素材としての三角格子

宇　田　廣　文*

1. はじめに

格子および格子点を利用した教材開発はいろいろなところでみることができる．例えば，正方形の作図，平方根の導入，三平方の定理，面積指導，立方体の展開図，ピックの定理，いろいろな形作り，ピタゴラス数など多くの例をあげることができる[1)]．また今井[2)]は，規則性の発見・一般化を行う数学的活動の観点から，ピックの定理の教材化やピタゴラスの定理とその発展の教材化を試みている．筆者は大学の教職関係の講義や演習の中で，問題解決や数学的考え方の育成の視点からこれらの内容を取り扱ってきているが，同時に図-1 のような三角格子を用いて正三角形による形作りなども扱ってきている．

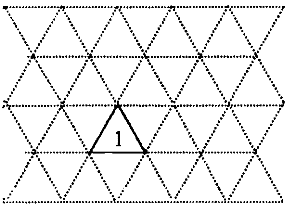


図-1

この三角格子の素材としての可能性に魅力を感じていたのと三角格子による教材開発の文献にあまりお目にかからなかったのでこの表題を考察することにした．したがって，この拙稿では三角格子の素材としての働きを探り，その効用を見出すことを目的とする．ただし，以下基本となる正三角形の面積は 1 として考えることにする．

2. ピックの定理

このピックの定理が数学者よりも数学教育学者や数学教育に関わっている方によく知られているのは不思議な気もするが，格子のもつ教材化への多くの魅力がその原因の 1 つであろう．

（ピックの定理）
格子点を頂点とする多角形の内部に s 個の格子点，辺上に（頂点も含めて）t 個の格子点があれば，この多角形の面積 S は

$$S = s + \frac{t}{2} - 1$$

で与えられる．

この定理は面積を格子点を数えることで求められるというすばらしい定理である．その証明は数学的には河田敬義[3)]に，また初等的には小高俊夫[4)]らにみることができる．ここではこのピックの定理が三角格子の上でも次の形で成立することを示す[5)]．

（三角格子におけるピックの定理）
三角格子点を頂点とする多角形の内部に s 個の格子点，辺上に（頂点も含めて）t 個の格子点があれば，この多角形の面積 S は

$$S = 2s + t - 2$$

で与えられる．

［証明 1］（ピックの定理の応用）
三角格子点を頂点とする多角形 F の内部に s 個の格子点，辺上に（頂点も含めて）t 個の格子点があるとし，この多角形 F の面積を S とする．ところで，三角格子はアファイン変換で普通の格子にすることができる．そのとき，格子点が多角形（格子点を頂点にもつ多角形）の辺上にあるとか内部にあるとかいうことは変わらない．したがって，F を変換してできた多角形 F′は内部に s 個の格子点，辺上に（頂点も含めて）t 個の格子点があるので，基本となる正方形の面積を 1 とするとピックの定理より，多角形 F′の面積 S'

* 宮崎大学教育学部

は

$$S' = s + \frac{t}{2} - 1$$

で与えられる．これは元の三角格子で考えると，基本となる正三角形 2 個が $s+\frac{t}{2}-1$ だけあるということだから，求める多角形Fの面積は S は

$$S = 2s + t - 2$$

となる．

［**証明 2**］（直接的・初等的証明）

小高俊夫[6]と同様で次を示せばよい（図-2）．

① 辺が格子線上にある平行四辺形の場合に成り立つ．

② 2 つの辺が格子線上にある三角形の場合に成り立つ．

③ 一般の三角形の場合に成り立つ．

④ 面積の加法性

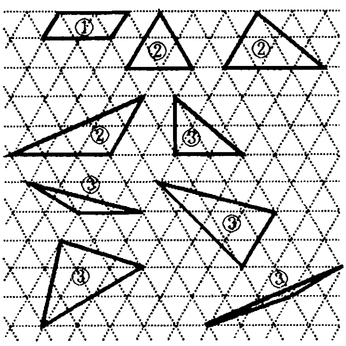


図-2

① 平行四辺形の場合

図-3 のように，辺上に格子点が $n+1$，$m+1$ 個並んだ平行四辺形を考えるとその中の基本正三角形の数は $2mn$ である．

$$2mn = \underbrace{2(m-1)(n-1)}_{\text{内部の格子点の数}} + \underbrace{2(m+n+1)}_{\text{辺上の格子点の数}} - 2$$

