

# 周期的通信制約をもつネットワーク化制御系のモデル化と構造的性質

河野 通夫\*・鈴木 達雄\*\*・高橋 伸弥\*・佐藤 治\*

## Modeling of a Networked Control System

with Periodic Communication Constraints and Its Structural Properties

Michio KONO\*, Tatsuo SUZUKI\*\*, Nobuya TAKAHASHI\* and Osamu SATO\*

This paper proposes a new model for a networked control system and considers its structural properties such as controllability, stabilizability, reconstructibility and detectability. To control a linear time-invariant discrete-time plant via a bus with limited capacity, we introduce a hold device and a communication sequence which follows a given  $\omega$ -periodic pattern. Incorporating the communication sequences and hold devices into the original plant amounts to extending the original time-invariant state equation to the  $\omega$ -periodic one which has the higher order. We assume that the communication sequence is admissible. It is shown that controllability and stabilizability of the plant are preserved in the periodic extended system under the assumption that the zeros of the communication characteristic polynomial does not coincide with  $\lambda^{1/\omega}$  where  $\lambda$  is the eigenvalue of the plant. On the other hand, reconstructibility(detectability) of the original plant implies that the periodic observability pair of the extended one is reconstructible(detectable) at any time.

**Key Words:** networked control system, periodic system, controllability and stabilizability, reconstructibility and detectability

### 1. はじめに

ネットワーク化制御系(NCS)に関して多くの研究が行なわれてきたが、NCSのシンプルなモデルの構造的性質(可制御性など)を調べることは、NCSの制御性能の限界を知る上で重要であろう。特にプラントの構造的性質がNCSにおいて保存されるかどうかは興味深い。本稿で扱っているのは、プラントの入力と出力の数が利用できる通信バスの数より多いために一部の入出力信号しかデータのやりとりができない場合、事前に決められた順序で周期的にデータのやりとりをする制御方式である。このモデルは、Brockettが最初に提案し、静的な出力フィードバックによる安定化を考察しているが<sup>1)</sup>、これはよく知られているように未解決の問題で、NP-困難であるかどうかさえわかっていない<sup>2)</sup>。HristuはBrockettのアイデアを具体化し、プラントにスイッチ、ホールド回路およびネットワークを付加したモデルを状態空間で表現し、出力フィードバックゲインをSimulated annealing法によって求めているが<sup>3)</sup>、その結果は必ずしも良好とはいえない。新

明らはHristuと同じ数値例に対し、別のアルゴリズムを用いてHristuよりも良い結果を得ているが<sup>4)</sup>、これらのアプローチはいずれも数値計算の手法に頼らざるを得ない。

一方、山本らは静的出力フィードバックに限定せず、同次元オブザーバと周期時変状態フィードバックから構成されるコントローラで安定化することを提案した<sup>5)</sup>。また、藤岡らはサンプル値制御理論を用いて安定性のみならず、入出力特性を改善するような動的コントローラを設計する手法を提案した<sup>6)</sup>。さらに著者らは、山本らと同じモデルに対し、より少ない通信容量で構成できる出力サンプルホールド制御<sup>7)</sup>を適用した<sup>8)</sup>。本稿では、山本らのモデルをより自然な形に修正したモデルを提案するとともに、プラントの構造的な性質(可制御性、可安定性、可再生性、可検出性)がNCSにおいて保存される条件を明らかにする。

### 2. NCSにおいてホールド回路を挿入することの意義

本稿で扱うようなNCSにおいては、データのやりとりができないチャンネルについては、ゼロ入力(ゼロ出力)にするか、ホールドをかけるしか方法がない。従来の研究においては、ホールド回路を挿入したものがほとんどであるが、その意義については十分な説明がなされていない。

本章では、パケット落ちに注目して、簡単な例についてホールド回路の挿入が有効なことをシミュレーションによって示す。

ここでは、NCSにおけるパケット落ちを通常のフィードバック制御系における入力あるいは出力の瞬断と同じ現象で

\* 宮崎大学工学部 宮崎市学園木花台西 1-1

\*\* 岐阜大学工学部 岐阜市柳戸 1-1

\* Faculty of Engineering, University of Miyazaki, 1-1 Gakuenkibanadai-nishi, Miyazaki

\*\* Faculty of Engineering, Gifu University, 1-1 Yanagido, Gifu

(Received June 29, 2009)

(Revised October 29, 2009)

あると考え、入力の一瞬断について検討を行なった。

**Fig.1** のシステムを考える。本システムは定値外乱  $d$  が印加されるスカラープラントに対して、閉ループシステムの極が 0.2 および 0 となるように 1 型のサーボ系を構成したものである。また、図中に示すように、プラントの入力側の Blackout point において瞬断が起こるものとした。

以降のシミュレーションでは、初期値を  $x(0) = 0, u(0) = 0$  とし、外乱は  $d = 0.5$ 、目標値は  $r = 2$  とした。

まず、入力瞬断がない場合における出力および入力の時間応答を **Fig.2** に示す。出力は  $t = 4$  程度で目標値に追従しており、定値外乱の影響を打ち消すために入力は定常状態でオフセットしている。

つぎに、時刻  $t = 3$  および  $t = 10$  で入力に瞬断が起こると仮定とする。なお、瞬断時刻は **Fig.2** において入力が過渡状態にある場合および定常状態ある場合を考慮して、それぞれの代表的時点として選んだものである。

**Fig.3** は入力の一瞬断に対してプラントへの入力を瞬断前の値でホールドさせた場合、すなわちホールド入力の場合の時間応答である。これに対して、**Fig.4** は入力の一瞬断に対してプラントへの入力をゼロにした場合、すなわち、ゼロ入力の場合の時間応答である。これらの図より、 $t = 3$  の時点ではホールド入力およびゼロ入力の両ケースにおいて出力応答に乱れが生じているが、 $t = 10$  の時点ではゼロ入力のケースにのみ出力応答の乱れが生じていることがわかる。

このシミュレーション結果より、入力瞬断時のホールド入力およびゼロ入力の出力応答への影響に関して以下のことが結論できる。

- (1) 入力が過渡状態にあるときに瞬断が起こった場合には、入力瞬断がない場合に印加されるべき入力値と比較して差が小さいほうが出力応答への影響が小さい。すなわち、ホールド入力とゼロ入力のどちらが有効かについては一概に結論できない。
- (2) 入力がゼロでない定常状態にあるときに瞬断が起こった場合には、ホールド入力のほうが出力応答への影響が小さいという観点で有効である。ただし、入力がゼロで定常状態にあるときに瞬断が起こった場合にはホールド入力でもゼロ入力でも出力応答への影響は同じである。

