しているが，そこには比の定義と比の相等性に関する部分がないので我々の考察はここまでとする。

(3) 現在

現行の小学校算数教育において，比の相等性の指導が比の値でもってなされていることは先にも述べたが，ここでは算数教育に関するいくつかの文献での比の定義や比の相等性の捉え方を調べ考察していく。

① 『新数学事典』[30]

ここては，《比とは2つの数または量の大きさの関係を表す概念である。》と比を定義し，さらに《………このようにして，量の比は数の比に還元される。》とした上で，数の比を次のように定義している。[31]

「一般に，2つの実数a，bからつくられたa：bという符丁のことを比という。」

さらに，比の相等性を次で定義している。[32]

「比a：bとc：dとは，c＝ka，d＝kbである実数k（≠0）があるとき等しいといわれ，a：b＝c：dと書かれる。」

今の場合，実数体の中で比を扱っているので，相等性の定義が単純明快である。

② 『現代数学教育事典』[33]

ここでは，《がんらい，3つの同種の量a，b，cがあったとき，それをa：b：cとしてもそれ自体には何の意味もない。比a：b：cが意味をもつのは，それが別の比x：y：zと等しいかどうかを考えたときである。》[34]とし，具体的な事例（コーヒーづくり）を通して比の定義を与え，混ぜ具合が同じであるという比例の観点から比の相等を意味づけている。

③ 『量と数の理論』[35]

田村は，ユークリッド式量空間を定義し，そこにおける2つの量A，UについてA＝U×aとなくような分数aが見いだされるとき，aをAとUの比といい，A：Uで表すとしている。[36]即ち，比を普通比の値として呼ばれるもので定義しており，数（測定数）として見ていることになる。このような定義は，理論的にはすっきりしているが，教授学習的立場でみると難しい。

④ 『ベーシックな考え方』[37]

畦森は，《比は同種のいくつかの量を，その大きさそのものを比べないで，共通な基準量に対する相対的な大きさで比べようとする考え方である。》[38]としている。さらに1つの長方形を例に取り，基準を換えることによりいろいろな比をつくることができるが《これらの比は，皆同じ2量の比であるから，等しいと考えられる。》とし，比の相等性を次のように定義している。[39]

「比の両項に0でない同じ数をかけたり，比の両項を0でない同じ数でわったりしてできる比は，もとの比に等しい。」

⑤ フロイデンタール[40]

フロイデンタール（Hans. Freudental）は比の意味についてまず

（F-1）《比は数または量の順序対の関数である。》[41]

と述べている。さらに，教授学的現象学の立場から比の論理的位置づけを，

（F-2）《比は数や量の順序対の集合における同値関係である。》[42]

としている。

いずれにしても比がその意味を持ち得るのは，比の相等性の解釈を与えたときということになる。（F-1）に従うと，比を関数値（即ち商）として捉えることもできるが，フロイデンタールはそれは間違いであるとし，《比の大きさ（比の値）を知らないで比の相等性・非相等性に言及することが比の意味である。》[43]としている。そこで，比の相等性は現象学的文脈で捉えるべきであるとし，（F-2）の意味づけになっているようである。

さらにフロイデンタールは比をある1つの体系内で作られる比と2つの量体系の間に作られる比に分け，前者を《internal ration》と後者を《external ration》と読んで区別している。[44]

⑥ 直芳子[45]

直は，割合と比の定義に着目して小学校における割合指導の変遷について，明治38年の黒表紙本から現在の教科書（平成元年度版）に至るまで教科書を中心に研究を行っているが，その中で《戦前は比は関係，比の値は数として明確に定義されていたのに，戦後は関

係とも比ともいわず，割合の表し方のひとつと曖昧な定義になったのはなぜか。》[46]を問題とし，次の2つをその理由として上げている。[47]

