コンピュータを用いた物理学実験：ニュートンリングによるレンズの曲率半径の測定

宮崎大学教育文化学部紀要　自然科学　第1号（1999）21－27頁

コンピュータを用いた物理学実験：
ニュートンリングによるレンズの曲率半径の測定

作田　俊美・今吉　幸哉*

The Use of the Computer in Physics Laboratory ： A Newton's Ring Experiment

Toshimi SAKUDA and Yukiya IMAYOSHI*

要　旨

物理学基礎実験にコンピュータを活用する方法の一つとして、ニュートンリングによるレンズの曲率半径の測定を取り上げた。データ処理に表計算ソフトを利用することにより、曲率半径を非常に精度良く決定する方法を提案した。更に、コンピュータのグラフィカル表示機能を利用することにより、レンズの歪みに関する学生の理解を導くこともできることを示した。

1．はじめに

ニュートンリングの実験は、干渉による光の波動性を示すための重要な実験教材であり、多くの大学等で利用されている。学生達はこの実験を通して、その干渉縞の美しさに強い印象を受け、光の干渉についての理解を深めることができる。さらに、この干渉縞からレンズの曲率半径を精密に決定できることもこの実験のもう一つの重要な利点である。

しかしながら、多くの実験書[1]での解析法は、複雑な計算を必要とする上、その計算量の割には、レンズの曲率半径をあまりよい精度で決定することができず、学生達の達成感が十分とはいえないようである。これらの点を改善するためにコンピュータの表計算ソフトを用いた新しい解析法とレンズの断面の様子の解析結果をグラフィカルに表示する方法を提案する[2]。研究上では測定やデータ処理にコンピュータを使うのはあたりまえになっているが、教育現場ではまだ十分に活用されているとはいえないのが実状である[3]。我々は学生実験においても、データ処理等、コンピュータを当然利用すべきであると考える。手計算ではできない処理が、簡単にしかも正確にできる。学生が複雑な計算から開放されることにより、物理的本質により近づくことが可能となるからである。しかも、個別分野に特有なソフトウェアでなく、できるだけ汎用性のあるものが望ましい。学生達が将来どのような分野に進んでも役に立つ点も考えるからで

＊今吉　幸哉（宮崎大学大学院）

ある。以上の点から、物理実験において表計算によるデータ処理を積極的に利用することを提案する。このニュートンリングの実験は、表計算ソフトの利用によって、その教育効果が、大いに期待される典型例である。

ここで提案するコンピュータを活用した解析法によって、学生がその有効性を認識し、より物理的な内容の理解を深めることができるであろう。期待される教育的効果をまとめると：①手計算では困難な解析法により精度よくレンズの曲率半径を求めることができる。②グラフィカル表示により、レンズ面の視覚的な理解が可能になり、レンズの歪みを発見する等の深まりが期待できる。③汎用性のある表計算ソフトを利用することは、学生達にとってどんな分野に進んでも応用できる技能となりうる。

2．実験方法

図1にニュートンリングの測定装置の概略を示してある。光源はナトリウムランプの単色光を使う。平凸レンズを平面ガラス板の上にのせると、接触した付近にガラスで挟まれた、空気の薄膜（厚さ：Z）ができる。平面ガラス面に垂直に当てた光によって、この薄膜の両側で反射して生じる位相差による干渉縞が、ニュートンリングである。この干渉縞を遊動顕微鏡で観察する。普通はシャープさから暗輪を測定する。リングの両端の水平位置を a_m と $a_m{}'$ を1／100［mm］まで読み取る。

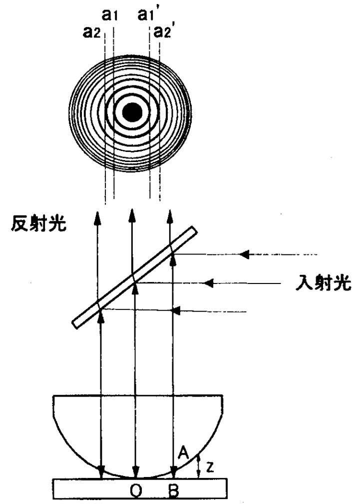

図1．実験装置の概念図とニュートンリング

1)　従来の実験方法

従来の方法は測定で得られた測定値（a_m、a_{m+n}、$a_m{}'$、$a_{m+n}{}'$）を使って曲率半径を求める。簡単に説明すると、暗輪の中心からrだけ離れた位置での空気層の厚さZは図2の関係より、

$$Z = R - R\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$\frac{r}{R} << 1$ だから