本シミュレーションは簡単な例ではあるが、入力瞬断時におけるホールド入力とゼロ入力の効果の差異を端的に表わしている。特に実際の制御の場面では、(2) の観点でのホールド入力の効果は大きく、かつ重要である。これに対して、ゼロ入力の場合は、モデルや解析の簡便さについて指摘されてはいるものの<sup>9)~13)</sup>、出力応答への影響の観点でホールド入力に対する優位性は現状みられない。よって、NCS においてホールド回路を挿入する意義は十分にあると考える。

### 3. 周期的通信制約をもつシステムのモデル化

プラントは線形時不変離散時間システムであるとし、その状態空間表現を

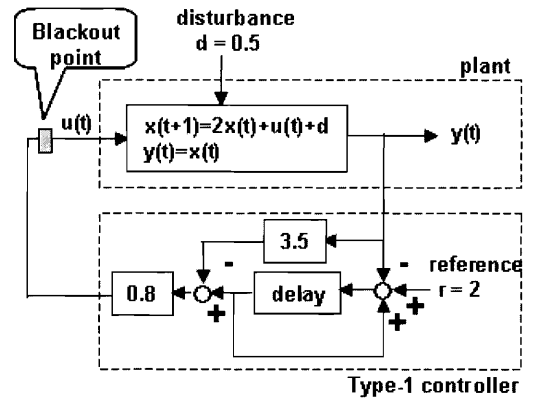


Fig. 1 Servo system with type-1 controller

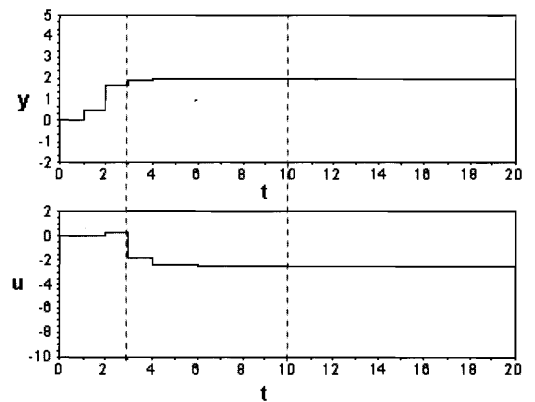


Fig. 2 Time response of the system Fig.1

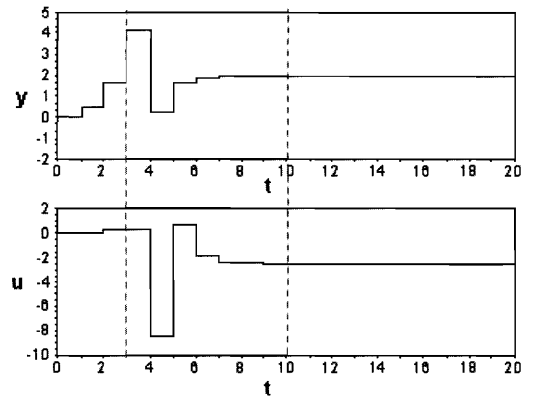


Fig. 3 Time response with hold input strategy

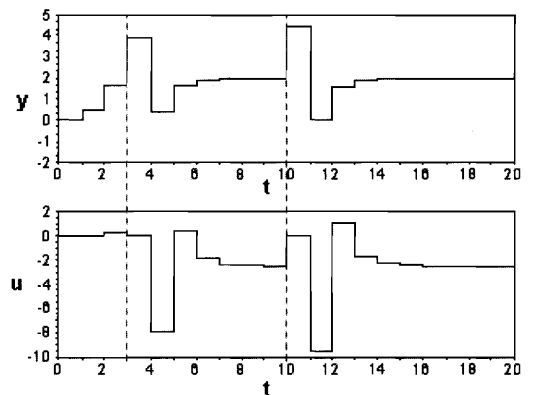


Fig. 4 Time response with zero input strategy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

とする。ここで、 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  は状態、 $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  は入力、 $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$  は出力を表わす。また、 $\mathbf{A}$  はゼロ行列でないことと仮定しておく。この仮定は離散時間システムにおいて物理的に意味のないシステムを除外するために設けるものであり、以降の理論や定理および、その証明などに影響を与えるものではないことを注意しておく。なお、この仮定は通常は暗黙の了解事項となっていることにも注意する。

このプラントに通信バスを介してコントローラを接続し、制御することを考える。通信バスに容量の制約があるため、コントローラからプラント入力への信号を一度に送ることができず、一部だけ送信する。信号が送られて来ない入力  $u_i$  については、つぎの信号が来るまでホールドされる。また、プラントからコントローラへ送られる信号も一部だけ送信され、それ以外の信号は更新されるまでホールドされる。以下では、送信のパターンが周期的である場合を扱う。各成分が1または0である周期  $\omega$  の  $m$  次元ベクトル列  $\sigma_c(t)$  によってどの入力が更新されるかを示す。 $\sigma_c(t)$  の第  $i$  成分が1であれば、 $t$  時刻において  $i$  番目の入力が更新され、また、0であれば更新されないとする。同様に、各成分が1または0である周期  $\omega$  の  $p$  次元ベクトル列  $\sigma_o(t)$  によって、更新される出力ベクトルの要素を示す。これらは通信列とよばれる。

**【定義 1】**<sup>3)</sup> 入力(出力)のバスの本数の制約を  $b_c < m$  ( $b_o < p$ ) と仮定しよう。通信列  $\sigma_c(t)$  ( $\sigma_o(t)$ ) が許容可能であるとは、つぎの2つの条件を満たす場合をいう。

- i)  $\|\sigma_c(t)\|^2 \leq b_c$  ( $\|\sigma_o(t)\|^2 \leq b_o$ ),  
 $t = 0, 1, \dots, \omega - 1$
- ii)  $\text{span}[\text{diag}(\sigma_c(0)), \text{diag}(\sigma_c(1)), \dots,$   
 $\text{diag}(\sigma_c(\omega - 2)), \text{diag}(\sigma_c(\omega - 1))] = \mathbf{R}^m$   
( $\text{span}[\text{diag}(\sigma_o(0)), \text{diag}(\sigma_o(1)), \dots,$   
 $\text{diag}(\sigma_o(\omega - 2)), \text{diag}(\sigma_o(\omega - 1))] = \mathbf{R}^p$ )