(N-1) 戦後の割合指導の変化に伴って教材構成のあり方が変わってきたため。

(N-2) 比は場面に応じて関係とも数とも見られるという比の見方の自由を大切にするため。

4．比の相等性についての理論的考察

第2節で大学生の比の相等性の捉え方を，第3節で比の定義と比の相等性の移り変わりを概観してきた。この節ではこれらを踏まえ，数学的な立場と教授学習的立場から，比の定義と比の相等性についてさらに考察していく。

(1) 数学的立場での「比」

数学的には，数や量を対象とする順序対（a，b）の集合にある種の同値関係を定義しその同値類に含まれる全ての順序対を同じと見ること－即ち，比の相等性－を意識して，考えている順序対に「比」と命名することになる。従って，比の定義は規約的になり，対象の集合で数であろうが，量であろうが問題ではない。問題は，比の相等性の捉え方であって，相等性の定義の仕方が比の意味を与えることになる。即ち，相等性が先に意識されて初めて比の意味が成立することになる。[48]このことは，フロイデンタールの比の論理的位置づけ（第3節(3)⑤(F-2)）や第3節(3)②の考え方に通じる。

一方，比の相等性の定義は，比の関係性を重視した定義（ユークリッド，第3節(3)①，②，④）－即ち，関係的な相等性を意識した定義－と比を数的に（関数値として）みて比の値を用いた定義（ブラドワディーン，第3節(3)③）－即ち，数量的な相等性を意識した定義－の2つのタイプがある。これらの2つの定義は対象とする集合が同じであれば，構造的に同型であることは容易に分かる。従って，数学的には（理論的な概念としては），どららで定義するかによって，定義と性質の差が生じるのである。

また，比の関係性を重視した比の相等性の定義の場合は，実数を用いて関係を規定するのと整数だけを用いて関係を規定するのとでは大きな違いがある。実数を用いる場合は，第3節(3)①のようにすっきりした定義ができる。一方，実数や量を対象とした場合に，整数だけを用いて関係を表そうとするとユークリッド的にならざるを得ない。たとえ比の対象となる集合を有理数に限定したとしても，比の性質である《比は，前項・後項に同じ整数をかけても，また同じ整数で割っても比は変わらない。》で比の相等性を定義することはできない。即ち，この定義では相等関係が同値関係であることを示すことができない。このことは，分数の相等性が約分や通分の考えで数学的には定義できないのと同じである。[49]

(2) 教授学習的立場での「比」

この場合は，比の意味をどのように位置づけるかがまず問題になる。子供の発達段階や比の発展応用などを見通した意味づけが必要である。直は，《比を関係とする定義は大人にとっては納得のいくものであっても子供にとってはやはり難しいことはいなめない。》[50]としているが，筆者は納得できない。戦後，比を割合の1つとして扱ってきているわが国の算数教育から考えたとき，比の値でもって比の相等性を定義することは自然のように見えるが，一方比を関係的にみていることも事実であろう。そこでここでは，比の関係性に着目して考察していく。小学校では普通，量を利用して比の概念を導入しているので，比を関係的にみる場合，フロイデンタールも指摘しているように，同種の2量の比《internal ration》と異種の2量の比《external ratio》に区別して考えなければならない。また，小学校を対象としているので，扱われる数を有理数に限定して考察することにする。

(2-1) 同種の2量の比《internal ration》

この場合は，2量の間の関係を<u>共通の単位</u>で測ったときの数を用いて表現したものが，比ということになる。このように比の意味を捉えると，畦森（第3節(3)④）のように比の相等性を定義することに意味がでてくる。即ち，次のように定義することになる。

$$a:b=c:d \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l}\text{ある自然数 } m \text{ について}\\ \quad c=ma,\ d=mb\\ \text{または}\\ \quad a=mc,\ b=md\end{array}}$$