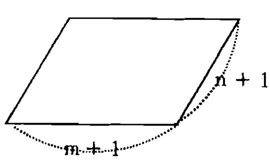


図-3

② 2 つの辺が格子線上にある三角形の場合

（小高俊夫[7]より簡潔）

この場合は，図-2②のように 3 つのケースが考えられるが，証明は次のように統一的にできる．図-4 のようになっているとき，三角形の面積は mn（基本三角形の面積 1 より）である．このとき，$2s + k = (m-1)(n-1)$，また $mn = (m-1)(n-1) + m + n - 1$ だから

$$mn = 2s + (m + n + k + 1) - 2$$

よって，s は内部の格子点の数，$m + n + k + 1$ は辺上の格子点の数を表しているので，この場合ピックの定理は成り立つ．

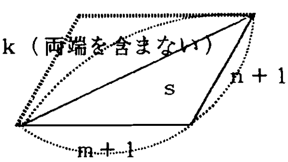


図-4

③ 一般の三角形の場合

図-2③のようなケースが考えられるが，次の図-5 の 3 つの場合を解決すればよい．方法は，②と同様である．

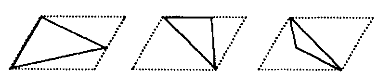


図-5

④ 面積の加法性（略）

このピックの定理からすぐわかる事実として，三角格子点を頂点にもつ三角形に関する次の 2 つの事実がある．

(1) 面積 1 の三角形は，頂点以外に内部にも辺上にも格子点をもたない．

(2) 面積 2 の三角形は，内部には格子点をもたないが辺上に頂点以外の格子点をただ 1 つもつ．

3. 正三角形定理

$(x^2 + xy + y^2 = z^2,\ \ x^2 - xy + y^2 = z^2)$

よく知られた三平方の定理は，格子の目でみると（あるいはその発見された経緯をみると），直角をはさむ 2 つの辺が格子線上にある直角三角

形の各辺に正方形（格子を形成する基本図形と同じ形）の間に成り立つ関係を示した定理であるということができる．この観点で三角格子を見ると，図-6 のような 2 つの場合における正三角形の間の関係に視点を向けることができる．

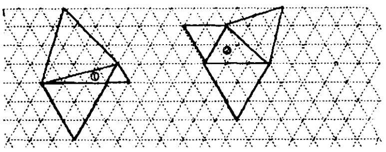
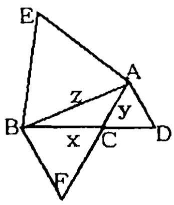


図-6

（正三角形の定理１）
右の図の三角形ＡＢＣにおいて，∠ＡＣＢ＝120°
ＡＢ＝ｚ，ＢＣ＝ｘ，ＣＡ＝ｙ とすると，

$$x^2+xy+y^2=z^2$$

である．
（余弦定理の特殊ケース）



これは余弦定理の特殊ケースであるが，次のようにして初等的に示せる．まず，正三角形の面積はその 1 辺が基本正三角形の 1 辺の x 倍であるとき，（基本正三角形の面積は 1 としたから）x^2 で与えられる[8]．したがって，図-7 より容易にわかる．（面積の平行移動がポイント）

この考えは三角格子を利用した面積の平行移動であるが，これは頂点が必ずしも三角格子点でない三角形（120°をはさむ 2 辺の比が整数比とは限らない三角形）へ拡張できる．

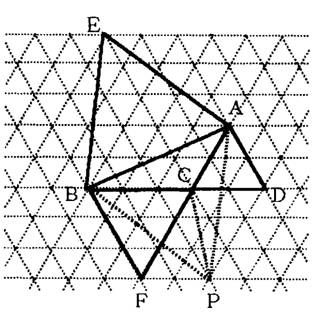
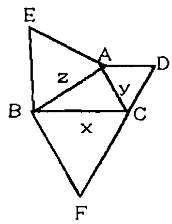


図-7

（正三角形の定理２）
右の図の三角形ＡＢＣにおいて，∠ＡＣＢ＝60°，ＡＢ＝ｚ，ＢＣ＝ｘ，ＣＡ＝ｙ とすると，

$$x^2-xy+y^2=z^2$$

である。
（余弦定理の特殊ケース）



これも，余弦定理の特殊ケースであるが，次のようにして初等的に示せる．上の定理 1 が面積の平行移動で解決できたのに対し，この定理 2 は図-8 より容易にわかるように面積の回転移動で解決できる．平行移動や回転移動という基本的な操作で問題解決ができるところにこの素材のよさの一端がうかがえる．

