〈ショート・ペーパー〉

[計測自動制御学会論文集 Vol.32, No.5, 779/781 (1996)]

Sylvester 方程式の数値解法

河 野 通 夫*・高 橋 伸 弥*・平 沼 賢 次**

A Numerical Solution of Sylvester Equations

Michio KONO*, Nobuya TAKAHASHI* and Kenji HIRANUMA**

This paper gives a new numerical method for solving a Sylvester equation. Our method is based on reducing only one coefficent matrix to a triangular form. On depending on the dimension of the matrices, our method is more effective than the Bartels-Stewart algorithm.

Key Words: linear algebraic equation, Sylvester equation, Schur form, numerical method

1. まえがき

A を $m\times m$ 行列，B を $n\times n$ 行列，C を $m\times n$ 行列としたとき，X を未知行列とする方程式

$$AX+XB=C \tag{1}$$

を Sylvester 方程式といい，極設定問題や Lyapunov 安定問題あるいは，Riccati 方程式を解く際に出てくる方程式であり，その解法については，数多くの方法が提案されてきた[1)~13)]．その中でも，特筆すべきは Bartels-Stewart の方法[6)]である．手法としては Sylvester 方程式の係数行列を Schur 形に変換し，複数個のたかだか 4 元の Sylvester 方程式に帰着する方法でその有効性は高く評価されている．その後，Golub ら[9)]によって，片側の係数行列は Hessenberg 形に止めておくことによって計算効率が高められることが示された．特にこの方法は m と n の大きさが違う場合に有効である．本稿では，A はそのままにし，B のみを Schur 形にすることを考える．

2. 行列 B が実数の固有値のみをもつ場合

行列 B が実数の固有値のみをもつと仮定しているので，適当な直交行列 Q が存在して，

$$Q^TBQ=\Delta$$

とすることができる．ここで，(1) 式は下三角行列

$$\Delta=\begin{bmatrix}\delta_{11} & & & 0\\ \vdots & \delta_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \delta_{n1} & \cdots & & \delta_{nn}\end{bmatrix}$$

である．このとき，(1) 式は

$$AY+Y\Delta=D \tag{2}$$

と表現でき，$Y=XQ$, $D=CQ$ となる．ここで，Y_i, D_i を

$$Y_i=\begin{bmatrix}y_{1i}\\ y_{2i}\\ \vdots\\ y_{mi}\end{bmatrix},\quad D_i=\begin{bmatrix}d_{1i}\\ d_{2i}\\ \vdots\\ d_{mi}\end{bmatrix}$$

と定義する．ただし，y_{ij}, d_{ij} はそれぞれ Y の ij 要素および D の ij 要素を表わす．さらに，$\Delta_{ij}=\delta_{ij}I_m$ (I_m は $m\times m$ の単位行列) と定義すれば，(2) 式は

$$\begin{bmatrix}A+\Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1}\\ & A+\Delta_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A+\Delta_{nn}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\\ \vdots\\ D_n\end{bmatrix} \tag{3}$$

に書き換えることができる．(3) 式の係数行列において，

$$\det(A+\Delta_{ii})\neq 0\quad (i=1,...,n) \tag{4}$$

* 宮崎大学工学部　宮崎市学園木花台西 1-1
** 東京商船大学　東京都江東区越中島 2-1-6
* Faculty of Engineering, Miyazaki University, Miyazaki
** Tokyo University of Mercantile Marine, Koto-ku, Tokyo
(Received October 20, 1995)
(Revised November 30, 1995)

が成立すれば，すなわち，$-\delta_{ii}$ が A の固有値でなければ，(3) 式には一意に解が存在し，ブロックごとの back substitution によって解くことができる．Schur 形への変換の演算の数は $10 \times n^3$ であり[9]，ブロックごとの back-substitution の演算の数は $m^3n/3+mn(n-1)/2$ であるから，全体の演算の数は

$$10n^3 + \frac{m^3n}{3} + \frac{mn(n-1)}{2} + 2n^3$$

となる．Bartels-Stewart の方法では，$m^3n/3+mn(n-1)/2+2n^3$ の代わりに，$10m^3+2.5(m^2n+n^2m)$ が入るから，たとえば，$n \le 30$ かつ $n \le m$ であれば，本稿の方法の方が演算の数が少なくてすむ．Schur 形へもっていくための QR 法の計算は労力が大きく，行列の次元によっては，本稿の方法の方が効率がよい場合もある．

3. 行列 B に複素数の固有値が存在する場合

この場合には Δ は下三角にならず，一般に擬似下三角形であるから，(3) 式において下準対角ブロックが現れるので，その部分を消去する操作が必要となる．それにはブロックごとの Gauss の消去法を用いればよい

4. アルゴリズム

A, B, C が与えられているとする．

ステップ 1．$Q^TBQ = \Delta$ とする Q を求める．

ステップ 2．$D = CQ$ とする．$i = n, \ldots, 1$ についてつぎの操作をする．

（1） $\delta_{i-1,i} \neq 0$ であれば，(3) へ．そうでなければ，(2) へ

（2） ブロックごとの back-substitution で (3) 式の解 Y_i を求める．$i-1 \to i$ とし，(1) へ

（3） $\Delta_{i-1,i}$ を消去した後，ブロックごとの back-substitution で Y_i を求める．$i-1 \to i$ とし，(1) へ