例えば，9：6と12：8が等しいことは，9：6を表している共通の単位を4等分したものを3つ集めたものを<u>新しい共通の単位として</u>測ると12：8になることが分かる。このようにして，比の相等性が同値関係であることが保証される。ただ単に関係というだけでは，推移律は保証されない。この推移律が次の性質を保証しているのである。

$$a:b=c:d \Longleftrightarrow ad=bc$$

このような考察を子供に意識づけるということでは，

勿論ない。我々の定義がきちんと理にかなっていること，安心して使えることを保証するための考察である。

一方，上の定義から等しい比の比の値が等しいことは容易に分かる。逆に，比の値が等しいことから比が等しいことを示すには，上の性質を利用する方法と定義に戻る方法の２つの方法が考えられるが，いずれの場合も相等性に関する推移律の認識が必要である。[51] 従って，比の値を用いて比の相等性を定義すると，比の関係としての相等性の認識が間接的な認識となって直接的な認識にならない。そこに，比の値で比の相等性を定義する場合の弱点があろう。

また，ここにおける比の定義は，フロイデンタールのいう《uniformity of motion》[52]を保証する。要するに等速運動を例にとると，かかった時間の比が３：４なら進んだ距離の比も３：４であるということがいえるということである。

(2-2)　異種の２量の比《external ratio》

この場合は，比例の考えが必要である。即ち，２量の間の比例関係の認識が前提となる。例えば，等速運動の場合，かかった時間と進んだ距離の比例関係を意識して３：４とかいうように，時間と距離という２つの基準量を設定して，その間の関係として数を用いて表現することになる。一般に，２つの基準（量）を用いて定義された概念の相等性を直接的に定義する方法は，次の２つであろう。

① ２つの基準（量）のうちの一方の基準（量）を揃えて，その場合の他方の基準（量）の比較を通して，相等性を定義する。

② ２つの基準（量）のうちの一方を１としてみる単位量当たりの考えを利用して，相等性を定義する。

今の場合，①の方法を用いることは比例関係を前提にしなければ無理である。[53]その際の比の相等性の定義は，《内項の積と外項の積が等しいときに，２つの比は等しい。》ということになる。また，間接的に比の性質を用いて，時間が２倍，３倍となるに従って，距離も２倍，３倍になるということから３：４と６：８，９：12は等しいというように結論づけることも，比例関係を前提にしている。一方，②の方法即ち，単位量当たりの大きさの比較を通して，比の相等性を定義する方法は，２量が比例関係にあるという事実を利用しなくてもすむ。よって，比例よりも比を先に扱う場合などは，比の値などを用いて比の相等性を定義するのが自然なこととなろう。これは，比を関係的にみながら，比の値を意識していることを意味しており，わが国の割合としてみる見方に通じるものがある。また，比を関数としてみて，関数値と同一視する見方にも通じる。ただ比を関数としてみる見方の場合，ここにおけるように異種の２量の比に対しては，その関数の意味（対応のさせ方）が見通しのよいものとなるが，一方同種の２量の場合は必ずしもそうではない。即ち，２つの変数（量）に対して，何故比の値（商）を対応させるのか，意味づけに説得力がない。その意味で，比を関数的にみる見方にも限界がある。

５．結　語

本稿では，比の定義と比の相等性の捉え方について，大学生の実態調査や歴史的考察及び理論的考察を行ってきた。その結果分かったことをまとめると，以下のようになる。

① 大学生の実態調査から

(1-1)　比の値を用いて比の相等性を判断している大学生は比較的少ない。

(1-2)　相等性の判断のつかない大学生がいる。小学校で，比の値を用いて比の相等性をきちんと定義していることを考えると不思議な現象である。

② 歴史的考察から

比は最初は，同種の２量の関係として導入され，それが次第に異種の２量の関係まで含めた一般的な比にまで拡張されて，その意味も相等性の捉え方の誤解から出発して，関係的な意味から数量的な意味へと変化してきている。また，わが国の比指導も，直の研究からも分かるように，ユークリッド的な捉え方から出発して歴史の変遷と同じように現在では割合として数量的に捉えるようになってきている。

