理科教材研究(IV) : 円の面積と球の体積を子供達にわかりやすく教える方法

宮崎大学教育文化学部紀要　自然科学　第10号（2003）１－12頁

理科教材研究Ⅳ
「円の面積と球の体積を子供達にわかりやすく教える方法」

恵下　歛・前川　智・山元 克郎・秋山 博臣

Study on Teaching Materials for Science, Ⅳ

" Easy and Effective Means for Children to learn the Area of a Circle and the Volume of a Sphere "

Osamu EGE, Satoru MAEKAWA, Katsurou YAMAMOTO,
and Hiroomi AKIYAMA

要　旨

小学生あるいは中学生用の教材として、円周率・円の面積・球の体積についてやさしく学ぶことができる教材を開発した。①円周率については、円周の長さを測り直径で割り算する普通の方法を用いるが、ここでは測定精度を上げるため、伸び縮みしないハンダ線を試用した。②円の面積については、紐（あるいはハンダ線）を利用することで、その形を円から直角三角形に変えて、計算する方法を開発した。③球の体積については、厚紙の積み重ねによって、球の体積を円錐の体積に変換して求める方法を工夫した。

We made teaching materials covering from an elementary school to a junior high school for pupils easy to learn the circle ratio, the area of a circle, and the volume of a sphere. ① For the circle ratio: we measured the circle ratio with a solder wire winding around the circumference of a circle of a thick paper. ② For the area of a circle: we developed a way to calculate the area of a circle, changing its form into a right angled triangle. ③ For the volume of a sphere: we devised a mean to estimate the volume of a sphere, transforming a sphere into a circular cone made of thick paper piles.

１．はじめに

参考資料[１]，[２]にあるように、特に小学生にとって円の面積の公式を理解して記憶することはそれほど簡単なことではないようである。そこで、この公式が簡単に理解でき、しかも記憶に便利な教材を作成したので報告する。球の体積についても同様にわかりやすく説明できる方法を工夫したので合わせて報告する。

その前に全円周の長さと直径の比つまり円周率（3.141592…）を出しておくことが必要であ

る。これについてはさまざまな方法が開発されていると思われるが、ここでは長さを計測する糸として伸び縮みしないハンダ線を使う方法を試みた。

2．教材の紹介

(1)円周率(2)円の面積(3)球の体積の順で紹介する。用具や材料については、厚紙、コンパス、ハサミ、ハンダ線、定規など日常的に入手しやすいものを用いている。

(1)　**円周率：**

まず円周率についてであるが、Ｂ４程度の厚紙（白表紙）から適当な半径で円を切り出す。切り出した円を板などの上に置き、円周に沿ってハンダ線を密着させて巻いていく。その際、ところどころセロテープでハンダ線を留めながら沿わせていくとよい。一周回ったところで（円周の長さで）カットする。カットしたハンダ線を取り出して伸ばし、その長さを測る。その長さを直径で割り算すると円周率がでる。しかしふつう少し大きめの値となる。これはハンダ線の幅の半分だけ大きく円周を測っているからであって、結論として、直径には使ったハンダ線の幅だけ加算して補正するとよい。

$$円周率=\frac{円周の長さ}{直径の長さ+ハンダの幅}$$

これで測定される円周率は3.14にかなり近づく。

(2)　**円の面積**　＜紐（あるいはハンダ線やビニールストリング等）を使って、円の面積をわかりやすい直角三角形の面積に変換する方法＞：

まず図１（上）のように、１ｍ程度の紐（あるいはハンダ線）を渦巻き状に巻く。例えば10cm×20cmくらいの厚紙を用意し、うすくボンドを塗ってからその上に渦巻き状に紐を巻いて円形の面積を作ればよい。全部巻いたら紐の端から円の中心にマジックインクなどで線をひき、紐を一旦はがして、マジックインクで印がついたところをカットする。そうすると、長い紐から短い紐まで何本かの紐となるので、これを厚紙の隅から順に隙間なく並べると、少し階段状ではあるが大体直角三角形になっていることがわかる（図１下）。もちろん非常に細い紐を使ったと仮定すると、できる図形も直角三角形に非常に近いものとなることは自明であろう。紐よりもハンダ線を使ったほうが、できあがりがクリヤなので、ここではその例を図２（写真）に示す。

