数学教育学研究紀要（西日本数学教育学会）第17号　1991　pp. 123〜128

# 分数の相等性 II

## —— 大学生の意識を中心に ——

宮崎大学教育学部　宇　田　廣　文

(1991. 2.28受理)

### 1．はじめに

算数・数学において議論を進めていくとき，大切なものにそこで使われる概念規定とそれにともなう相等性がある。議論における出発点としての概念の解釈に違いがあればその議論は無意味なものになるし，また“同じである”，“同じことである”，“似ている”，“等しい”などの“同じものとみなす”という認識に違いがあればその議論はかみ合わなくなる。特に算数教育を考えたとき，難しい概念の一つに分数がある。その難しさの原因のいくつかは分数の働きの多様性と分数の表記及びそれらに関連した相等性の捉え方に求めることができる。この分数の相等性について，大学生の捉え方への問題意識[1]から先行研究で大学生に対する意識調査を行い，その実態分析と分数の相等性に関する理論的考察を行った。[2]その結果，大学生は約分を利用して分数の相等性を調べているものが多いことが分かった。[3]そこで，本研究では約分できないときの分数（既約分数）の非相等性を大学生がどの様にして調べるのかを調査研究し，さらに分数の非相等性に関する理論的考察を行い，児童や大学生に対する分数の相等性・非相等性の指導のあり方や問題点などを探ることを目的とする。

### 2．調査の結果とその分析

(1)　調査年月：平成2年9月

(2)　調査対象：分数の相等性についての講義などを受けていない小学校教員養成課程の2〜3年生。
2年生…78人　3年生…109人

(3)　調査目的・方法及び内容

①　調査目的：大学生が分数の非相等性についてどのように意識しており，どのレベルで判断するかをみることを目的とする。

②　調査方法：質問用紙に記述式で，約10分間で書いてもらう。

③　調査内容：

| |
|---|
| 次の質問に答えて下さい。<br>(1)　$\frac{3}{4}$と$\frac{4}{5}$は等しい分数ではありません。その理由を書いて下さい。<br>(2)　4：6と6：9は等しい比です。その理由を書いて下さい。 |

なお，調査問題の(1)についてのみ考察する。

(4)　調査結果

大学生の解答をまとめると次頁の表1のようになる。筆者は先行研究で，分数の相等性を判定する視点として次の3つを抽出した。[4]

①　分数の性質の利用

分数は，《分母・分子に同じ数をかけても，また同じ数で割っても分数の値は変わらない。》という性質をもっている。約分や通分の考えは，この性質を代表している。また，後述の分数の相等性に関する数学的定義や既約分数の相等性に関する性質もここに含まれる。

②　分数の働き（意味）の利用

分数の働き（意味）は多様である。その働きは，例えば次のようにまとめられる。[5]

i）操作分数：$\frac{p}{q}$を『q等分したものをp個分とる操作』を表しているとする場合。

ii）割合分数：$\frac{p}{q}$を『qに対するpの割合』を表しているとする場合。

iii）量分数：量の端数部分を表す場合。

iv）商分数：$\frac{p}{q}$を『pをqで割った商』を表しているとする場合。

**表1**

| 番号 | 解　答　内　容 | 2年生 | 3年生 |
|---|---|---|---|
| 1 | 通分 | 32 | 41 |
| 2 | 3×5＜4×4 | 0 | 1 |
| 3 | 既約分数が違う | 1 | 1 |
| 4 | 3：4≠4：5　比 | 1 | 0 |
| 5 | 小数 | 11 | 17 |
| 6 | 4つに分けた3つ分と5つに分けた4つ分は違う | 1 | 4 |
| 7 | 分割の仕方をそろえると集め方が違う(註) | 2 | 1 |
| 8 | 残りの比較 | 1 | 3 |
| 9 | 具体量(水等)の利用 | 5 | 3 |
| 10 | 図Ⅰ　線分図 | 9 | 15 |
| 11 | 図Ⅱ　帯図 | 2 | 11 |
| 12 | 図Ⅲ　円図 | 0 | 2 |
| 13 | 百分率 | 0 | 1 |
| 14 | ×(整数，分数) | 5 | 5 |
| 15 | (分母，分子)×(分数) | 1 | 1 |
| 16 | $\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{1}{20}$ | 5 | 1 |
| 17 | $\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\neq 1$ | 0 | 2 |
| 18 | 無答 | 2 | 0 |
| | 総計 | 78 | 109 |