ただし、 $\|\cdot\|$  はユークリッドノルム、 $\text{diag}(\mathbf{x})$  はベクトル  $\mathbf{x}$  の成分を対角成分としてもつ対角行列を表わす。

かつてカルマンらは、連続時間プラントにサンブラとホールド回路を付加して離散化したとき、元のプラントが可制御であっても必ずしも離散時間システムは可制御にならないということを指摘した<sup>14)</sup>。これに類似な現象がNCSにおいても出現する。すなわち、通信列が許容可能であっても、NCSが不可制御になることがある。このことについては、4章の定理1の証明のあとに、あらためて述べる。

NCSの可制御性を保証するための条件を与えるために通信列行列、通信列行列多項式、通信列特性多項式を導入する。

$t \geq s$  に対し、通信列からつぎのように通信列行列を構成する。

$$E_*(t, s) = \prod_{j=s}^t (\mathbf{I} - \text{diag}(\sigma_*(j))) \quad (2)$$

\* は  $c$  または  $o$  を意味する。通信列行列は対角行列であ

り、更新された時刻以降の当該信号の変化を表わす。また、 $E_*(t + \omega, s + \omega) = E_*(t, s)$  であることに注意しよう。この行列を用いて、過去にホールドされた入力を含め、実際にプラント(コントローラ)に入る信号を表現するために不定元  $\mu$  をもつ通信列行列多項式  $G_*(\mu)$  を導入する。

$$\begin{aligned} G_*(\mu) &= \sum_{l=0}^{\omega-1} \{ \mu^{\omega-1} \mathbf{I} + \mu^{\omega-2} E_*(l+1, l+1) \\ &+ \mu^{\omega-3} E_*(l+2, l+1) + \dots + \mu E_*(l+\omega-2, l+1) \\ &+ E_*(l+\omega-1, l+1) \} \text{diag}(\sigma_*(l)) \end{aligned} \quad (3)$$

当然ながら、 $G_*(\mu)$  は対角行列であり、その対角成分  $g_{*i}(\mu)$  は、高々  $\omega - 1$  次の多項式である。 $g_*(\mu) = \det G_*(\mu)$  を通信列特性多項式とよぶ。つぎの補題は自明である。

**【補題 1】** 通信列特性多項式  $g_*(\mu)$  のゼロ点を  $\mu_i$  としよう。通信列行列多項式  $G_*(\mu)$  が正則になるための必要十分条件は  $\mu \neq \mu_i$  である。

(注意) 通信列  $\sigma_*(t)$  が許容可能でない場合は、 $g_*(\mu)$  は恒等的に0になり、 $G_*(\mu)$  は正則になり得ない。また、補題1は通信列が許容可能な場合にはほとんどすべての  $\mu$  に対して  $G_*(\mu)$  が正則になることを示している。すなわち、通信列が許容可能な場合には  $G_*(\mu)$  の正則性は generic<sup>15)</sup> である。

**【例題】** 2入力で  $b_c = 1$  の場合を考えよう。 $\omega = 2$ 、通信列を  $\sigma_c(0) = [1 \ 0]^T$ 、 $\sigma_c(1) = [0 \ 1]^T$  としたとき、この通信列は許容可能である。通信列行列は

$$E_c(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_c(2, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_c(2, 2) = E_c(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_c(3, 2) = E_c(1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、(3) 式を計算すると、

$$G_c(\mu) = \begin{bmatrix} \mu + 1 & 0 \\ 0 & \mu + 1 \end{bmatrix}$$

となり、 $\mu \neq -1$  のとき、 $G_c(\mu)$  は正則になる。

時刻  $t$  で更新された入力および出力をそれぞれ  $\mathbf{u}_t(t)$ 、 $\mathbf{y}_t(t)$  とすると、時刻  $t$  での入力  $\mathbf{u}(t)$  および  $\mathbf{y}_t(t)$  はつぎのように表現できる。

$$\mathbf{u}(t) = \text{diag}(\sigma_c(t))\mathbf{u}_t(t) + (\mathbf{I}_m - \text{diag}(\sigma_c(t)))\mathbf{u}_t(t-1),$$

$$\mathbf{y}_t(t) = \text{diag}(\sigma_o(t))\mathbf{y}_t(t) + (\mathbf{I}_p - \text{diag}(\sigma_o(t)))\mathbf{y}_t(t-1)$$

ただし、 $\mathbf{I}_m$  は  $m$  次の単位行列である。逐次代入により、以下の等価表現を得る。

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{s=t-\omega+1}^t D_c(t, s)\mathbf{u}_t(s), \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_t(t) = \sum_{s=t-\omega+1}^t D_o(t, s)\mathbf{y}_t(s) \quad (5)$$

ただし,

$$D_*(t, t) = \text{diag}(\sigma_*(t)),$$

$$D_*(t, s) = E_*(t, s+1)\text{diag}(\sigma_*(s)), \quad t > s \quad (6)$$

である. また,  $D_*(t, s) = O$  ( $s = t - \omega, t - \omega - 1, \dots$ ) であることに注意する. 観測値として  $\mathbf{y}_i(t)$  および  $\mathbf{u}_i(s)$  ( $s = t - 1, t - 2, \dots, t - \omega + 1$ ) が利用できることを考慮し, 観測出力を以下のように定義する.

$$\mathbf{y}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{u}_i(t-1) \\ \mathbf{u}_i(t-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(t-\omega+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{e11}(t) & O_{p \times m(\omega-1)} \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & I_{m(\omega-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t-\omega+1) \\ \mathbf{u}_i(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(t-\omega+1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし,

$$C_{e11}(t) = [D_o(t, t)C, D_o(t, t-1), \dots, D_o(t, t - (\omega - 1))] ]$$

である.

(注意) 文献8)では,  $\mathbf{u}_i(s)$  ( $s = t - 1, t - 2, \dots, t - \omega + 1$ ) を観測出力として利用していない.