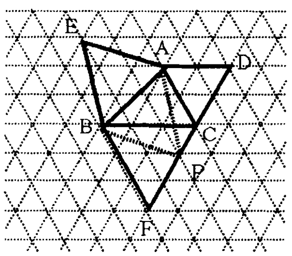


図-8

3, 4, 5 や 5, 12, 13 などのような直角三角形の 3 辺を構成する整数の組はピタゴラス数と呼ばれ，よく知られており，教材化もされてきている．そこで，ここの正三角形の定理を満たす整数の組を考えてみる．数論的考察による解は，次で与えられる．

$x^2+xy+y^2=z^2$ の整数解（＊）
$(x, y)=1$[9] を満たす整数解は

$$x=\frac{3m^2-2mn-n^2}{4},\quad y=mn,$$

$$z=\frac{3m^2+n^2}{4}$$

で与えられる．ただし，m, n は次の条件を満たす整数である．

1)　$(3m, n)=1$

2) ①　m, n はともに奇数，または

②　m, n はともに偶数かつ $\dfrac{m-n}{2}$ は奇数

$x^2 - xy + y^2 = z^2$ の整数解

$(x, y) = 1$ を満たす整数解は

$$x = \frac{3m^2 + 2mn - n^2}{4},\quad y = mn,$$

$$z = \frac{3m^2 + n^2}{4}$$

で与えられる．ただし，m, n は（＊）の条件 1)，2) を満たす整数である．

それぞれの具体的な数値例は，5，3，7；7，8，13 と 1，1，1；5，8，7 などである．ピタゴラス数の場合，興味あるいくつかの系列があるが，この場合にも似たような系列がいくつかある（資料-1 参照）．また，この x を求める式の分子は因数分解できるので具体的な数値計算も容易にできるであろう．一方，$x^2 + xy + y^2 = z^2$（☆）の整数解と $x^2 - xy + y^2 = z^2$ の整数解（☆☆）の関係に目を向けると，図-9 からわかるように次の関係がある（資料-2 参照）．

①　(a, b, c) が（☆）の解ならば，$(a, a+b, c)$ および $(b, a+b, c)$ は（☆

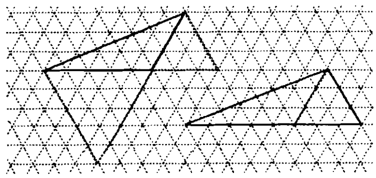


図-9

ピタゴラス数			$x^2+xy+y^2=z^2$			$x^2-xy+y^2=z^2$		
3	4	5	3	5	7	3	8	7
5	12	13	5	16	19	5	21	19
7	24	25	7	33	37	7	40	37
9	40	41	9	56	61	9	65	61
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	35	37	12	20	28	12	32	28
16	63	65	16	39	49	16	55	49
20	99	101	20	64	76	20	84	76
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ピタゴラス数：