(註)操作分数としての働きから，図を用いないで等しくないとしているもの

③　分数の計算の利用

分数の四則に関する計算規則や次を利用している。

i）分数$\alpha$について，$\alpha\times 1=\alpha$

ii）分数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，について

$$\alpha=\beta\Rightarrow\alpha\times\gamma=\beta\times\gamma$$

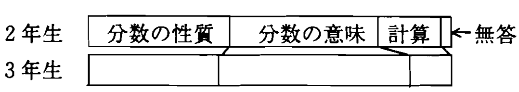
この①～③の3つの視点でまとめたものが表2であり，それを学年ごとの帯グラフにしたものが図1である。

**表2**

| | 表1の番号 | 2年生 | 3年生 |
|---|---|---|---|
| 分数の性質 | 1～3 | 33(42.3) | 43(39.4) |
| 分数の意味 | 4～13 | 32(41.0) | 57(52.3) |
| 分数の計算 | 14～17 | 11(14.1) | 9(8.3) |
| 無　　答 | 18 | 2(2.6) | 0(0.0) |
| 総　　計 | | 78 | 109 |

註)（ )内は小数第二位を四捨五入した％を表す。

**図1**




これからすぐに分かることは，2年生は分数の性質と分数の意味の利用がほぼ同数であるのに対して，3年生は分数の性質より分数の意味の利用の方が多いことである。また先行研究における調査と比較すると2つの学年とも分数の性質の利用が少なくなっている。[6] このことは，約分の利用ができないことが影響しているようにみえる。

(5)　結果の分析

①　分数の性質の利用

分数の性質を利用したものは先行研究における調査結果と異なり，2つの学年とも約40％と少なくなっている。このことは先行研究における調査では約分を用いた解答が主流であり，通分を利用したものが少なかったことから判断すると以下のように推測できる。『これらの分数はこれ以上約分できない。従って，通分するか小数になおすか他の方法を考えなくてはならない。そこで，通分や分数の働きあるいは分数の計算の利用ということになった。』また，2つの分数は，これ以上約分できない分数（既約分数）で異なっているから等しくないと判断した大学生がそれぞれ1名ずついた。さらに3×5＜4×4を利用したものは1名しかいなかった。このことは先行研究における調査で，8×9＝6×12を利用したものが各学年2名ずつと少なかったことからも当然であろう。[7]

②　分数の働き（意味）の利用

分数の働き（意味）の利用については，2年生より3年生の方がよく利用している。これは，先行研究における調査結果と似ている。[8] 一方，解答内容別にみると，次頁の表3のように学年の間に差がある。

特に，3年生は図の利用が50％と多いことに特徴がみられる。これは先行研究における調査結果と比較すると格段の差がある。[9] また小数の利用も先行研究における調査結果と比べて高くなっている。さらに具体量を利用したものがみられることも特徴的である。約分できないということから小数や図などのいろいろな方策が取られたということが分かる。中でも小数や図の利用の多さは結果の違いの明確さによるものであろう。

**表3**

| 表1における解答内容番号 | 学生全体に対する割合 | | 分数の働きにおける割合 | |
|---|---|---|---|---|
| | 2年生 | 3年生 | 2年生 | 3年生 |
| 4　比 | 1.3 | 0 | 3.1 | 0 |
| 5　小数 | 14.1 | 15.6 | 34.4 | 29.8 |
| 6－8 | 5.1 | 7.3 | 12.5 | 14.0 |
| 9 | 6.4 | 2.8 | 15.6 | 5.3 |
| 10－12図 | 14.1 | 25.7 | 34.4 | 49.1 |
| 13　割合 | 0 | 0.9 | 0 | 1.8 |

註）数値は小数第二位を四捨五入した百分率を表す。

③　分数の計算の利用

分数の計算を利用した大学生の割合は，２，３年生ほぼ同じである。整数倍や分数倍を利用したものは，その結果が違うから等しくないとしたものと，２つの分数が等しいと仮定すると整数倍や分数倍したときに矛盾が起こるから等しくないとしたものに分けることができる。分数の整数倍（または分数倍）と積に関する簡約法則あるいは１倍の性質を利用している。