③ 理論的考察から

(3-1)　数学的立場と教授学習的立場では，比の相等性の捉え方に差がある。

(3-2)　同種の２量と異種の２量では，それらの比の関係的な捉え方には差がある。

(3-3)　同種の２量と異種の２量では，その相等性の捉え方には大きな差がある。

教授学習的場面で数学的概念の相等性を規定する場合，対象となる具体的な数量とその概念の導入の仕方から自然に派生する（子供が認知できる）ように相等性を規定しなければならないことは，いうまでもない。従って以上のことから分かるように，同種の２量に対して比の値でもって比の相等性を定義している現在の算数教育のあり方には，少なからず問題があろう。

本稿では，比の定義と相等性にのみ着目して考察してきた。比と比例は切り放して考えることのできない概念かも知れないが，ここではあえて比例を外して考

察している。今後は比例と絡めた（相等関係を比例式とみた）考察も必要であろう。さらに，比の非相等性の判断に関する調査研究も必要である。また，今回は比の指導の具体的なあり方には言及しなかったけれども，実証的な研究を通した比の指導の提言も今後の課題である。

注及び引用・参考文献

1) 拙稿，「分数の相等性－大学生の意識を中心に－」，岩合一男先生退官記念出版会編，『数学教育学の新展開』，聖文社，1992，pp. 132－143
2) 拙稿，「分数の相等性II－大学生の意識を中心に－」，『数学教育学研究紀要』第17号，西日本数学教育学会，1991，pp. 123－128.
3) ○○○○：○○○○○○
   ●　●　●　●　●
   ○○○○○○：○○○○○○○○○○
   ●　●　●　●　●
4) 前掲書2).
5) 中村幸四郎他訳，『ユークリッド原論』，共立出版，1975.
6) 平林一栄・石田忠男編，『算数・数学科重要用語300の基礎知識』，明治図書，1981，p. 164.
7) 前掲書5)，p. 93.
8) H. Freundental, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, D. Reidel Publishing Company, 1983, p. 183.
9) 前掲書7)．なお前掲書6)では，比の相等性の定義は『原論』第5巻の命題4でなされているように書いてあるがそれは間違いであろう。それは後述する中世における間違いと同じ間違いを生じている。この命題4は現代流に書くと次の事実を示しているのみである。

   $a : b = c : d \Longrightarrow ma : nb = mc : nd$

   （m，n：自然数）
10) a－bに相当する同種の量をdとすると，アルキメデスの原理から $md > c$ となる自然数mが存在する。一方，またアルキメデスの原理から

   $nc > mb \geqq (n-1)c$

   となる自然数nが存在する。このとき，

   $ma > nc > mb$

   となる。
11) 前掲書7)，pp. 96－116.
12) この7の系と11は，比の相等性の定義から直接示される。
13) この9と14は，上述の量の稠密性がキーポイントになる。
14) 伊藤俊太郎編，『数学の歴史II　中世の数学』，共立出版，1987.
15) 前掲書14)，pp. 175－260.
16) 前掲書14)，p. 175.
17) 前掲書14)，p. 471.
18) 前掲書14)，p. 177.
19) 前掲書14)，p. 186.
20) 前掲書14)，p. 186訳註25)．(A，B)はAとBの比を表す。
21) 前掲書20).
22) 例えば，前掲書14)，p. 188の本文及び訳註28).
23) 前掲書14)，p. 188訳註28).
24) 前掲書23).
25) 前掲書14)，pp. 194－195.
26) 前掲書14)，pp. 212－213.
27) 前掲書14)，pp. 214－215.
28) 前掲書14)，p. 219.
29) 前掲書14)，p. 222.
30) 一松信也，『新数学事典』，大阪書籍，1979.
31) 前掲書30)，p. 35.
32) 前掲書31).
33) 遠山啓編，『現代数学教育事典』，明治図書，1965.
34) 前掲書33)，p. 240.
35) 田村二郎，『量と数の理論』，日本評論社，1978.
36) 前掲書35)，p. 40.
37) 畦森宣信，『算数教材論ベーシックな考え方』，日本教育研究センター，1983.
38) 前掲書37)，p. 168.
39) 前掲書38).
40) 前掲書8)，pp. 178－209.
41) 前掲書8)，p. 179.
42) 前掲書8)，p. 180.
43) 前掲書42).
44) 前掲書8)，p. 183.
45) 直芳子，「小学校における割合指導の変遷－割合と比の定義に着目して－」，日数教第22回数学教育論文発表会論文集，pp. 369－374.
46) 前掲書45)，p. 372.
47) 前掲書45)，pp. 372－373.
48) このことは何も比に限ったことではなく，順序対を用いて定義されるいろいろな概念（例えば，ベクトル等）についても同様である。
49) 前掲書1).
50) 前掲書45)，p. 372.
51) まず第1の方法では，分数の相等性の数学的定義を利用する。即ち，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ であるとき，$ad = bc$ だから，比の相等性に関する性質から $a:b$