ここで, 拡大系の状態ベクトルを以下で定義する.

$$\mathbf{x}_e(t) := \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{y}(t-1) \\ \mathbf{y}(t-2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(t-\omega+1) \\ \mathbf{u}_i(t-1) \\ \mathbf{u}_i(t-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(t-\omega+1) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n_e}, \quad (8)$$

$$n_e := n + (p + m)(\omega - 1)$$

(4) 式を (1) 式に代入すると,

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \sum_{s=t-\omega+1}^t D_c(t, s)\mathbf{u}_i(s)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}D_c(t, t)\mathbf{u}_i(t)$$

$$+ [\mathbf{B}D_c(t, t-1), \mathbf{B}D_c(t, t-2), \dots,$$

$$\mathbf{B}D_c(t, t-\omega+1)] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(t-1) \\ \mathbf{u}_i(t-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i(t-\omega+1) \end{bmatrix} \quad (9)$$

となる.

(注意) 文献5), 8)では, 拡張ベクトルの要素に  $\mathbf{x}(s)$  ( $s = t - 1, t - 2, \dots, t - \omega + 1$ ) を用いているが, 実際には  $\mathbf{y}(t)$  にホールドをかけているので,  $\mathbf{y}(s)$  ( $s = t - 1, t - 2, \dots, t - \omega + 1$ ) を用いるほうが自然である.

このとき, (9), (7) 式を (8) 式に基づいて表現すると以下の  $\omega$ -周期係数離散時間システムを得る.

$$\mathbf{x}_e(t+1) = \mathbf{A}_e(t)\mathbf{x}_e(t) + \mathbf{B}_e(t)\mathbf{u}_i(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{y}_e(t) = \mathbf{C}_e(t)\mathbf{x}_e(t)$$

ただし,

$$\mathbf{A}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{e11} & \mathbf{A}_{e12}(t) \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & \mathbf{A}_{e22} \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{matrix} \} n+p(\omega-1) \\ \} m(\omega-1) \end{matrix} \right\} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_{e11} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & O_{n \times p} & \dots & \dots & \dots & O_{n \times p} \\ \mathbf{C} & O_{p \times p} & \dots & \dots & \dots & O_{p \times p} \\ O_{p \times n} & \mathbf{I}_p & O_{p \times p} & \dots & \dots & O_{p \times p} \\ \vdots & O_{p \times p} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{p \times n} & O_{p \times p} & \dots & O_{p \times p} & \mathbf{I}_p & O_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_{e12}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}D_c(t, t-1) & \dots & \mathbf{B}D_c(t, t-\omega+1) \\ O_{p(\omega-1) \times m(\omega-1)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A}_{e22} = \begin{bmatrix} O_{m \times m} & \dots & \dots & \dots & O_{m \times m} \\ \mathbf{I}_m & \ddots & & & \vdots \\ O_{m \times m} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_{m \times m} & \dots & O_{m \times m} & \mathbf{I}_m & O_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_e(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}D_c(t, t) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \\ \mathbf{I}_m \\ O_{m(\omega-2) \times m} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_e(t) = \begin{bmatrix} C_{e11}(t) & O_{p \times m(\omega-1)} \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & \mathbf{I}_{m(\omega-1)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

(注意) このモデルは, 最小次元の状態ベクトルから構成したモデルではない. しかしながら利用できる情報を最大限に使ったモデルになっているので, たとえば,  $D_*(\cdot, \cdot)$  の設定の仕方により入力あるいは出力の一方, あるいは両方のホールド回路の有無を考慮したケースが扱える. また, 制御則設

計においては、必要なフィードバック信号に対応して拡張状態ベクトルの部分状態を選びサブシステムを抽出すればよい。これらの意味で提案モデルはさまざまなケースを特殊例として取り扱うことができ、具体的に制御則設計を行なう際には、同じ枠組みで考えることが可能であり、一般性がある。このことが、本モデルを提案する理由であり、利点である。

つぎに、拡大システム (10) の遷移行列を求める。これは、

$$X_e(t, t-j+1) = I_{n_e}, \quad j=1 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} X_e(t, t-j+1) &= A_e(t-1)A_e(t-2)\cdots A_e(t-j+1), \\ j &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

と定義される。(11) 式の表現から  $X_e(t, t-j+1)$  は、

$$X_e(t, t-j+1) = \begin{bmatrix} X_{e11}(t, t-j+1) & X_{e12}(t, t-j+1) \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & X_{e22}(t, t-j+1) \end{bmatrix}$$

と分割できる。ここで、 $X_{e11}(\cdot), X_{e22}(\cdot)$  を計算しよう。 $j=2, 3, \dots, \omega-1$  に対して、

$$X_{e11}(t, t-j+1) = A_{e11}^{j-1} \begin{bmatrix} A^{j-1} & O_{n \times p} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O_{n \times p} \\ CA^{j-2} & \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \\ CA & \vdots & & & & & \vdots \\ C & O_{p \times p} & & & & & \vdots \\ O_{p \times n} & I_p & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ O_{p \times n} & \cdots & O_{p \times p} & I_p & O_{p \times p} & \cdots & O_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$X_{e22}(t, t-j+1) = A_{e22}^{j-1} \begin{bmatrix} O_{m \times m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & O_{m \times m} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ O_{m \times m} & & & & & & \vdots \\ I_m & \ddots & & & & & \vdots \\ O_{m \times m} & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ O_{m \times m} & \cdots & O_{m \times m} & I_m & O_{m \times m} & \cdots & O_{m \times m} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし、(20) 式において  $I_m$  は  $j$  番目の行ブロックに現われる。また、 $j \geq \omega$  に対して、

$$X_{e11}(t, t-j+1)$$

$$= \begin{bmatrix} A^{j-1} & O_{n \times p} & \cdots & O_{n \times p} \\ CA^{j-2} & O_{p \times p} & \cdots & O_{p \times p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA^{j-\omega+1} & O_{p \times p} & \cdots & O_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$X_{e22}(t, t-j+1) = O_{m(\omega-1) \times m(\omega-1)} \quad (22)$$

となる。 $X_{e12}(\cdot)$  は、

$$\begin{aligned} X_{e12}(t, t-j+1) &= A_{e11}^{j-2} A_{e12}(t-j+1) + A_{e11}^{j-3} A_{e12}(t-j+2) A_{e22} \\ &\quad + A_{e11}^{j-4} A_{e12}(t-j+3) A_{e22}^2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + A_{e11} A_{e12}(t-2) A_{e22}^{j-3} \\ &\quad + A_{e12}(t-1) A_{e22}^{j-2} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。