$2n+1,\ 2n(n+1),\ 2n(n+1)+1$

$4n,\ (2n-1)(2n+1),\ (2n-1)(2n+1)+2$

$x^2 + xy + y^2 = z^2$：

$2n+1,\ n(3n+2),\ n(3n+2)+n+1$

$2n+1, (n+1)(n-1), (n+1)(n-1)+(n+2)$

$4n, (n-1)(3n+1), (n-1)(3n+1)+2(n+1)$

$x^2 - xy + y^2 = z^2$：

$2n+1,\ (n+1)(3n+1),\ (n+1)(3n+1)-n$

$2n+1,\ n(n+2),\ n(n+2)-(n-1)$

$4n, (n+1)(3n-1), (n+1)(3n-1)-2(n-1)$

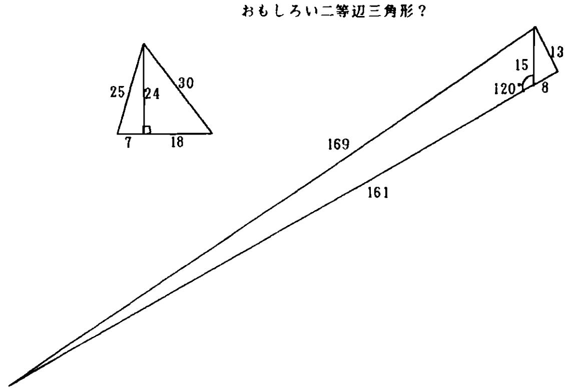
資料-1

$x^2 + xy + y^2 = z^2$ および $x^2 - xy + y^2 = z^2$ の整数解

$(1 \leqq x \leqq y,\ (x,\ y) = 1,\ z \leqq 100)$

$x^2+xy+y^2=z^2$ の整数解			$x^2-xy+y^2=z^2$ の整数解					
x	y	z	x	y	z	x	y	z
3	5	7	1	1	1			
7	8	13	3	8	7	5	8	7
5	16	19	7	15	13	8	15	13
11	24	31	5	21	19	16	21	19
7	33	37	11	35	31	24	35	31
13	35	43	7	40	37	33	40	37
16	39	49	13	48	43	35	48	43
9	56	61	16	55	49	39	55	49
32	45	67	9	65	61	56	65	61
17	63	73	32	77	67	45	77	67
40	51	79	17	80	73	63	80	73
11	85	91	40	91	79	51	91	79
19	80	91	11	96	91	85	96	91
55	57	97	19	99	91	80	99	91

おもしろい二等辺三角形？



資料-2

☆）の解である．

② (a, b, c) が（☆☆）の解ならば，
$(a, b-a, c)$ は（☆）の解である．
ただし，$b \geqq a$ とする．

4. 正三角形の面積と数

中学3年生の平方根の指導のところで，格子点を利用して面積2の正方形を作り $\sqrt{2}$ の導入などをするのをよくみかける．また，ピックの定理や三平方の定理と絡め，いろいろな正方形を作りその構造を考察することも考えられる．ここでは，三角格子でいろいろな正三角形を作ることを考察してみる[10]．その視点としては，次の2つがある．

(1) かってな正三角形を作り，その面積を求めること．

(2) 面積を先に与え，その面積をもつ正三角形を作ること．

（1） かってな正三角形を作り，その面積を求めること

ここでの問題は，正三角形の作り方と面積の求め方である．この2つは密接に関係している．すなわち，作り方を検討していくことにより面積の求め方が浮かび上がってくる．言い換えると，作図という操作活動を行うことによって，三角格子における正三角形の面積を求める方法を構成することができる．正三角形の作り方は図-10に示すとおりである．

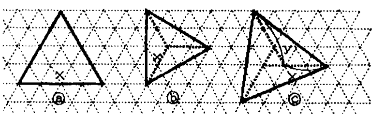


図-10

面積の求め方は，求めるだけならピックの定理を利用して求める方法など多くの方法がある．しかし，ピックの定理を利用して求める方法は正三角形の形が大きくなったりすると数えるのが煩雑になり，また後の構成するということを考えると必ずしも有効とばかりはいえなくなる．したがって，上記の正三角形を作ることから構成される求め方を考察することは有意義である．図-10からわかる面積の求め方は次のとおりである．

ⓐタイプの面積……　x^2

ⓑタイプの面積……$3x^2$

ⓒタイプの面積……$3xy + (y-x)^2$
$= x^2 + xy + y^2$

これらが正三角形の定理と関係することはいうまでもない．

（2） 面積を先に与え，その面積をもつ正三角形を作ること

（1）の考察からわかるように，与えられる面積 n が平方数か平方数の3倍ならばすぐに面積 n の正三角形は作図することができる．

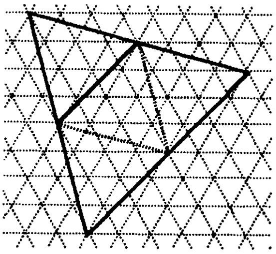


図-11

また，図-11からもわかるように，n が k^2m の形の数であれば，面積 m の正三角形の作図に帰着できる．したがって，問題は n が相異なる素数の積にかけているときの作図の方法である．このときは，正三角形の定理あるいは図-10ⓒを利用することになる．すなわち，$x^2 + xy + y^2 = m$ を満たす整数 x, y を求めることである．x, y に整数をいろいろ与えて作図をしていくと，作図できる面積と作図できない面積があることに気がつく．そこで作図できない面積をよくながめていくとその中には，あるタイプの数が含まれていることがわかる[11]．すなわち，2, 5, 8, 11, …などである．これらの数は $3k+2$（3で割ったとき余りが2）のタイプの数である．実際 $m=3k+2$ のとき，$x^2 + xy + y^2 = m$ を満たす整数 x, y が存在しないことは，3で割ったときの余りの計算や3を法とする合同式の計算を試みることにより容易にわかる[12]．一方，$3k+1$ のタイプの数の面積は作図できる場合と作図できない場合があるが，それぞれを因数分解して素因数の形を調