$= c : d$ となる。第2の方法では，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき，これを既約分数 $\frac{e}{f}$ にまず直す。すると，$a = me$, $b = mf$, $c = ne$, $d = nf$ となる自然数 m, n が存在する。よって，比の相等性の定義から，$a : b = e : f$, $c : d = e : f$ となる。従って，相等性の推移律から $a : b = c : d$ である。

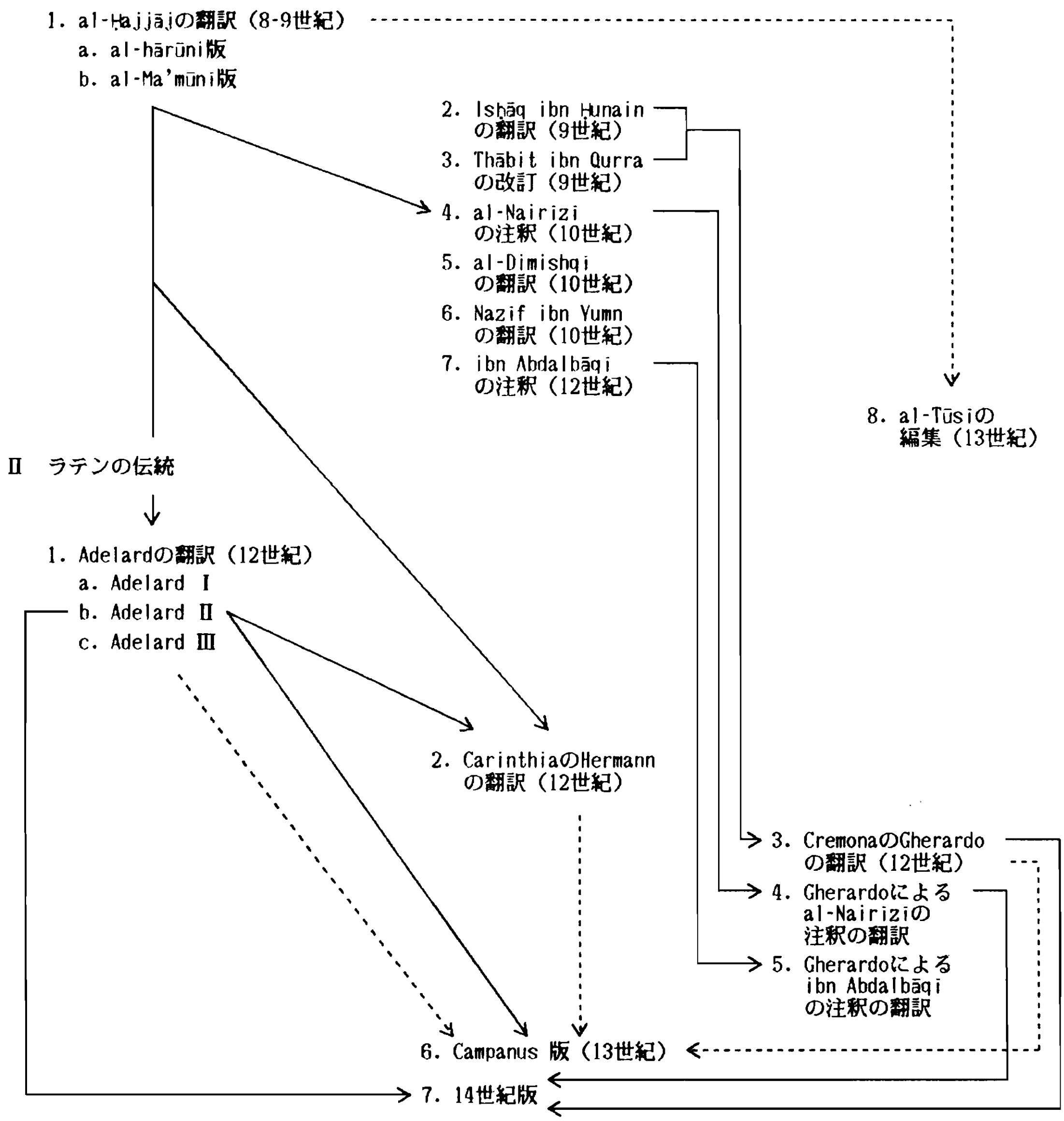
52) 前掲書8)，p. 183.