また、以上の結果よりモノドロミー行列 (1 周期分の遷移行列) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} X_e(t) &= X_e(t, t-\omega) \\ &= A_e(t-1)A_e(t-2)\cdots A_e(t-\omega) \\ &= \begin{bmatrix} X_{e11} & X_{e12}(t) \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & O_{m(\omega-1) \times m(\omega-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

ただし、

$$X_{e11} = A_{e11}^\omega = \begin{bmatrix} A^\omega & O_{n \times p} & \cdots & O_{n \times p} \\ CA^{\omega-1} & O_{p \times p} & \cdots & O_{p \times p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ CA & O_{p \times p} & \cdots & O_{p \times p} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} X_{e12}(t) &= A_{e11}^{\omega-1} A_{e12}(t-\omega) \\ &\quad + A_{e11}^{\omega-2} A_{e12}(t-\omega+1) A_{e22} \\ &\quad + A_{e11}^{\omega-3} A_{e12}(t-\omega+2) A_{e22}^2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + A_{e11} A_{e12}(t-2) A_{e22}^{\omega-2} \\ &\quad + A_{e12}(t-1) A_{e22}^{\omega-1} \end{aligned} \quad (26)$$

なお、 $A_{e22}^{\omega-1}$  はゼロ行列なので、(26) 式の最後の項はゼロ行列となることに注意する。

#### 4. 可制御性と可安定性

前章で導出した (10) 式で表わされるモデルの可制御性と可安定性<sup>16)</sup> について考察する。

つぎの補題は  $X_e(t)$  と  $A$  の固有値および左固有ベクトルの関係を与える。

**[補題 2]**  $X_e(t)$  の 0 でない固有値  $\lambda$  に対応する左固有ベクトルを  $v$  としよう。状態  $x_e(t)$  の分割に対応して  $v$  を

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_\omega, v_{\omega+1}, \dots, v_{2\omega-1}] \quad (27)$$

と分割すれば,  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}]$  となり,  $\lambda, \mathbf{v}_1$  はそれぞれ  $A^\omega$  の固有値および左固有ベクトルとなる.

(注意)  $\mathbf{v}_i$  を  $\mathbf{v}$  の成分ベクトルとよぶ.

(証明)  $\mathbf{v}$  に対応する固有値を  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ) とすれば,

$$\mathbf{v}X_e(t) = \lambda\mathbf{v} \quad (28)$$

が成立するが, (27) 式の分割を利用すれば,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_\omega, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}]X_e(t) \\ &= [\lambda\mathbf{v}_1, \lambda\mathbf{v}_2, \dots, \lambda\mathbf{v}_\omega, \lambda\mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \lambda\mathbf{v}_{2\omega-1}] \quad (29) \end{aligned}$$

と表現できる. (25) 式の形から, (29) 式の左辺第 2 列ブロックから第  $\omega$  列ブロックまではゼロ行列であり,

$$\lambda\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \lambda\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \dots, \lambda\mathbf{v}_\omega = \mathbf{0}$$

であることがわかる.  $\lambda \neq 0$  であるから,

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{v}_\omega = \mathbf{0} \quad (30)$$

となる. この結果より, (29) 式の左辺に (24), (25) 式の表現を用いると,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}] \\ & \times \begin{bmatrix} X_{e11} & X_{e12}(t) \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & O_{m(\omega-1) \times m(\omega-1)} \end{bmatrix} \\ &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \times [A_{e11}^\omega, X_{e12}(t)] \\ &= [[\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]A_{e11}^\omega, [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]X_{e12}(t)] \\ &= [[\mathbf{v}_1A^\omega, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}], [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]X_{e12}(t)] \\ &= [\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \lambda\mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \lambda\mathbf{v}_{2\omega-1}] \quad (31) \end{aligned}$$

となり, 第 1 列ブロックに注目すれば,  $\mathbf{v}_1A^\omega = \lambda\mathbf{v}_1$  が成立し,  $\lambda, \mathbf{v}_1$  は  $A^\omega$  の固有値および左固有ベクトルであることがわかる.  $\square$

つぎの補題は, 遷移行列と  $X_e(t)$  の左固有ベクトルの成分ベクトルの関係を与える.

**[補題 3]**  $X_e(t, t-j+1)$  と  $X_e(t)$  の 0 でない固有値に対応する左固有ベクトル  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}]$  に関して以下が成立する.

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}X_e(t, t-j+1)B_e(t-j) \\ &= \mathbf{v}_1\{A^{j-1}BD_c(t-j, t-j) \\ & \quad + A^{j-2}BD_c(t-j+1, t-j) \\ & \quad + \dots \\ & \quad + BD_c(t-1, t-j)\} + \mathbf{v}_{\omega+j} \quad (32) \end{aligned}$$

(証明) システムの構造に注意すると, (15), (19), (20), (23) 式より以下のように記述できる.

$$X_e(t, t-j+1)B_e(t-j)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} X_{e11}(t, t-j+1) & X_{e12}(t, t-j+1) \\ \vdots & \vdots \\ O_{m(\omega-1) \times n+p(\omega-1)} & I_m \\ & \ddots \\ & O & I_m \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} BD_c(t-j, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \\ I_m \\ O_{m(\omega-2) \times m} \end{bmatrix} \quad (33) \end{aligned}$$

上側のブロックに注目すれば,

$$\begin{aligned} & X_{e11}(t, t-j+1) \begin{bmatrix} BD_c(t-j, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & + X_{e12}(t, t-j+1) \begin{bmatrix} I_m \\ O_{m(\omega-2) \times m} \end{bmatrix} \\ &= A_{e11}^{j-1} \begin{bmatrix} BD_c(t-j, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & + \{A_{e11}^{j-2}A_{e12}(t-j+1) \\ & + A_{e11}^{j-3}A_{e12}(t-j+1)A_{e22} \\ & + \dots + A_{e12}(t-1)A_{e22}^{j-2}\} \begin{bmatrix} I_m \\ O_{m(\omega-2) \times m} \end{bmatrix} \\ &= A_{e11}^{j-1}BD_c(t-j, t-j) \\ & + A_{e11}^{j-2} \begin{bmatrix} BD_c(t-j+1, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & + A_{e11}^{j-3} \begin{bmatrix} BD_c(t-j+2, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & + \dots + \begin{bmatrix} BD_c(t-1, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \quad (34) \end{aligned}$$