一方，差を計算しているものは，分数の相等性を利用していることになり問題がある。

## ３．分数の非相等性についての理論的考察

先行研究で我々は，分数の相等性について理論的な考察を行い，分数の相等性の判断をする際には，数学的立場（整数から有理数を数学的に構成する立場）から判断する場合と教授学習的立場（集合数としての整数から分数をその働き（意味）から構成する立場）から判断する場合とでは図２のような違いがあることを示した。[10] そこでいう数学的定義とは，有理数を分数を用いて整数の世界から構成するという立場で，『整数 a，b，c，d（b，d≠0）に対し，ad＝bc のとき，２つの分数$\frac{a}{b}$と$\frac{c}{d}$は等しいといい，$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$で表す』と定義する定義のことである。

**図２**

| | | |
|---|---|---|
| 性質 | 約分・通分 | 数学的定義⇔約分・通分 |
| | ⇧ | ⇧ |
| 定義 | 数学的定義 | 分数の働き（第一義など） |
| | 数学の世界 | 算数の世界 |

この２つの立場で，分数の相等性・非相等性を見直してみる。

(1)　分数の相等性・非相等性と約分・通分

２つの分数$\alpha$，$\beta$が等しいことを同じ分数であることと区別するために$\alpha\sim\beta$で表すと，数学的立場と教授学習的立場のいずれから考察してもこの関係『～』は次の性質を満たすことが分かる。つまり，関係『～』は同値関係である。

①　（反射律）任意の分数$\alpha$について，$\alpha\sim\alpha$

②　（対称律）分数$\alpha$，$\beta$について，

$$\alpha\sim\beta \Rightarrow \beta\sim\alpha$$

③　（推移律）分数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$について，

$$\alpha\sim\beta,\ \beta\sim\gamma \Rightarrow \alpha\sim\gamma$$

このことから次が容易に導ける。

> 分数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$において，$\alpha\sim\gamma$，$\beta\sim\delta$とする。このとき，
>
> $$\alpha\sim\beta \Longleftrightarrow \gamma\sim\delta$$
>
> （このことは，$\alpha\not\sim\beta\Leftrightarrow\gamma\not\sim\delta$をも示している。）

特に，

> （分数の相等性の間接比較の原理）
>
> 分数$\alpha$，$\beta$，$\gamma$において，
>
> $$\alpha\sim\gamma,\ \beta\sim\gamma \Longrightarrow \alpha\sim\beta$$

これは，２つの分数は約分や通分をしたときに同じ分数になれば等しいという判断をすることができることを示している。即ち，分数の相等性は約分・通分を利用して判断できる。しかも数学的立場と教授学習的立場のどちらに立っても，その認識が直接可能であることは先行研究で示した。[11] しかし，この性質は約分や通分をしたとき同じ分数（特に既約分数）にならないから２つの分数は等しくならないということを保証してはいない。

通分の考えで分数の非相等性を判断するには，次の性質の認識が必要である。

> $\frac{a}{c}$と$\frac{b}{c}$を２つの分数とするとき，
>
> $$\frac{a}{c}=\frac{b}{c} \Longleftrightarrow a=b$$
>
> 即ち，２つの分数が通分したとき等しい分数になるということと，同じ分数になるということは同値である。

この性質の認識は，数学的立場と教授学習的立場のいずれの立場に立っても容易である。従って，分数の非相等性の判断にもよく利用されることになる。

一方，約分の考えで分数の非相等性を判断するには，既約分数に関する次の整数論的性質の認識が必要である。

> $\frac{a}{b}$と$\frac{c}{d}$を２つの既約分数とするとき，
>
> $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a=c \text{ かつ } b=d$$

このことを認識するには，数学的立場と教授学習的立場のいずれの立場で考察するにしろ，また次の整数論的事実の認識が必要である。

> a，b を互いに素な２つの整数とし，c を任意の整数とする。このとき，
>
> $a \mid bc$ ならば $a \mid c$ である。
>
> ただし，$a \mid b$ は a が b の約数であることを示す。

即ち，2つの既約分数$\frac{a}{b}$と$\frac{c}{d}$が等しいことから，$a=c$，$b=d$を示すには，数学的定義と分数の働き（意味）のいずれを利用しても，まず$ad=bc$を示さなければならない。その後，aとbが互いに素であることと$a \mid bc$であることから，上の整数論的性質を利用して$a=c$，$b=d$を示していくことになる。