53) 等速運動を用いて，$3 : 4 = 6 : 8$ を示す場合は，次のようになる。今の場合，時間も距離も違うから，例えば距離を揃えたとき，かかった時間が同じなら2つの比は等しいということになる。4時間で3㎞進んでいるから，8時間では6㎞進むということから（比例を前提とした理由により）$3 : 4 = 6 : 8$ を導くことになる。

資料 I

中世におけるユークリッド『原論』の伝統

I　アラビアの伝統



Equality of Ratio

Hirohumi Uda
Faculty of Education, Miyazaki University

Abstract

Introductions of mathematical concepts and introductions of equality of these concepts are really important to learn and understand those concepts. In particular, equality of concepts with different expressions of symbols, like fractional numbers and ratio, is difficult. In the preceding papers, I investigated on understanding equality and inequality of fractional numbers for university students and discussed levels of understanding these in three viewpoints —— properties of fractional numbers, functions of fractional numbers and calculations of fractional numbers——. Many of them interpreted equality of fractional numbers by means of reduced representatives. Moreover, I showed the difference between mathematical definition of equality of fractional numbers and introductions of ones in a primary school.

In this paper, I investigate and discuss the following matters about equality of ratio.

(1) I investigate levels of understanding equality ratio for university students who belong to an elementary educarion teachers trainig course.

(2) I discuss the meaning of ratio nad equality of ratio from historical viewpoints, mathematical viewpoints and educational viewpoints.

The outline of conclusions is as follows.

(i) Main method of interpretations by university students on equality of ratio is use of properties of ratio rather than use of quotient. This fact is strange because they have learned equality of ratio by quotient.

(ii) Ratio first was introduced as an relation within two quantities of the same kind and gradually was extended as general ratio contaning as realtion between two quatities of the different kind. Moreover, Starting from misunderstanding about equality of ratio, the meaning of ratio has changed from the meaning as a relation to the meaning as quantity.

(iii) Understanding equality of ratio from the viewpoint of mathematics is not same to understand that from the viewpoint of mathematical education. There is a great difference between interpretations of ratio as an relation within two quantities of the same kind and that as an relation between two quantities of the different kimd. Moreover, there is a great difference between interpretations about equality of ratio within two quantities of the same kind and that between two quantities of the different kind.

(iv) Japanese method defining equality of ratio relative to two quantities of the same kind by mean of quotient is containing not a little matter.