となり, 下側のブロックに注目すれば

$$[\mathbf{0}_{m \times m}, \dots, \overbrace{I_m}^{(\omega+j) \text{ th block}}, \mathbf{0}_{m \times m}, \dots]^T$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}X_e(t, t-j+1)B_e(t-j) \\ &= [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \left\{ A_{e11}^{j-1} \begin{bmatrix} BD_c(t-j, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad + A_{e11}^{j-2} \begin{bmatrix} BD_c(t-j+1, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & \quad + A_{e11}^{j-3} \begin{bmatrix} BD_c(t-j+2, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \\ & \quad \left. + \dots + \begin{bmatrix} BD_c(t-1, t-j) \\ O_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix} \right\} + \mathbf{v}_{\omega+j} \\ &= \mathbf{v}_1A^{j-1}BD_c(t-j, t-j) \\ & \quad + \mathbf{v}_1A^{j-2}BD_c(t-j+1, t-j) + \dots \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{v}_1 BD_c(t-1, t-j) + \mathbf{v}_{\omega+j} \quad (35)$$

□

[補題4]  $\mathbf{v}$  の成分ベクトルに関して以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_1 \{A^{\omega-1} BD_c(t, t-j) + A^{\omega-2} BD_c(t+1, t-j) \\ & + \cdots + A^j BD_c(t+\omega-j-1, t-j)\} = \lambda \mathbf{v}_{\omega+j}, \\ & j = 1, 2, \dots, \omega-1 \end{aligned} \quad (36)$$

(証明) 行列  $X$  の  $i$  番目の列ブロックを  $(X)_i$  で表わすことにすれば,  $X_e(t)$  の 0 でない固有値  $\lambda$  に対応する左固有ベクトル  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}]$  に対し,  $X_e(t)$  の構造と (26) 式から

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}](X_{e12}(t))_j = \lambda \mathbf{v}_{\omega+j}, \\ & j = 1, 2, \dots, \omega-1 \end{aligned} \quad (37)$$

が成立する。(37) 式の左辺を計算するために (26) 式の表現を用いる。(26) 式の右辺の各項に注目すれば,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] A_{e11}^{\omega-i-1} = [\mathbf{v}_1 A^{\omega-i-1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \\ & (A_{e12}(t+i) A_{e22}^i)_j = \begin{bmatrix} BD_c(t+i, t-j) \\ \mathbf{O}_{p(\omega-1) \times m} \end{bmatrix}, \\ & i = 0, 1, \dots, \omega-2, \quad j = 1, 2, \dots, \omega-1 \end{aligned}$$

が成立するから,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] A_{e11}^{\omega-i-1} (A_{e12}(t+i) A_{e22}^i)_j \\ & = \mathbf{v}_1 A^{\omega-i-1} BD_c(t+i, t-j) \end{aligned}$$

となる。したがって, (26) 式から (37) 式の左辺は

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}](X_{e12}(t))_j \\ & = \sum_{i=0}^{\omega-j-1} \mathbf{v}_1 A^{\omega-i-1} BD_c(t+i, t-j) \end{aligned} \quad (38)$$

と表現できるから, (37) 式によって関係式

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\omega-j-1} \mathbf{v}_1 A^{\omega-i-1} BD_c(t+i, t-j) \\ & = \mathbf{v}_1 \{A^{\omega-1} BD_c(t, t-j) + A^{\omega-2} BD_c(t+1, t-j) \\ & + \cdots + A^j BD_c(t+\omega-j-1, t-j)\} \\ & = \lambda \mathbf{v}_{\omega+j} \end{aligned} \quad (39)$$

が得られる。

□

つぎの定理は本稿の主な結果である。

《定理1》 システム (1) の入力側の通信列  $\sigma_c(t)$  が許容可能, かつ  $A$  の固有値  $\lambda^{1/\omega}$  が通信列特性多項式  $g_c(\mu)$  のゼロ点になっていないと仮定する。このとき,  $(A, B)$  が可制御 (可安定) であれば, 拡大システム  $(A_e(t), B_e(t))$  は可制御 (可安定) である。

(証明) システム  $(A_e(t), B_e(t))$  が可制御 (可安定) でないと仮定しよう。そのとき, 任意の  $j = 1, 2, \dots, \omega-1$  に対し,

$X_e(t)$  の 0 でない固有値  $\lambda \neq 0$  に対応する左固有ベクトル  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}]$  に対し,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{v}_{\omega+1}, \dots, \mathbf{v}_{2\omega-1}] \\ & \times X_e(t, t-j+1) B_e(t-j) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (40)$$

が成立する。そのとき, 補題3によって

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\omega+j} & = -\mathbf{v}_1 \{A^{j-1} BD_c(t-j, t-j) \\ & + A^{j-2} BD_c(t-j+1, t-j) \\ & + \cdots + BD_c(t-1, t-j)\} \end{aligned} \quad (41)$$

と表現できるが, 右辺は  $j$  個の項をもつことに注意しよう。これを補題4の (36) 式に代入して整理することによって

$$\begin{aligned} & \lambda \mathbf{v}_1 A^{j-1} BD_c(t-j, t-j) \\ & + \lambda \mathbf{v}_1 A^{j-2} BD_c(t-j+1, t-j) \\ & + \cdots \\ & + \lambda \mathbf{v}_1 BD_c(t-1, t-j) \\ & + \mathbf{v}_1 A^{\omega-1} BD_c(t, t-j) \\ & + \mathbf{v}_1 A^{\omega-2} BD_c(t+1, t-j) \\ & + \cdots \\ & + \mathbf{v}_1 A^j BD_c(t-j+\omega-1, t-j) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (42)$$

が得られる。(36) 式の左辺は  $\omega-j$  個の項をもつので, (42) 式の左辺は  $\omega$  個の項をもつ。ところで, 補題2の結果から  $\lambda^{1/\omega}$  は  $A$  の固有値であるから,

$$\mathbf{v}_1 A^j = \lambda^{j/\omega} \mathbf{v}_1 \quad (43)$$

が成立する。これを (42) 式に代入することにより

$$\begin{aligned} & \lambda^{(j+\omega-1)/\omega} \mathbf{v}_1 BD_c(t-j, t-j) \\ & + \lambda^{(j+\omega-2)/\omega} \mathbf{v}_1 BD_c(t-j+1, t-j) \\ & + \cdots \\ & + \lambda \mathbf{v}_1 BD_c(t-1, t-j) \\ & + \lambda^{(\omega-1)/\omega} \mathbf{v}_1 BD_c(t, t-j) \\ & + \lambda^{(\omega-2)/\omega} \mathbf{v}_1 BD_c(t+1, t-j) \\ & + \cdots \\ & + \lambda^{j/\omega} \mathbf{v}_1 BD_c(t-j+\omega-1, t-j) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (44)$$