べてみると次のことがわかる．簡単のため，n は相異なる素数の積にかけているとする．

(1)　n の素因数の中に $3k+2$ のタイプの素数が含まれているときは，面積 n の正三角形は作図できない．

(2)　n が $3k+1$ のタイプの素数あるいは n の素因数がすべて $3k+1$ のタイプの素数のときは，面積 n の正三角形が作図できる[13]．

これらの事実（予想）は正しいがこれをきちんと証明しようとすると，数論における平方剰余の理論が必要となる．具体的な数（例えば 10)の面積をもつ正三角形が作図できないことは x, y を 1 から 3 まで変化させて調べるとわかる．

5. 数　の　系　列

数学的な考え方の育成の観点から数を数えるとか数の系列から一般化するといったことがよくなされる．ここでは，三角格子の中にある数の系列について考察する．いろいろな形を構成できるが，ここでは形を三角形に限ることにする．

（1）正三角形と数の系列

まず，すぐに見出せる数の系列は図-12 の三角数であろう．

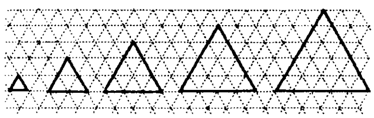


図-12

この図-12 は数える観点にたったとき，連続奇数と平方数の関係を見事に表現している．さらに，図-13，図-14 などの系列が考えられる．

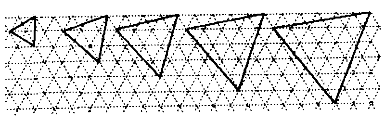


図-13

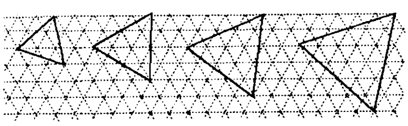


図-14

また，別の観点からみると次の図-15 のような系列も作ることができる．

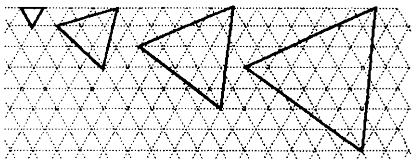


図-15

（2）三角形と数の系列

形を三角形ということで数の系列を考えると倍数パターンを含め，いろいろなパターンを構成できる．

①　倍数パターン

$$n = n \times 1 = 1 \times n$$

だから，倍数パターンは容易に構成できる．特に，偶数パターンは図-17 のように直角三角形で表現できる．

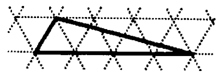


図-16

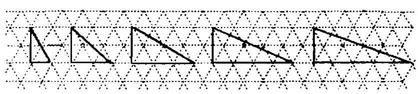


図-17

②　$an+b$ のパターン $(1 \leqq b < a)$

整数はいろいろな集合に類別できるが，その中で重要な類別は余りの考えによる類別であろう．この余りの考えは現代化の時代には剰余系として中学校に導入されていたが，扱い方が形式的であったためか定着しなかった．しかし，余りの考えが消えたことは残念である．いい意味での復活を期待したい．まず，奇数パターンは図-18 のように例えば二等辺三角形で与えることができる．

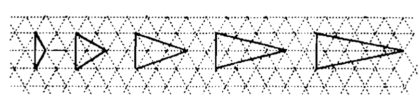


図-18

さらに，図-19 は $3n+1$ のパターンである．

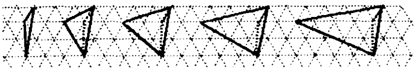


図-19

また，$3n+2$ のパターンは図-20 で与えられる．

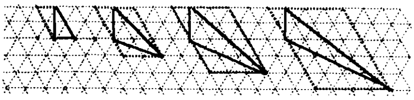


図-20

このようにしていくつかのパターンを見つけることができるとそれらを分析していくことにより，いろいろなパターンを構成していくことができる．その結果一般に，$an+b$ のパターンは例えば図-21 を用いて構成することができる．さらに $an-1$ のパターンは図-22 を用いて構成することもできる．