この直角三角形の面積は元は円の面積であり、したがって、

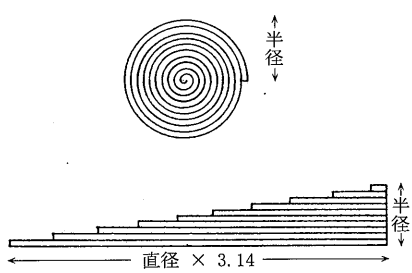


図１．円（上）と同面積の直角三角形（下）

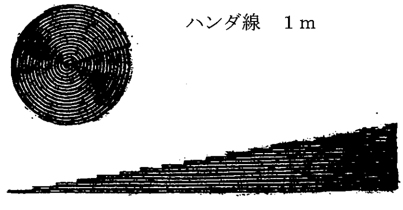


図２．ハンダ線で作った円と直角三角形（写真）

円の面積＝直角三角形の面積
＝たて×よこ÷２
＝半径×(直径×3.14)÷２
＝半径×半径×3.14

と、よく知られた円の面積の公式が得られる。

(3)　**球の体積**　＜厚紙を使って球の体積をわかりやすい円錐の体積に変換する方法＞：

①円の面積を直角三角形に変換して求めたが、その考え方を延長して、やはりサンメーション的に球の体積を求める一方法を紹介する。図３（上）のように球が何枚もの薄い層で構成されているとすると、一番外側の層の面積は４×3.14×半径×半径である。これを剥がして、円形に平らにして置き、その上に次の層を同様にして置き、次々に置いていくと、元の球の半径の高さをもつ（少し階段状の）円錐形ができる（図３下)。

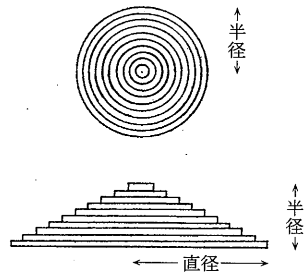


図３．球（上）と同体積の円錐（下）の断面積

この円錐の体積は元は球の体積であり、円錐の体積は円柱の１／３なので、

球の体積＝円錐形の体積
＝高さ×底面積÷３
＝半径×(４×3.14×半径×半径)÷３
＝（４／３)×3.14×半径×半径×半径

とよく知られた球の体積の公式が得られる。

②具体的な作業の一例としては、円錐形を作る前に、まずは正方形の厚紙を重ねて立方体を作るのがよい。そしてできた立方体を基準にして、その一辺を半径にした球を同種の厚紙を重ねて図３のように作り、その次に半径を高さにもつ円錐形をつくるとよい。

これらの間には簡単な体積の比が成り立っていて、立方体と球では１：4.19となるが、球と円錐では１：１となるので、むしろ逆に球の表面積が４×3.14×半径×半径（つまりここで作った円錐の底面積）であることが確認できる。それらの体積は、等質の厚紙を使っていればクッキングスケールなどを使って重さ（質量）で比べてみることができる。

３．まとめ

ここに紹介した方法は比較的簡単であり、レベル的に小学校５・６年生から中学校１・２年生あたりにフィットする教材と思われる。参考資料[１]，[２]にあるように、公式は理解して憶えさせるように指導することが社会的にも要請されているので、その意味でも十分に応えることができるものと思われる。

具体的には、平成15年8月26日むかばき少年自然の家で行われた「わくわくサイエンスキャンプ」において、小学校５年生から中学生まで60人（大半は小学生）を対象に、この教材を用いてかなり効果的な体験学習を行うことができた。そのとき配布した教材プリントを参考資料[３]（付録）として頁末に添付する。