が得られるが, これは

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}_1 B \{ \lambda^{(\omega-1)/\omega} D_c(t-j, t-j) \\ & + \lambda^{(\omega-2)/\omega} D_c(t-j+1, t-j) \\ & + \cdots \\ & + \lambda^{1/\omega} D_c(t-j+\omega-2, t-j) \\ & + D_c(t-j+\omega-1, t-j) \} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (45)$$

と変形できる。(45) 式は  $j = 1, 2, \dots, \omega-1$  に対して成立するから, 和をとって通信列行列多項式  $G_c(\mu)$  を用いると,

$$v_1 B G_c(\lambda^{1/\omega}) = 0 \quad (46)$$

と表現できる。定理の仮定から、補題 1 によって  $G_c(\lambda^{1/\omega})$  は正則である。したがって、0 でない固有値に対応する  $v_1$  に対し、

$$v_1 B = 0$$

となるから、 $(A, B)$  は可制御でない。

証明の最初における仮定「 $X_e(t)$  の 0 でない固有値  $\lambda \neq 0$  に対応する左固有ベクトル」を「 $X_e(t)$  の不安定な固有値  $|\lambda| \geq 1$  に対応する左固有ベクトル」に置き換えれば、可安定性に関する証明も同様にできる。□

(注意) 本証明の最後の段階において、 $G_c(\lambda^{1/\omega})$  の正則性を用いて NCS の可制御性を示した。これは通信列が許容可能であっても、定理の仮定が満たされない場合には NCS が不可制御となることがあることを意味する (3 章の定義 1 の後のコメントを参照)。

## 5. 可再生性と可検出性

この章では、可制御性と可安定性に双対な概念である可再生性 (reconstructibility) と可検出性<sup>17), 18)</sup> について考察する。**【定理 2】** システム (1) の出力側の通信列  $\sigma_o(t)$  が許容可能とする。このとき、 $(C, A)$  が可再生 (可検出) であれば、対  $(C_e(t), A_e(t))$  は各時刻において可再生 (可検出) である。(証明)  $A_e(t)$  の構造から、この 0 でない固有値は  $A$  の固有値に一致する。ある時刻  $t$  において対  $(C_e(t), A_e(t))$  が可再生 (可検出) でないとすれば、ある  $\lambda \neq 0$  ( $|\lambda| \geq 1$ ) に対して右固有ベクトル  $w$  が存在し、

$$A_e(t)w = \lambda w, \quad (47)$$

$$C_e(t)w = 0 \quad (48)$$

が成立する。状態  $x_e(t)$  の分割に対応して  $w^T = [w_1^T, w_2^T, \dots, w_{\omega-1}^T, w_{\omega}^T, w_{\omega+1}^T, \dots, w_{2\omega-1}^T]$  と分割しよう。(47) 式の関係から  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2\omega - 1$ ) に対し、

$$Aw_1 + BD_c(t, t-1)w_{\omega+1} + \dots + BD_c(t, t-\omega+1)w_{2\omega-1} = \lambda w_1 \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} Cw_1 &= \lambda w_2 \\ w_2 &= \lambda w_3 \\ w_3 &= \lambda w_4 \\ &\vdots \\ w_{\omega-1} &= \lambda w_{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

が成立する。一方、(48) 式の関係から

$$w_{\omega+1} = 0, w_{\omega+2} = 0, \dots, w_{2\omega-1} = 0$$

であるから、(49) 式は

$$Aw_1 = \lambda w_1 \quad (51)$$

となる。また、(48) 式の関係から

$$D_o(t, t)Cw_1 + D_o(t, t-1)Cw_2 + \dots + D_o(t, t-\omega+1)Cw_{\omega} = 0 \quad (52)$$

が成立するが、(50) 式の関係を使えば、

$$D_o(t, t)Cw_1 + (1/\lambda)D_o(t, t-1)Cw_1 + \dots + (1/\lambda^{\omega-1})D_o(t, t-\omega+1)Cw_1 = 0 \quad (53)$$

が成立し、

$$\{D_o(t, t) + (1/\lambda)D_o(t, t-1) + \dots + (1/\lambda^{\omega-1})D_o(t, t-\omega+1)\}Cw_1 = 0 \quad (54)$$

と表現できる。 $\sigma_o(t)$  が許容可能であることと  $D_o(t, s)$  ( $s = t, t-1, \dots, t-\omega+1$ ) の定義から、(54) 式の左辺 ( $\cdot$ ) 内は正則であるから、

$$Cw_1 = 0 \quad (55)$$

が得られる。(51) 式と (55) 式から、0 でない (不安定な) 固有値  $\lambda$  が可観測でないので、 $(C, A)$  は可再生 (可検出) でない。□

## 6. あとがき

本稿で提案した NCS モデルにおいては、入力側の通信列が許容可能かつ  $A$  行列の固有値が通信列特性多項式のゼロ点になっていないという条件の下で可制御性が保存されることを示した。すなわち、プラントが可制御 (可安定) であれば、NCS モデルも可制御 (可安定) である。また、プラントが可再生 (可検出) であれば、出力通信列が許容可能という条件の下で、任意の時刻において対  $(C_e(t), A_e(t))$  が可再生 (可検出) であることを示した。

ここで得られた構造的性質に基づいてコントローラを設計することは今後の課題であるが、可制御性や可再生性が保存されていることを考慮すれば、文献 5), 8) のようにデッドビート型のコントローラを用いるのは 1 つの方向であろう。