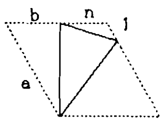


図-21

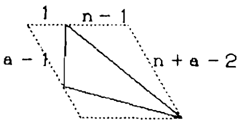


図-22

これらはまた，与えられた面積をもつ三角形の作図の方法の 1 つを示している．

③　n^2+an+b のパターン

数列の観点からみると，上の ①, ② は等差数列のケースである．一方，図-13 から図-15 は階差数列が等差数列である例である．そこでここでは，階差数列が公差 2 の等差数列であるパターン，すなわち n^2+an+b のタイプについて考察してみる．

まず，2 つの例をあげる．

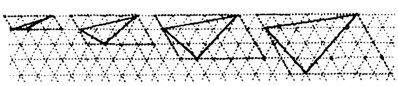


図-23

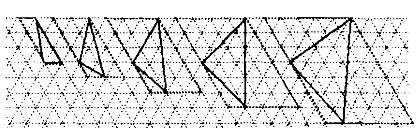


図-24

これらの例からわかることは，等差数列をなしている図は 1 次元的な広がりをしているのに対し，これらのパターンは 2 次元的な広がりをしており，複雑になっているが n の次数を考えるとうなずける結果ではある．また，図-13 から図-15 や図-23，図-24 などから考察していくと，一般に n^2+an+b のパターンは次の図-25 のようにして作図できることがわかる．さらに，$a \geqq b$ のときは，図-26 のようにしても作図できる．

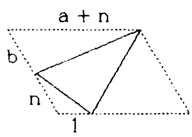


図-25

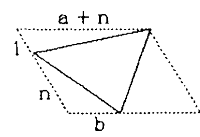


図-26

このように三角格子はいろいろな数列の視覚化に有効に働く．

6.　三平方の定理とその一般化

三平方の定理の導入および理解のために格子点を利用することはよく使われる方法である．また，今井[14]は格子点や三角格子点を用い，直角三角形と各辺を含む相似な図形を描きそれらの図形の間の関係を発見することをねらっている．面積を求める方法をみると格子点ではピックの定理を用いているのに対し，三角格子点では用いた形跡がない．さらに，扱われている直角三角形は 30°，60°，90°のみである[15]．ここでは，三角格子におけるピックの定理の応用という視点と三角格子の構造の視点から，三平方の定理とその一般化を考察する．三平方の定理を三角格子の上で表現すると図-27 になる．

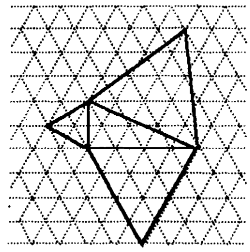


図-27

いろいろな直角三角形について，ピックの定理や先の正三角形の面積の求め方などを用いて 3 つの直角三角形の面積の関係を導き出していくことができる．特に次の図-28 のような 30°，60°，90°の直角三角形のときは，図的な処理もできる．

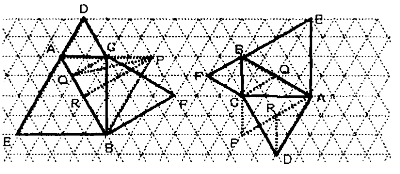


図-28

三平方の定理の一般化について，今井は三角格子点を用いてひし形と正六角形を，格子点を用いていくつかの例を取り上げている[16]．ここでは，今井の例も含め，いくつかの例を図-29 に上げて三角格子の機能を示す．

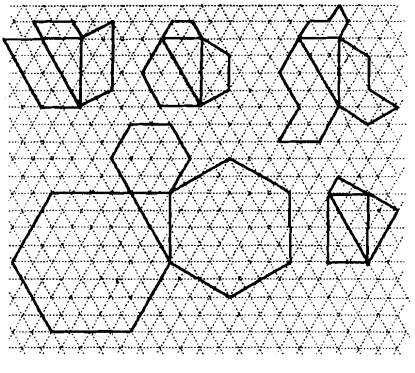


図-29

ピックの定理や 2 辺が三角格子線上にある面積の求め方などを有効に利用して面積を比較的簡単に求めることができ，3 つの相似な図形の面積の関係を調べることができる．また，相似な形を自然に多く作図できる．さらに格子と併用すれば，一般化の視点での有効性が増大する．