$$Z \approx \frac{r^2}{2R} \qquad (1)$$

となる。

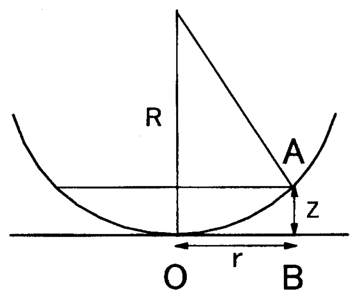

図2．レンズの曲率半径と空気層の厚さの幾何学的関係

A点で反射する光と、B点で反射する光との光路差は、B点での位相の逆転を考えると、$2Z+\lambda/2$となる。従って、m番目の暗輪の干渉の条件は次式となる。

$$r_m^{\ 2} = m\lambda R \qquad (m=0,1,2,...) \qquad (2)$$

実際上は、O点を決定するのが困難なので、もう一つの暗輪を利用する。
第$m+n$番目の暗輪の半径をr_{m+n}とすれば、次の干渉条件が成立する。

$$r_{m+n}^{\ 2} = (m+n)\lambda R$$

上2式より、曲率半径を求めると、

$$R = \frac{r_{m+n}^{\ 2} - r_m^{\ 2}}{n\lambda} \qquad (3)$$

ここで、第m番目の暗輪の直径は$2r_m = a_m' - a_m$、第$m+n$番目の暗輪の直径は$2r_{m+n} = a_{m+n}' - a_{m+n}$なので、この2つの式を（3）式に代入すると次の式が得られる。

$$R = \frac{(a_{m+n}' - a_{m+n})^2 - (a_m' - a_m)^2}{4n\lambda} \qquad (4)$$

但し、波長λはNa-D線の波長$\lambda = 5.893 \times 10^{-5}$ [cm] を使う。

$n=5$の場合で得られた結果を表1に示す。現状では、これらの計算は電卓で計算させているが複雑で計算ミスも多い。表計算で処理させる方がずっと簡単で、教育的である。

表1．暗輪の測定データ1

Data1							
	n＝5						
m	a_m[cm]	a_m'[cm]	a_{m+5}[cm]	a_{m+5}'[cm]	曲率半径R [cm]	残　差	
1	0.8079	1.0968	0.6328	1.276	280.3	2.7	
2	0.7582	1.1489	0.6068	1.300	278.2	0.6	
3	0.7196	1.1839	0.5817	1.323	283.2	5.6	
4	0.6796	1.2184	0.5597	1.345	277.5	－0.1	
5	0.6508	1.2464	0.5412	1.367	278.0	0.4	
6	0.6328	1.2761	0.5282	1.390	278.4	0.8	
7	0.6068	1.3000	0.5088	1.408	277.6	0.0	
8	0.5817	1.3229	0.4880	1.424	276.9	－0.7	
9	0.5597	1.3454	0.4659	1.443	286.3	8.7	
10	0.5412	1.3673	0.4497	1.460	286.5	8.9	
11	0.5282	1.3896	0.4340	1.474	288.7	11.1	
12	0.5088	1.4075	0.4226	1.491	283.4	5.8	
13	0.4880	1.4238	0.4106	1.507	277.3	－0.3	標準偏差
14	0.4659	1.4430	0.3971	1.521	260.9	－16.7	8.3 [cm]
15	0.4497	1.4597	0.3833	1.536	261.3	－16.3	平 均 値
16	0.4340	1.4743	0.3698	1.551	266.4	－11.2	277.6 [cm]

データｉをみると、求めたレンズの曲率半径は260～288［cm］まで大きなばらつきがあることがわかる。その平均値は277.6［cm］、標準偏差は8.3［cm］であった。この結果をみるとレンズはあちこちで凸凹しているのではないかと疑いたくなるほどである。この解析法では平凸レンズの曲率半径は精度よく決定できたとは結論できない。

2）新たな実験方法

従来の実験方法では、曲率半径をよい精度で決定することはできなかった。しかし、これは平凸レンズそもそもの精度が悪い為とは思えない。我々は別の解析法を用いることにより、同じデータを用いても十分な精度で決定できることを示す。表計算ソフトの持つ回帰分析機能を利用する解析法と、結果として得られた平凸レンズ断面をグラフィカルに表示する方法を提案する。

第m番目の暗輪における平凸レンズと平面ガラス板との距離Z_mと波長λの関係は、

$$Z_m = \frac{\lambda}{2} m \qquad (m = 0,1,2...) \qquad (5)$$

である。従って、平凸レンズと平面ガラス板との距離Z_mは外側の暗輪に１つずれると$\lambda/2$だけ大きくなる。そこで（5）式を使って、それぞれの暗輪の水平位置の測定点における平凸レンズと平面ガラス板との距離Z_mを計算する。その結果を表２に示してある。