従って，約分の考えで『2つの分数の既約分数が一致しないからこの2つの分数は等しくない。』と結論付けることは，数学定義をもとにしてもまた分数の働き（意味）をもとにしても難しいことになる。まとめると，2つの分数が等しいことを示すには，約分・通分の両方が有効であるが，2つの分数が等しくないことを示すには，約分は有効とはいえない。

(2) 分数の非相等性の判断

(2-1) 数学的立場での判断

この立場での分数の非相等性は，相等性の数学的定義からすぐに分かるように$ad \neq bc$で判断される。つまり，相等性の基準と同じ基準で判断される。しごく当たり前のことである。また考察してきたように，分母が同じである2つの分数の相等性はその2つの分数が同じであるかどうかで判断できるので，通分の考えは分数の相等性と非相等性の両方に有効である。一方，2つの既約分数が等しいことはその2つの分数が同じであることと同値であるから，整数論的性質の認識を前提にすれば約分の考えも利用できるが，整数論的知識の学習が必ずしも行われていない現状では難しい。小数による分数の相等性・非相等性の判断は有理数や実数の世界を前提にしておりその妥当性の判断は難しい。つまり，演算（割り算）の立場で判断すると容易であるが，演算結果の小数による表現という立場でみると小数の相等性の問題に転化されて行くことになる。

(2-2) 教授学習的立場での判断

数学的定義や通分の考えが利用できることは上で述べたことと同様である。一方，約分の考えの利用は，整数論的性質の認識を前提とするので，子供の発達段階を考えると有効な方法とはいい難い。分数の非相等性が分数の働き（意味）にたち戻って判断されるときには，それぞれの働き（意味）に従って相等性の判断と同じ基準で判断される。例えば，分け方を揃えたとき，集め方がどうかで判断される。中でも特に有効なものが図の利用と商分数としての働きの利用であろう。図は視覚的に，小数は数値的にその違いを明確に示してくれる。従って，図や小数を利用した分数の非相等性の判断が先行研究における調査に比べ非常に多くなっていることは極めて当然であるといえる。

(3) まとめ

以上の考察と，先行研究の結果を分数の相等性・非相等性の判断の難易さでその妥当性の理解も込めてまとめると次の表4になる。

**表4**

| | | | 相等性 | 非相等性 |
|---|---|---|---|---|
| 数学的定義 | | 数学的立場 | 易 | 易 |
| | | 教授学習的立場 | 易 | 易 |
| 約分 | | 数学的立場 | 易 | 難 |
| | | 教授学習的立場 | 易 | 難 |
| 通分 | | 数学的立場 | 易 | 易 |
| | | 教授学習的立場 | 易 | 易 |
| 小数 | 割り算 | 数学的立場 | 易 | 易 |
| | 商 | 数学的立場 | 難 | 難 |
| | | 教授学習的立場 | 易 | 易 |
| 言葉・図 | | 教授学習的立場 | 易 | 易 |

## 4．結語

本論文は，小学校における分数指導の改善及び将来小学校教員となるであろう大学生への分数指導のあり方を探るための基礎研究の一貫であり，数学的概念の相等性に関する研究でもある。今回は先行研究の成果を踏まえ，分数の非相等性に焦点を当てて，大学生に対する調査・分析及び理論的考察を行ってきた。そのことからいえることをまとめると，以下のようになる。

① 大学生は約分できない2つの分数の非相等性を多様な方法によって判断している。これは，等しいことを示すのに，ほとんど約分に頼っていた先行研究の調査結果に比べるとおもしろい結果である。

② 数学的定義（直接比較）によって判断する大学生はほとんどいない。

③ 分数倍などの計算に頼っている大学生がいる。この学生には，相等性に関する指導が必要である。

④ 先行研究の結果に比べ，通分，小数，図の利用が増えている。

⑤ 2つの分数が等しいことは約分で，等しくないことは多様な方法で判断するという結果になっているがこのことは，先行研究においても論じたが小学校における《分数は既約分数に直す》という徹底した指導の結果であろう。約分できないとき，初めて通分や分数の働き（意味）に着目している様子が伺える。

⑥ 約分は等しいことを示すには有効であるが，等しくないことを示すには難点がある。また，数学定義，通分は等しいことの判断と等しくないことの判断のいずれにも有効である。小数による判断は，教授学習的立場では有効であるが，数学的立場からは有効とはいい難い。

⑦ 相等性の判断と非相等性の判断には違いがある。両方に有効なものや一方だけに有効なものなどを認識していくことは，いろいろな考え方をそのよさとともに感得していくことになり，教授者と学習者のどちらにも大切なことである。