この方法はサンメーションから積分へと進化する計算過程においても、それを具体的に見える形でフォローする教材でもあると考えられるので、高等学校数学の適当なところで、とりあ

げてみるのも意味があるように思われる。

参考資料

［1］朝日新聞「算数・数学の学力低下、円の面積正解は小５の半数」（平成14年12月14日）

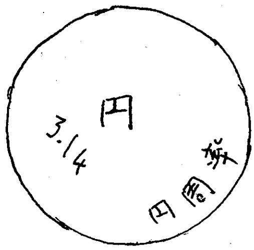
［2］朝日新聞「なぜ、円の面積計算間違い」（平成15年５月13日）

［3］平成15年度わくわくサイエンスキャンプ「円周率について」（むかばき少年自然の家、平成15年８月26日）

（附録）

『円周率について』

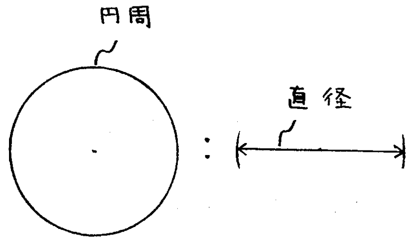
宮崎大学教育文化学部　恵下斂



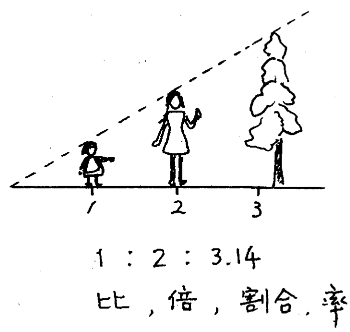
こんにちは、よろしくお願いします。さて、みなさんは

３．１４

という数字にどこかで出会ったことがありますか？　そう、これは円周率といって、どんな円の中にも恥ずかしそうに隠れている数です。本当は**３．１４１５９２６５３５８９７９３２３８４６２．．．**と小数をどこまでたどっても終わりのない数です（最後まで書くことができないので、これを無理数といいます）が、ここでは**３．１４**だけ書いて円周率としましょう。小学校のみなさんは円周率を**３**として習っていると思いますが、本当は3より少し大きい数です。今日ここでいろいろやってみて、円周率とお友達になってください。



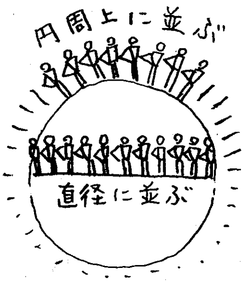
さてこの３．１４は円の中のどこに隠れているのでしょう？「それは円周と直径との比」になって隠れています。ここで比という言葉が出てきましたが、わかりますか？そうです、比は**A：B**のように表されることも多いのですが、$\frac{A}{B}$のようにも表されて、**AをBで割り算した値**（値というのは数のこと）です。ここでは円周の長さを直径の長さで割り算したものとなります。同じことを倍でいうこともできます。つまり円周の長さは直径の長さの3.14倍ということです。こちらのほうがわかりやすいでしょう。このように比と倍はよく使われるので、脳の記憶装置に書き込んでおきましょう。



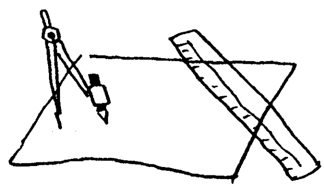
これからやることは恥ずかしそうに隠れているこの比である円周率を見つけ出す探偵のような仕事（正しくは測定といいますが）です。だから、みんなは自然科学探偵団ということになります。

最初にやることは外に出て、グラウンドに線で円を描き、小学生に実際に円の直径と円周上に並んでもらって、その人数から円周率に近づいてみましょう（アプローチといいます）。