表２．暗輪の測定データ２

m	a_m [cm]	z_m [cm]	a_m' [cm]	z_m' [cm]
1	0.8079	0.0000295	1.0968	0.0000295
2	0.7582	0.0000589	1.1489	0.0000589
3	0.7196	0.0000884	1.1839	0.0000884
4	0.6796	0.0001179	1.2184	0.0001179
5	0.6508	0.0001473	1.2464	0.0001473
6	0.6328	0.0001768	1.2761	0.0001768
7	0.6068	0.0002063	1.3000	0.0002063
8	0.5817	0.0002357	1.3229	0.0002357
9	0.5597	0.0002652	1.3454	0.0002652
10	0.5412	0.0002947	1.3673	0.0002947
11	0.5282	0.0003241	1.3896	0.0003241
12	0.5088	0.0003536	1.4075	0.0003536
13	0.4880	0.0003830	1.4238	0.0003830
14	0.4659	0.0004125	1.4430	0.0004125
15	0.4497	0.0004420	1.4597	0.0004420
16	0.4340	0.0004714	1.4743	0.0004714
17	0.4226	0.0005009	1.4911	0.0005009
18	0.4106	0.0005304	1.5072	0.0005304
19	0.3971	0.0005598	1.5206	0.0005598
20	0.3833	0.0005893	1.5357	0.0005893
21	0.3698	0.0006188	1.5514	0.0006188

この結果から、水平位置a_mを横軸（X軸）に、空気層の厚さZ_mを縦軸（Y軸）にとると、レンズの断面の様子を図3のように表すことができる。

次に、これらの測定点を円の式：$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2-R^2=0$でフィットする[2)]。円の式での回帰曲線モデルを仮定する為、未知母数β_0, β_1, β_2,と誤差εに関して線形になるようにモデルを仮定した。

$$\beta_0+\beta_1 X+\beta_2 Y+X^2+Y^2=\varepsilon_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\ldots,20) \qquad (6)$$

この方法にしたがって曲率半径をもとめると、$R=278.458$ [cm]、標準偏差は、$\sigma_{cir}=2.12\times10^{-3}$ [cm] となった。図3の曲線は測定点を円の式でフィットしたものである。

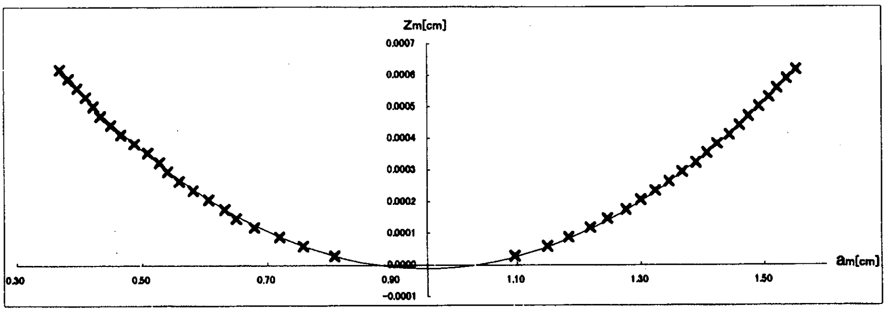

図3．レンズの断面のプロット（データ1）と円の式でのフィット

図より分かるように、非常に精度よく曲率半径を決定することができている。

以上の方法は、非線型の回帰分析を用いるものであるので、初年級の学生達とっては少し難しいかもしれない。そこで、より簡単で精度も同等な方法として、表計算に組み込まれている2次式による回帰分析の方法を示す。但し、曲率半径を求めるためには、円の式の2次近似を作る必要がある。円の式において $\dfrac{(X-X_0)}{R}<<1$ とし、2次の項までとると

$$Y=Y_0-\sqrt{R^2-(X-X_0)^2}\approx Y_0-R+\frac{X_0{}^2}{2R}+\frac{X_0X}{R}+\frac{X^2}{2R}$$

となる。回帰分析の2次式を $Y=\beta_0+\beta_1X+\beta_2X^2$ とすれば、曲率半径Rは、前式と係数を比較することにより、

$$R=\frac{1}{2\beta_2} \qquad (7)$$

から求めることができる。この解析法で求めた曲率半径は$R=278.710$ [cm]、標準偏差は、$\sigma_{bino}=2.12\times10^{-3}$ [cm] であった。

この結果は、円のモデルでフィットしたときの曲率半径と標準偏差の値がほぼ同じであり、精度よく曲率半径を決定できている。この方法は円の式を使うものよりも初年級の学生にとっては教育的である。この方法で得られた回帰曲線と測定点（×印）を図4に示す。図3とほとんど同じ精度でフィットできているのがわかる。