7. 結　　語

素材としての三角格子の働きを探り，その効用を見出すことを目的として考察してきたが，その結果以下のことを明らかにできた．

（1） 基本となる正三角形の面積を 1 と見ることにより，三角格子においてもピックの定理が成立する．

（2） ピックの定理あるいは面積の平行移動や回転移動を利用することにより，正三角形定理と名付けた余弦定理の特殊ケースが成立することがわかる．これは，頂点が三角格子点でない同様の三角形への発展を含んでいる．

（3） $x^2+xy+y^2=z^2$ の整数解と $x^2-xy+y^2=z^2$ の整数解の構造が三角格子を用いると見えてくる．

（4） 正三角形の面積を考察することにより，その中には素因数分解や余りの考えなど数に対するいろいろな見方や考え方ができ，統合するとかある観点で分析するとかなどの数学的思考の育成が期待できる．

（5） 三角形の系列を考えることにより，いろいろな数の系列を構成できる．特に，倍数パターンや余りのパターンが構成できるので内容的には等差数列の指導に効果が期待できる．また，階差数列が等差数列である数列の指導にも利用できる．

（6） 三平方の定理の導入や一般化，特に一般化への発展の素材として有効である．

（7） 図形の移動（平行移動，回転移動，対称移動）や相似の指導に有効である．特に，面積の等しい多くの三角形を作図できる．

（8） 創造的活動を行い，数学的な考え方（特に思考法としての）を育成する素材として有効である．

今後の課題としては，この素材としての多くの有効性の実証的研究がある．さらに，いろいろな形作りや平方根の作図などへの素材としての可能性の追求が残されている．

参考文献および注

1） ここにあげた例はよく知られているが，筆者が教材研究等でよく取り上げている内容である．
2） 今井敏博：動機づけのための数学的活動—規則性の発見，一般化について—，日本数学教育学会誌　数学教育，第 70 巻　第 9 号，pp. 19-31 (1988).
3） 河田敬義："数論 I"，岩波講座 基礎数学 代数学VI，岩波書店 (1978).

4) 小高俊夫："算数・数学問題の探求と解決課程—方眼紙のファンタジー"，授業のための数学シリーズ，東洋館（1983）.
5) 三角格子におけるピックの定理が成立するという事実は，「Christopher Polis, Pick's theorem extended and generalized, Mathematics Teacher, 1991, Vol. 84, No. 5, pp. 399-401.」に示されている.
6) 前掲 4)，pp. 181-183.
7) 前掲 4)，pp. 182-183.
8) 相似比と面積比の関係の把握が必要である.
9) $(x, y) = 1$ は，x と y が互いに素であることを示す．任意の解は互いに素である解を用いて求めることができる．すなわち，任意の解は $(x, y) = 1$ となる解 (x, y, z) を用いて，(dx, dy, dz) と書くことができる.
10) 以降，単に正三角形とか三角形ということで，三角格子点を頂点とする正三角形や三角形を表すことにする.
11) 数のタイプを見分けるには，素因数分解の考えや余りの考えになれていることが必要である．逆にいえば，三角格子などを利用して素因数分解の考えや余りの考えの活用やよさを感得させていくことになる.
12) $x^2 + xy + y^2 = m$（☆）は変形すると次の式になる.

$$(2x + y)^2 + 3y^2 = 4m \quad (☆☆)$$

任意の整数の平方は 3 で割ると余りは 0 または 1 であるから，もし（☆）に整数解 x, y があれば（☆☆）の両辺を 3 で割った余りを考えると左辺は 0 か 1 となり，右辺は 2 となる．これは矛盾である.
13) $a^2 + ab + b^2 = m,\quad x^2 + xy + y^2 = n$
とするとき，

$$X = ax - by,\quad Y = bx + by + ay$$

とおくと

$$X^2 + XY + Y^2 = mn$$

となる．したがって，$3k + 1$ のタイプの素数に対する面積の作図ができれば，これらの積に対する面積の作図も理論的にはできることになる.
14) 前掲 2).
15) 前掲 2)，p. 24，図-15.
16) 前掲 2)，p. 25，図-16，17（三角格子点），図-22（格子点）.