## 参考文献

- 1) R. Brockett: Stabilization of motor networks, Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control, 1484/1488 (1995)
- 2) V.D. Blondel and J.N. Tsitsiklis: A survey of computational complexity results in systems and control, Automatica, **36**-9, 1249/1274 (2000)
- 3) D. Hristu: Stabilization of LTI systems with communication constraints, Proc. of the 2000 American Control Conference, **4**, 2342/2346 (2000)
- 4) 新明, 山本, 潮: 周期出力フィードバックゲインによる周期通信制約付ネットワーク化制御系の安定化, システム制御情報学会論文誌, **16**-8, 429/431 (2003)
- 5) 山本, 河越, 潮: 入出力通信に周期時変制約を有する制御系のオブザーバベースドコントローラによる安定化, システム制御情報学会論文誌, **15**-11, 593/599 (2002)
- 6) 藤岡, 伊藤: 通信容量制約のあるサンプル値制御系の最適設計, 計測自動制御学会論文集, **39**-5, 463/468 (2003)



- 7) 河野, 鈴木, 高橋, 佐藤: 出力サンプルホールド制御による周期係数離散時間システムの安定化, システム制御情報学会論文誌, **12-4**, 220/224 (1999)
- 8) N. Takahashi and M. Kono: Stabilization of linear time-invariant systems with periodic communication constraints by output sample hold control, *Artificial Life and Robotics*, **8-2**, 111/117 (2004)
- 9) D. Hristu and K. Morgansen: Limited communication control, *Systems and Control Letters*, **37-4**, 193/205 (1999)
- 10) L. Zhang and D. Hristu: Stabilization of networked control systems: Designing effective communication sequences, *Proc. of the 16th IFAC World Congress* (2005)
- 11) D. Hristu: Feedback control with communication constraints, *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*, 575/599, Birkhäuser, Boston (2005)
- 12) D. Hristu: Short-period communication and the role of zero-order holding in networked control systems, *IEEE Trans. AC*, **53-5** 1285/1290 (2008)
- 13) L. Schenato: To zero or to hold control inputs with lossy links?, *IEEE Trans. AC*, **54-5** 1093/1099 (2009)
- 14) R.E. Kalman, Y.C. Ho and K.S. Narendra: Controllability of linear dynamical systems, In *Contributions to differential equations*, **1**, Interscience (1963)
- 15) W.M. Wonham: Linear multivariable control — A geometric approach, Springer-Verlag (1974)
- 16) S. Bittanti and P. Bolzern: Reachability and controllability of discrete-time linear periodic systems, *IEEE Trans. AC*, **30-4**, 399/401 (1985)
- 17) S. Bittanti and P. Bolzern: Discrete-time linear periodic systems: gramian and modal criteria for reachability and controllability, *Int. J. of Control*, **41-4**, 909/928 (1985)
- 18) O.M. Grasselli and F. Lampariello: Dead-beat control of linear periodic discrete-time systems, *Int. J. of Control*, **33-6**, 1091/1106 (1981)

## 《付 録》

### A. 周期係数離散時間システムの構造的性質

一般の  $\omega$ -周期係数離散時間システム

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_p(t)x(t) + B_p(t)u(t) \\ y(t) &= C_p(t)x(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

を考えよう。周期係数離散時間システムの可制御性と可安定性をつぎのように定義する。

**【定義 2】**<sup>7), 16)~18)</sup> システム (A.1) が可制御 (可安定) であるとは, 任意に与えられた初期状態  $x(0)$  に対し, 有限時間 (無限時間) で状態を原点にもっていくような  $u(t)$  が存在する場合をいう。

システム (A.1) の遷移行列を  $X_p(t, s)$ , モノドロミー行列を  $X_p(t)$  と定義すれば, このシステムが可制御 (可安定) であるための必要十分条件はつぎの補題によって与えられる。

**[補題 5]**<sup>7), 16), 17)</sup> システム (A.1) が可制御 (可安定) であるための必要十分条件は,  $X_p(t)$  のすべての固有値  $\lambda \neq 0$  ( $|\lambda| \geq 1$ ) に対応する左固有ベクトル  $v$  に対し,

$$\begin{aligned} v[B_p(t-1), X_p(t, t-1)B_p(t-2), \dots, \\ X_p(t, t-\omega+1)B_p(t-\omega)] \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

が成立することである。

つぎに, 周期係数離散時間システムの可再生性と可検出性の定義を与えるためにシステム (A.1) の双対システム

$$x(t+1) = A_p^T(t)x(t) + C_p^T(t)y(t) \quad (\text{A.3})$$

を考えよう。

**【定義 3】**<sup>7), 17)</sup> システム (A.1) が可再生 (可検出) であるとは, 双対システム (A.3) が可制御 (可安定) な場合をいう。

周期係数離散時間システム (A.1) が可再生 (可検出) であるための必要十分条件はつぎの補題によって与えられる。

**[補題 6]**<sup>7), 17), 18)</sup> システム (A.1) が可再生 (可検出) であるための必要十分条件は,  $X_p(t)$  のすべての固有値  $\lambda \neq 0$  ( $|\lambda| \geq 1$ ) に対応する右固有ベクトル  $w$  に対し,

$$\begin{aligned} w^T[C_p^T(t-1), X_p^T(t, t-1)C_p^T(t-2), \dots, \\ X_p^T(t, t-\omega+1)C_p^T(t-\omega)] \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

が成立することである。

## 〔著 者 紹 介〕

### 河 野 通 夫 (正会員)



1974年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了, 同年同大学助手。79年東京商船大学助教授, 92年宮崎大学教授, 現在に至る。その間2007年~2009年まで同大学評議員を兼任。制御理論の研究に従事, 工学博士。システム制御情報学会, 日本機械学会の会員。

### 鈴 木 達 雄 (正会員)



1989年東京商船大学大学院制御工学専攻修士課程修了。同年三菱重工業(株)入社, 名古屋誘導推進システム製作所勤務。2004年岐阜大学工学部電気電子工学科助手, 2007年同大学助教, 現在に至る。システム制御理論の研究に従事, 博士(工学)。システム制御情報学会, 日本航空宇宙学会, IEEEの会員。

### 高 橋 伸 弥 (正会員)



1996年宮崎大学工学研究科修了, 同年同大学教務職員, 99年同大学助手, 2006年熊本大学大学院自然科学研究科生産システム科学専攻修了, 2007年宮崎大学助教, 現在に至る。制御工学の研究に従事。博士(工学)。日本機械学会の会員。

### 佐 藤 治 (正会員)



1980年東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了, 同年同大学工学部助手, 88年都城工業高等専門学校助教授, 90年宮崎大学工学部助教授, 2003年同大学教授となり現在に至る。コンピュータの特性解析と制御に関する研究に従事。工学博士。日本機械学会, 精密工学会の会員。