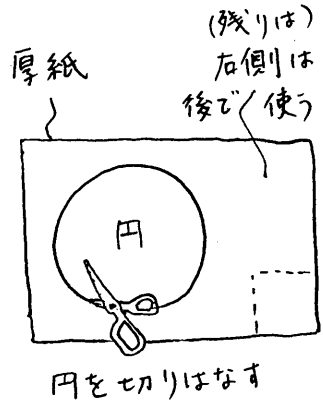
（片腕をくの字にして並んでもらい、人数をたしかめる。直径に並んだ人の数で、円周に並んだ人の数を割り算する。この結果は入室して、検討する。）



（入室して）これから厚紙・定規・コンパス・ハンダ線あるいは糸などを使って、もっと正確に円周率にアプローチしてみましょう。厚紙から円を切り出して、直径の長さを測り、ハンダ線（糸）などを使って円周の長さも測り、割り算して、この比を求めてみましょう。円周率に近づくことができるはずです。



二人一組になって、この探索（測定）をしてもらいます。しかし、うまくいかない組がありましたら、先生方やまわりの先輩の組にお願いして手助けしてもらってください。



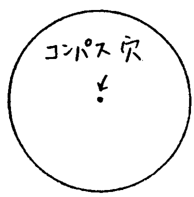
作業①「ハサミで円を切り出そう」

机の上に敷板とその上に厚紙を置き、コンパスを使って厚紙の左の方に大きめの円を描きましょう。

円の半径は大体１０ｃｍくらいが適当ですが、どんな大きさの円でも円周率が同じであることをいうために、

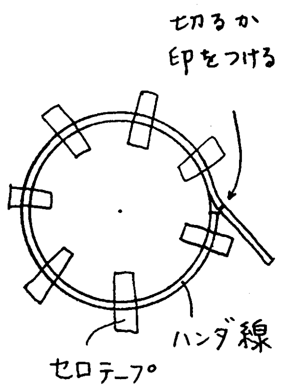
ちょうど１０ｃｍにはしないようにお願いします。

厚紙の真中に円を書かないでください。円は左側に寄せて書いてください。後の作業②と③のために厚紙の右側は残しておきましょう。



ハサミを使って厚紙から円を切り出しましょう。

定規を使って円に直径を書きましょう。円の中心にコンパスでできた小さな穴があります。そこを通る直線はすべて直径です。定規を使って直径を１本書きましょう。定規を使って直径の長さを測り、ノートに記載しましょう。



次に、円の直径の約４倍の長さの**ハンダ線**（あるいは糸）を用意しましょう。円周率は直径の3.14倍なので、４倍程度あれば十分です。

敷板の上に円を置き、円周に沿ってハンダ線を貼り付けていきます。ところどころセロテープでとめていけばよいです。

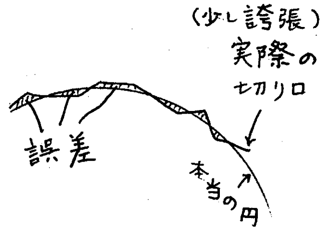
ハンダ線が１周したところにマジックインキなどで印をつけましょう（あるいは切る）。**これが円周の長さです。**

ハンダ線をはずしてまっすぐ伸ばし、**円周の長さ**を測ったら

ノートに記載しましょう。

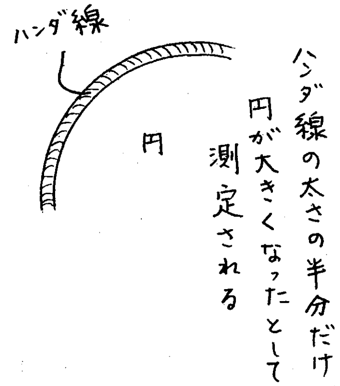
さあ、この円周の長さを先ほどの直径の長さで割り算しましょう。それがあなたの円に隠れていた円周率です。得られた数をノートに記載しておきましょう。