⑧ 先行研究による調査結果では，２つの分数が等しいことの判断は間接比較による判断が主流であったが，今回の大学生に対する調査結果からは等しくないことの判断は必ずしもそうではなくむしろ直接比較に向かう傾向がある。

筆者は，分数の相等性・非相等性の判断は，数学的立場からみても教授学習的立場からみても，数学的定義や小数による直接比較によって判断することが自然であると考える。これは，約分や通分の考えを否定するものではない。教授学習的立場では，約分・通分の考えで導入してもよいが，最終的には直接比較もできるようにまとめるべきである。そのためには，分数の第一義や分数の第二義をもっと活用することが必要である。現在の小学校においては，この部分が抜けている。また小数による判断は実数の世界での判断であり，数学的定義による判断が整数の世界での判断であることを考慮すると，数学的思想の問題が絡んでくるが，筆者は数学的定義の方をより妥当としたい。まとめると，直接比較と間接比較の両方をその目的によって自由に使える見方・考え方の育成が必要であろう。

⑨ 小学校教員養成課程に所属している大学生には，分数指導がぜひとも必要である。これは，教科専門の中で代数学的に体の構造論として扱うという意味ではなく，また教材内容論における概念形成論としてだけでもなく，いわば教科専門と教職専門の中間に位置づけた教科内容学として必要であるということである。

今後の課題としては，児童・生徒の分数の相等性の捉え方を調査研究し，その変容を調べることがある。また，『$\frac{6}{8}$と$\frac{4}{6}$は等しい分数ではないが，それはどうしてでしょう。』などを調査して，約分が可能である場合の分数の非相等性の大学生の捉え方をより明確にしていくことが必要である。さらに，比の相等の捉え方などの調査研究を通して，相等性そのものの捉え方へと発展させていくことが課題である。将来的には，教員養成における教科内容学の成立に向けての研究が大きな課題として残っている。

## 〈注および引用・参考文献〉


1) 例えば，『$\frac{6}{9}$と$\frac{4}{6}$は等しい分数です。何故でしょう？』という問に対する大学生の決まった解答『約分するとどちらも$\frac{2}{3}$になるからです。』がある。何故，直接比較せず，約分なのであろうという問題意識を長年抱いていた。

2) 拙稿「分数の相等性——大学生の意識を中心に——」，投稿中

3) 前掲書2)

4) 前掲書2)

5) 平林一栄・石田忠男編，『算数・数学科重要用語300の基礎知識』，明治図書，1981，p. 168.

6) 前掲書2)

7) 前掲書2)

8) 前掲書2)

9) 前掲書2)

10) 前掲書2)

11) 前掲書2)

# Equivalence of Fractional Numbers (II)

Hirohumi UDA
Faculty of Education, Miyazaki University

**Abstract**

In the preceding paper I investigated on understanding equivalence of fractional numbers for university students and discussed levels of understanding this in three viewpoints — properties of fractional numbers, functions of fractional numbers and calculations of fractional numbers —. Many of them interpreted equivalence of fractional numbers by means of reduced representatives. Moreover, I showed the difference between mathematical definition of equivalence of fractional numbers and introductions of ones in a primary school.

In this paper, therefore, investigate and discuss the following matters.

(1) I investigate levels of understanding inequivalence of fractional numbers written by reduced representatives for university students who belong to an elementary education teachers training course.

(2) I discuss the difference between equivalence and inequivalence of fractional numbers from mathematical viewpoints and educational ones.

The outline of conclusions is as follows.

(i) Main methods of interpretations by university students on inequivalence of fractional numbers by reduced representatives are reduction to common denominator, a decimal representation and geometric representations. This implies the difference between interpretations of equivalence and ones of inequivalence of fractional numbers.

(ii) Interpretations on inequivalence by means of indirect comparisons are troublesome, because inequivalence is not an equivalence relation. Terefore, guidance of interpretations of direct comparisons is important for children.

(iii) Understanding equivalence (or inequivalence) of fractional numbers from the viewpoint of mathematics is not equal to understand that from the viewpoint of mathematical education. In this way, understanding mathematical concepts from these two viewpoints differs a little in that methods of definitions of mathematical concepts are different. Therefore, it is requisite to study mathematical contents which imply neither "mathematics" nor "educational conceptualizations".