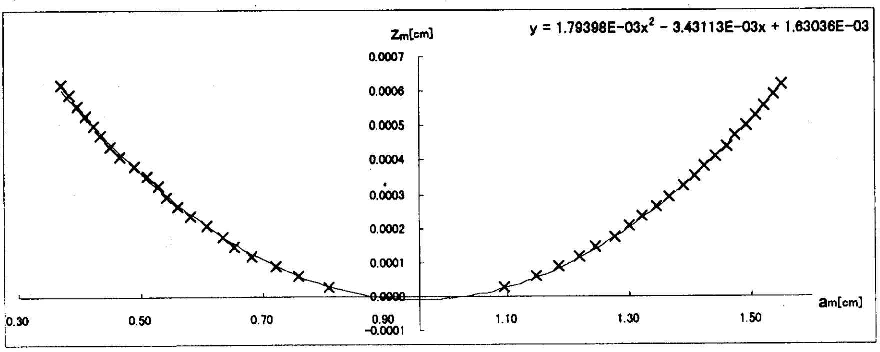

図4．レンズの断面のプロット（データ1）と2次関数でのフィット

3．平凸レンズの歪み

図4の回帰曲線（ここでは二次式）は、レンズの表面を表すのだが、平凸レンズと平行ガラス板（横軸）が交差しているのがわかる。

現在、広く使われているニュートンリング測定装置は、ネジで平凸レンズを固定している。このレンズがネジの圧力によって歪んでいるために、図3のようになったのではないかと考えられる。表1のデータは、ネジをできる限りゆるめて測定したものである。そこで、ネジを強くしめて同様な測定を行い解析した結果を図5に示す。この場合における曲率半径は、$R = 286.528$ [cm]、標準偏差は、$\sigma_{bino} = 1.66 \times 10^{-3}$ [cm] であった。

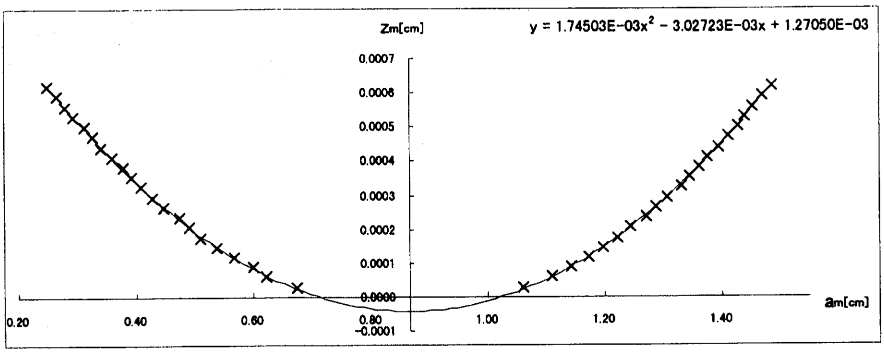

図5.レンズの断面のプロット（データ2）と2次関数でのフィット

図4と図5を比べると、確かに歪み（近似曲線と a_m 軸の交差している部分）が大きくなっているのがわかる。しかし、本当にレンズが歪んでいるのだろうか。そこで、レンズ自身の重さによる歪みを計算することで我々の仮説の妥当性をチェックしてみた。

データ2の回帰分析により得られた2次方程式の極小値を求めると、$Z = -1.08 \times 10^{-5}$ [cm] となった。ガラスのヤング率を用い、平凸レンズを円筒とみなして、レンズ自身の重さによる歪みを計算すると、$Z = -1.89 \times 10^{-6}$ [cm] となった。ネジの圧力による歪みは平凸レンズ自

身の重さによる歪みより、1ケタ程度オーダーが大きくなるであろう。ネジの圧力によって平凸レンズが歪んでいると考えるのは妥当である。

さらに、ネジをしめない場合としめる場合の曲率半径を比べてみると、ネジをしめない場合は$R = 278.710$ [cm]、ネジをしめた場合は$R = 286.528$ [cm]。明らかにネジをしめたほうが曲率半径が大きくなっている。このことは、図5の場合のほうが図4の場合よりも大きな力が加えられた結果、より偏平になっていると考えれば納得される。

4．まとめ

以上、我々の提案する表計算ソフトを利用する実験方法により、ニュートンリングによる曲率半径を非常に精度よく測定ができることを示した。学生には物理現象としての重要性とその技術的役割を理解させることができる方法である。また、平凸レンズの断面をグラフ化することにより、レンズの歪みがあることにも気付かせる等、この実験の理解を深めることができる。このことは物理学をより深く学ぶためのアプローチとしても有効である。また汎用性のあるソフトを使うことによって、将来色々な分野に進んでも応用が可能なスキルとなるであろう。

参考文献

1) 吉田卯三郎、武居分助、橘芳實、武居文雄、「物理学実験」三省堂、p.182 (1979)
2) T. Sakuda and K. Nei, *The Changing Role of Physics Departments in a Modern Universities* AIP, p839 (1997)
3) ジャック・ウィルソン、エドワード・レディッシュ、「パリティ」 Vol.4 , No.9, p.2 (1989).