発表① 「円周率は見つかったかな？」
円周の長さを直径の長さで割り算しました。３．１４に近い数になったでしょうか？最後の４のところがだいぶ違った人も多いと思いますが、大丈夫です。必ず少しは違って測られる（測定される）ものです。
少し難しい言葉になりますが、その違いを誤差と言います。誤差をゼロにすることは絶対にできません。どんな測定にも誤差は必ずあるので、安心してください。

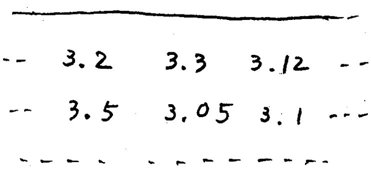


しかし、みんなの円周率は少し大きく出ているようです。それには理由があります。少し考えてみましょう。

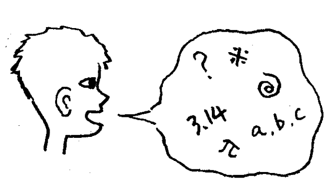
そうです、ハンダ線の幅のことを考えていなかったからです。どうしたらよいのかな？円の直径にハンダ線の幅１mmを足して、この新しい直径で割り算してみましょう（むずかしい言葉でこれを補正といいます）。今度は３．１４にかなり近づいたと思います。でも、少しくらい違っていても大丈夫です。

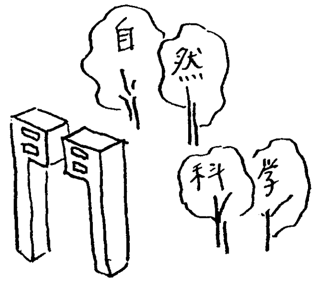


その数値（円周率）を黒板の表に書き込んでみましょう。ノートにも書いておきましょう。
（しかし、大きく違った場合には、どこかに間違いをしている可能性があります。ていねいにやればやるほど３．１４に近い数が得られるはずです）

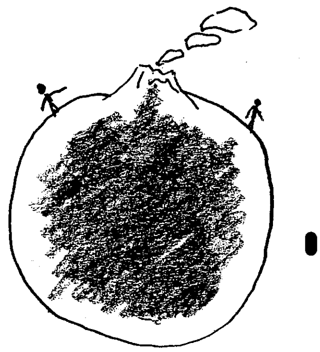


さあ、この表からどんなことがわかったかな？　思ったことや疑問点などいろいろなことを発言してみましょう（発言を求める）。
みんなの意見や自分の考えなどをノートに書いておきましょう。



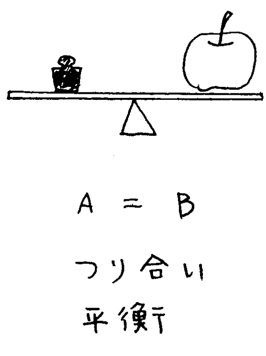


☆　みんなでいろいろな大きさの円を切り出したはずなのに、円周率はどの円についても３．１４に近い数になった（?）。
☆　円周率が３のようなわかりやすい数字でなく、３．１４よりもっと小数がたくさん付いたわかりにくい数（無理数と呼ばれる）になるのはどうしてだろう？（このようにすぐ答えの得られない疑問でも、疑問をもつことが大切で、疑問をもつことは自然科学への入り口であり原点ともいえる）



☆　**直径がわかったら、それに３．１４をかけてやると、どんな円でも円周の長さを知る**ことができる。つまり円周を測らなくても直径を測ったら円周がわかる。あるいはその逆に、円周がわかったら3.14で割り算すれば直径がわかることになる。これってスゴイことで、例えば地球の周囲の長さがわかったら（みんな知っているかな?）、地球の直径（地球の内部は高温高圧で岩石が溶けている）がわかってしまう。直接測ることができない地球の直径を、このようにして間接的に測ることもできるのです。