ステップ 3．$X = [Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]Q^T$

（注意）ステップ 2 において，(3) の操作が連続して現れることはない．

5. 数値例

A, B, C がつぎのように与えられたとする．

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8. & 7. & 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \\ 1. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. \\ 1. & 1. & 3. & 2. & -1. & 0. & 0. & 5. \\ 1. & 1. & 4. & -1. & 2. & -1. & 0. & 6. \\ 1. & 0. & 5. & -1. & 2. & -1. & 1. & 4. \\ 1. & 0. & 6. & 0. & -1. & 2. & -1. & 3. \\ 2. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 1. & 2. \\ 1. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. & .1 & 3. \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1. & 4. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 2. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 3. & 2. & 3. & 5. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 4. & 3. & 3. & 3. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 5. & 4. & 1. & 1. & 2. & 0. & 0. & 0. \\ 6. & 5. & 1. & 2. & 3. & 4. & 0. & 0. \\ 3. & 6. & 0. & 0. & 1. & 1. & 1. & 4. \\ 1. & 7. & 2. & 1. & 1. & 2. & 2. & 2. \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 8. \\ 1. & 0. & 0. & 1. & 3. & 1. & 1. & 7. \\ 4. & 3. & 2. & 1. & 0. & 0. & 2. & 6. \\ 1. & 2. & 1. & 1. & 2. & 1. & 2. & 5. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 4. & 4. \\ 1. & 0. & 3. & 2. & 3. & 6. & 5. & 4. \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & 7. & 2. \\ 8. & 7. & 6. & 5. & 4. & 3. & 2. & 1. \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1.27 & 4.02 & -0.93 & -1.01 & 1.06 & 0.95 & 0.74 & 1.26 \\ 1.23 & -6.81 & 0.27 & 0.72 & -0.99 & -1.18 & -1.69 & 0.21 \\ -2.13 & -1.83 & 0.67 & 0.71 & -1.10 & -0.26 & 0.63 & -0.54 \\ -3.75 & 2.25 & 1.16 & 0.71 & -0.35 & -0.70 & 0.86 & -1.55 \\ -6.65 & 0.52 & 0.67 & 0.55 & 0.59 & 0.74 & 1.00 & -1.39 \\ 4.03 & -8.34 & -0.57 & 0.51 & 0.60 & 0.43 & -0.57 & 1.12 \\ 4.09 & 4.87 & -0.24 & -0.05 & -0.43 & -0.30 & -0.48 & 1.43 \\ 3.07 & 3.97 & -0.54 & -1.01 & 1.48 & 0.92 & 0.15 & 1.28 \end{bmatrix}$$

この例に対し，Bartels-Stewart の方法では，計算時間は 0.043 秒であるのに対し，本稿の方法では，0.031 秒であった．

6. あとがき

Sylvester 方程式 (1) に対し，新しい解法を提案した．B に実数でない固有値が存在する場合には Δ は下三角にならず，一般に擬似下三角であるから，(3) 式において下準対角ブロックが現れるので，その部分を消去する操作が必要となる．その労力は複素数固有値の数に依存する．極設定問題への応用においては，B 行列は擬似対角行列に選ぶことが可能で，その場合には Schur 形への変換の手間が省ける．

参 考 文 献

1) S.Barnett and C.Storey:Remarks on Numerical Solution of the Lyapunov Matrix Equation, Electronics Letters, **3**-9,417/418(1967)

2) A.Jameson:Solution of the Equation $AX + XB = C$ by Inversion of an $M * M$ or $N * N$ Matrix, SIAM J. Appl.Math., **16**-5,1020/1023(1968)

3) E.J.Davison and F.T.Man:The Numerical Solution of $A'Q + QA = -C$,IEEE Trans.on Automatic Control,**13**-4,448/449(1968)

4) R.A.Smith:Matrix Equation $XA + BX = C$,SIAM J. Appl. Math.,**16**-1,198/201(1968)

5) P.G.Smith:Numerical Solution of the Matrix Equation $AX + XA^T + B = 0$,IEEE Trans. on Automatic Control,**16**-3,278/279(1971)

6) R.H.Bartels and G.W.Stewart:Solution of the Matrix Equation $AX + XB = C$,Communications of ACM,**15**-9,820/826(1972)

7) A.N.Beavers.JR. and E.D.Denman:A New Solution Method for the Lyapunov Matrix Equation,SIAM J. Appl.Math., **29**-3,416/421(1975)

8) W.D.Hoskins,D.S.Meeks and D.J.Walton :The Numerical Solution of the Matrix Equation $XA+AY = F$, BIT,**17**,184/190(1977)

9) G.H.Golub,S.Nash and C.Van Loan:A Hessenberg-Schur Method for the Problem $AX + XB = C$,IEEE Trans. on Automatic Control,**24**-6,909/913(1979)

10) L.A.Balzer:Accelerated Convergence of the Matrix Sign Function Method of Solving Lyapunov, Riccati and other Matrix Euations,INT.J.Control, **32**-6,1057/1078(1980)

11) S.J.Hammarling:Numerical Solution of the Stable, Non-negative Definite Lyapunov Equation,IMA J. of Numerical Analysis,**2**,303/323(1982)

12) J.P.Charlier and P.Van Dooren:Systolic Algorithm for Riccati and Lyapunov Equations, Math. Control Signals Systems,**2**,109/136(1989)

13) T.Gudmundsson and A.J.Laub:Approximate Solution of Large Sparse Lyapunov Euations, IEEE Trans. on Automatic Control,**39**-5,1110/1114(1994)