『今度は円の面積の中にカクレンボしている円周率を見つけ出してみましょう。』
円周率は円の面積の中にも恥ずかしそうに隠れています。
これを見つけ出すために簡単な道具も作ります。簡単ではあっても測定するための道具なので、**測定器**ということができます。ここで作る測定器は身の回りの物を使った天秤の一種です（天秤は数学でいう**方程式**に相当します。方程式という言葉はむずかしいが、天秤と考えるとわかりやすい）。



その前に円の面積が円周率を使ってどのように表されるか、**簡単でわかりやすい手品のような（?）教材**を作ってみましょう。この考えを延長すると、球の体積もすぐ求まります。そしてこの考え方をさらに延長していくと、みんながいつか習う**積分**という考え方にもつながります。

作業②「3．14×半径×半径の公式を求めよう」

みなさんは円の面積が

3．14×半径×半径

ということを知っていますか。これは3．14をπ（πはパイと読む）とし、半径をrとするとかっこよく、

πr^2 とか $\pi r r$

などと書くこともできます（かけ算の記号は省略して書かないことが多い）。

ここで、なぜ面積がこのように表されるかについて、少し工夫した方法で求めてみましょう。（右図を参照）

厚紙の残りの隅（あるいは別途用意した10 cm×20 cm程度の厚紙）に薄く円板状に接着剤を塗っておき、その上に少し太い糸を隙間なく渦状に巻いて円板のようにします。紐の端から中心までマジックインキで線を引きます。これがこの円の半径にあたります。

次にこの半径を切るわけですが、いったん紐を厚紙からはずしてインクのついているところをハサミで切っていく。すると長い紐から短い紐まで何本かの紐ができるので、これを厚紙の角などを利用して長いものから順に並べる（やはり接着剤でつける）と、図のように直角三角形に近い形が得られます（紐を細くすると直角三角形により近くなる）。

できた直角三角形の面積は元の円の面積と等しいはずであり、けっきょく円の面積はこの直角三角形の面積として計算できます。つまり、たてが半径でよこが円周の長さの直角三角形になります。そして円周の長さは直径×3．14だったので、円の面積は

半径×（直径×3．14）÷2

となり、円の面積の公式として

半径×半径×3．14

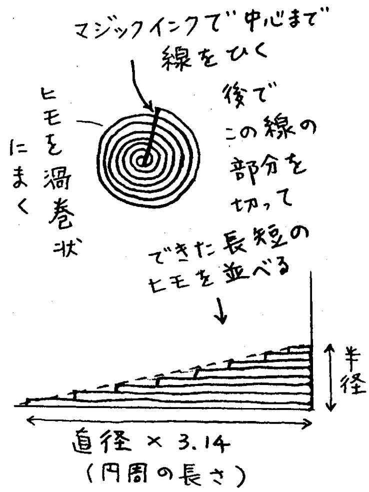
が得られます。

この方法を体験して理解しておくと、円の公式を忘れてもこのことからすぐに導き出すことができるわけです。そのことがわかったら、次の作業にはいりましょう。

π　3.14

π×r×r

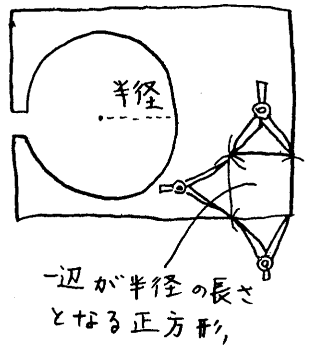
3.14×半径×半径



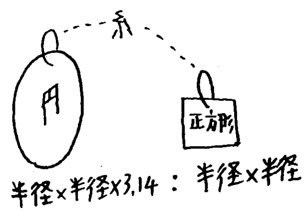
円の面積
＝直角三角形の面積
＝たて×よこ÷2
＝半径×(直径×3.14)÷2
＝半径×半径×3.14

円の面積の公式がでた

作業③「半径×半径の正方形を切り出そう」
先ほどの厚紙の残った右側から、円の半径の長さを１辺とする正方形を一つ切り出しましょう。

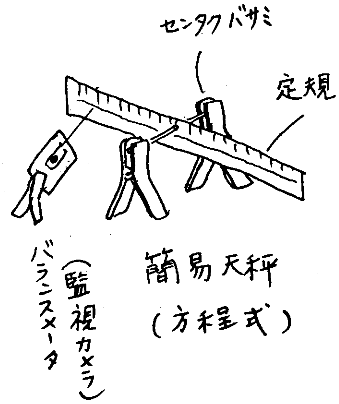


定規あるいはコンパスを使って、厚紙の右下の隅を利用して、一辺が半径の長さになる正方形を描きます。描き方はふつうにコンパスを使って正方形の各頂点を見出して、それらの点を直線で結んで描きます。頂点の見出し方は厚紙の角からコンパスで半径の長さを厚紙の端にとり、そこ（2点）からコンパスで交差する頂点を求めるとよいでしょう。
この正方形をハサミで切り出します。

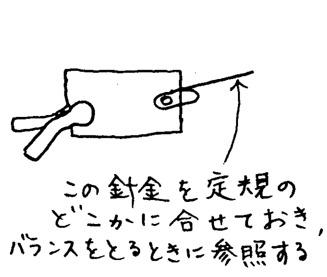


円の面積は半径×半径×3.14 で　正方形の面積が半径×半径なので円の面積は正方形の面積の 3.14 倍になっているはずです。これらを天秤にかけて、本当にそうなっているかどうか調べてみましょう。
円と正方形には鉛筆などで穴をあけて、細い糸の輪を付けておきましょう。

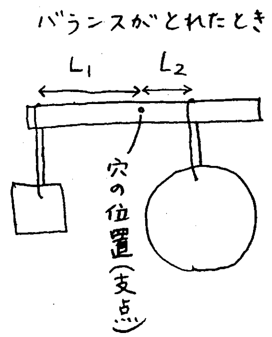
作業④　「簡易天秤（方程式）を作ろう」
右図のように、洗濯バサミや定規を用いて簡易天秤を構成します。この天秤には方程式という面白いニックネームをつけて呼ぶことにしましょう。**（もちろん天秤と呼んでも可）**
それを机の角に置いて、円と正方形を方程式に吊り下げてバランスをとります。



バランスのとり方ですが、目だけでバランスとるのは不十分なので、**バランスメータ**を使います。バランスメータ（クリップ指示針付きの長方形の厚紙）の指示針を回して横に出し、なにも吊り下げない状態で天秤のどこかを指示しておきます。そこが基準点で釣り合った時にその状態になります。**（逆に言えば、そうなるようにすれば釣り合うことになる）**
このバランスメータには監視カメラというニックネームをつけておきましょう。小学生のみなさんには少しむずかしいかも知れませんが、監視カメラを使ってバランスをとれば目だけでバランスをとりよりもはるかに良い精度がえられます。



円と正方形を吊り下げて。監視カメラの指示針が基準点を指示するように円と正方形の位置を左右に動かしてバランスさせます。
バランスしたときの腕の長さL_1とL_2を読みます（右図を参照）。L_1とL_2は定規の中央（支点）から左右に吊るしたところまでの長さです。まちがえ易いので注意しましょう。
L_1とL_2をノートに書いて、L_1をL_2で割り算しましょう。
隠れていた円周率が見つかるはずです。見つかった円周率をノートに書きましょう。



$\frac{L_1}{L_2}$　　$L_1 \fallingdotseq L_2$

発表②「面積にひそむ円周率が見つかったかな？」
測定された円周率を黒板の表に書いてみよう。測定にはかならず誤差がつきものなので、少しくらい違っていても大丈夫です。
☆　発表されたものを見て、どんな感想をもったかな？
☆　円周率は長さの比にも隠れていたが、面積の比にも隠れていた。
☆　体積の中にひそむ円周率はどのようにして見つけるの？

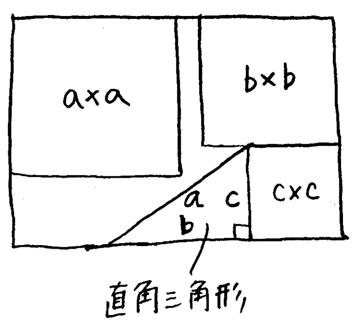
なぜか？それは！
バランスがとれたとき、
$L_2 \times$ 円 $= L_1 \times$ 正方形
である。一方で（比は）
円：正方形
＝半径×半径×3.14：半径×半径
＝3.14：1
のはずだから
$L_2 \times 3.14 = L_1 \times 1$
のはずであり
$L_1 \div L_2 = 3.14$
のはず

作業⑤「（時間があれば）ピタゴラスの定理も」
またまた直角三角形が登場します。
どんな直角三角形でもよいのですが、直角三角形の斜辺の長さをaとし、他の二辺の長さをbとcにすると、それらの間には

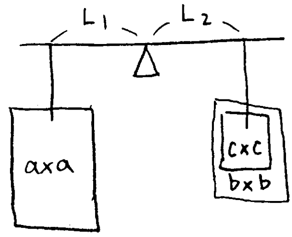
$a^2=b^2+c^2$　あるいは　$a \times a=b \times b+c \times c$

という関係があることを知っていますか。
このことを三平方の定理、あるいはピタゴラスの定理などと呼んでいます。これも自然がもつ不思議な美しい性質ではないでしょうか。

厚紙から、右図のように、ある直角三角形とその各辺を一辺とする正方形を切り出しましょう。この切り出し方がもっともムダが少ないように思われます。
図形を書いたら、適当なところに対応する長さを示すa，b，cを書き入れ、対応する広さを示すa^2，b^2，c^2を書き入れましょう。



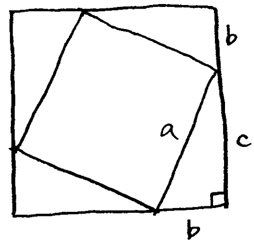
さあ、a^2, b^2, c^2に相当する正方形を切り出しましょう。b^2, c^2は二つ合わせて糸の輪を付けます。これがb^2+c^2（足し算）ということの意味です。
さあ、それらを方程式にかけ監視カメラが見守るなかでバランスさせ、腕の長さL_1とL_2を読みましょう。L_1とL_2が、だいたい等しくなったはずです。



$L_1 = L_2$

これで三平方の定理（ピタゴラスの定理）を実験的に確かめることができます。

この定理の理論的な証明については簡単な方法が工夫されていて、それは右図と式で示しましょう。



この図で考えると
非常にわかり易い
すなわち、
大きな正方形の面積
= 中の正方形の面積
+ 4つの直角三角形
となっているので

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\left(\frac{1}{2}bc\right)$$

式を展開すると、

$$b^2+2bc+c^2 = a^2+2bc$$

$$\therefore b^2+c^2=a^2$$

今日の主役は円でした。しかし不思議なことに直角三角形もそれに負けないくらいよく出てきました。直角三角形というものも自然の中ではむしろ円よりも重要な役割をしているようにも思われます。円は美しく完全な形をしているのに対して直角三角形は美しさよりも実用的で親しみやすいような感じがします。ふつうの三角形の面積も直角三角形の面積にうまく変換して求められることも、このような思いを強くさせます。
また、直角三角形はこれからみなさんが習うはずの、サイン(sin)、コサイン(cos)、タンジェント(tan)という図形的数学の分野でもまた出会うことになっています。
隠れた主役の直角三角形にも興味をもって慣れ親しんでください。

（問）球の体積はどのような図形に変換すれば、わかりやすく計算できるでしょうか。（ヒント：円錐）