システム制御情報学会論文誌，Vol. 16, No. 10, pp. 507–512, 2003

論　文

確率離散型 Riccati 代数方程式の数値解法*

河野　通夫†・唐　一兵‡・高橋　伸弥†・佐藤　治†

A Numerical Solution of the Stochastic Discrete Algebraic Riccati Equation*

Michio KONO†, Yibing TANG‡, Nobuya TAKAHASHI† and Osamu SATO†

This paper proposes two algorithms (Algorithm I and Algorithm II) for solving a stochastic discrete algebraic Riccati equation, which arises in stochastic optimal control for the discrete-time system. Our algorithms are generalized versions of Hewer's algorithm. Algorithm I has the quadratic convergence but requires to solve a sequence of non-standard Lyapunov equations. On the other hand, Algorithm II needs the solutions of standard discrete Lyapunov equations, which can be solved easily, but it has a linear convergent term. By a numerical example, it is shown that Algorithm I is superior to Algorithm II in the case of large dimension.

1. 緒論

確率離散型 Riccati 代数方程式とは，P を未知対称行列とするつぎの方程式である [1].

$$P=\bar{\Omega}^{\mathrm{T}}(P)P\bar{\Omega}(P)+A_0^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}}(P)R\Omega(P)A_0+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon(P) \tag{1}$$

ただし，$A_i(i=0,1,\ldots,p),B,C,R$ は適当なサイズの行列として与えられており，

$$\Upsilon(P)=\sum_{i=1}^{p}A_i^{\mathrm{T}}PA_i \tag{2}$$

$$\Omega(P)=(B^{\mathrm{T}}PB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{3}$$

$$\bar{\Omega}(P)=(I-B\Omega(P))A_0 \tag{4}$$

である．また，R は正定対称と仮定する．このような方程式は離散時間システムにおける確率的最適制御やギャランティードコスト制御において現れる．

標準連続型 Riccati 代数方程式に対しては，Lyapunov 方程式を繰返し解く Kleinman のアルゴリズムが数値解法として有効であり，可制御かつ可観測の仮定のもとで，2 次収束することが知られている [2]. 著者らはそれを確率連続型 Riccati 代数方程式の場合に拡張したアルゴリズムを提案し，計算量を考察した [3]. そこでは，一般化 Lyapunov 方程式を繰返し解く方法より標準連続型 Lyapunov 方程式を繰返し解く方が効率がよいことが数値例で示されているが，2 次収束性が示されているわけではない．いっぽう，Hewer は標準離散型 Riccati 代数方程式に対し，Kleinman のアルゴリズムに類似なアルゴリズムを提案し，閉ループ系が漸近安定であるような場合には 2 次収束することを示した [4]. その後，Guo は閉ループ系の固有値が単位円上にある場合，収束性に関し，1 次の項が支配的になることを示した [5]. 本論文では，Hewer のアルゴリズムを確率離散型 Riccati 代数方程式に拡張した 2 種類のアルゴリズム (**アルゴリズム I**，**アルゴリズム II**) を提案する．**アルゴリズム I** は各ステップで一般化 Lyapunov 方程式を解く必要があるのに対し，**アルゴリズム II** は各ステップで標準離散型 Lyapunov 方程式を解くだけである．本論文では，付加的な条件のもとで**アルゴリズム I** は 2 次収束することを証明し，**アルゴリズム II** は 1 次収束の項が残ることを示す．さらに，計算量についても考察し，数値例で二つのアルゴリズムを比較した結果，確率連続型 Riccati 代数方程式の場合とは異なる知見が得られた．

---

* 原稿受付　2003 年 3 月 28 日
† 宮崎大学 工学部　Faculty of Engineering, Miyazaki University; 1-1 Gakuenkibanadai-nishi, Miyazaki 889-2192, JAPAN
‡ 宮崎大学大学院 工学研究科　School of Engineering, Miyazaki University; 1-1 Gakuenkibanadai-nishi, Miyazaki 889-2192, JAPAN
Key Words: discrete Riccati equation, numerical solution, Lyapunov equation, Newton method, stochastic optimal control.

2. 予備的事項

確率離散型 Riccati 代数方程式の半正定解の存在に関し，つぎの定理が成立することが参考文献 [1] に示されている．

【定理 1】 (A_0, B) が可制御で，(C, A_0) が可検出であり，

$$\inf_F \| \sum_{j=0}^{\infty} ((A_0 - BF)^{\mathrm{T}})^j \Upsilon(I)(A_0 - BF)^j \| < 1 \quad (5)$$

が成立すると仮定しよう．ただし，$\|A\| = \max\{\sqrt{\lambda} : \lambda$ は $A^{\mathrm{T}}A$ の固有値$\}$ である．そのとき，(1) 式に半正定解 P が存在する．

定理 1 と同じ仮定をおく．V_0 を未知行列とする一般化 Lyapunov 方程式

$$V_0 = \bar{\Omega}_0^{\mathrm{T}} V_0 \bar{\Omega}_0 + A_0^{\mathrm{T}} \Omega_0^{\mathrm{T}} R \Omega_0 A_0 + C^{\mathrm{T}} C + \Upsilon(V_0) \quad (6)$$

を考えよう．ただし，Ω_0 は選択の自由度があり，

$$\bar{\Omega}_0 = (I - B\Omega_0)A_0 \quad (7)$$

である．参考文献 [1] の**補題 2** からつぎの命題が得られる．

【命題 1】 $\bar{\Omega}_0$ が漸近安定でかつ

$$\| \sum_{j=0}^{\infty} ((A_0 - B\Omega_0 A_0)^{\mathrm{T}})^j \Upsilon(I)(A_0 - B\Omega_0 A_0)^j \| < 1 \quad (8)$$

となるように Ω_0 を選ぶ．そのとき (6) 式に正定解 V_0 が存在する．

(注意 1) (6) 式を具体的に解くには参考文献 [6] の方法を用いればよいが，A_0 のサイズを $n \times n$ としたとき，flop 数は n^6 のオーダになり，計算量は大きくなる．

3. アルゴリズム I

参考文献 [1] の**定理 1** の証明は構成的であり，それ自身アルゴリズムを与えている．それをまとめるとつぎのようになる．

【定理 2】 **定理 1** と同じ仮定をおく．(6) 式の正定解 V_0 を初期値とし，つぎのような一般化離散型 Lyapunov 方程式の列を考える．

$$V_k = \bar{\Omega}_k^{\mathrm{T}} V_k \bar{\Omega}_k + A_0^{\mathrm{T}} \Omega_k^{\mathrm{T}} R \Omega_k A_0 + C^{\mathrm{T}} C + \Upsilon(V_k) \quad (9)$$

$$\Omega_k = (B^{\mathrm{T}} V_{k-1} B + R)^{-1} B^{\mathrm{T}} V_{k-1} \quad (10)$$

$$\bar{\Omega}_k = (I - B\Omega_k)A_0 \quad (11)$$

そのとき，(1) 式の解 P は

$$P = \lim_{k \to \infty} V_k \quad (12)$$

として得られる．

(注意 2) 本論文ではこのアルゴリズムを**アルゴリズム I** とよぶことにする．

(1) 式の正定解 P に対し，以下の補題が成立する．

【補題 1】 $\bar{\sigma}_k = \|\bar{\Omega}_k\|$ とおく．(1) 式の解を用いて構成した閉ループ系に対し，

$$\bar{\sigma} = \|\bar{\Omega}\| < 1 \quad (13)$$

と仮定すれば，k に依存しない正の実数 $\alpha_1 < 1$ が存在して，

$$\bar{\sigma}_k < \alpha_1 \quad (14)$$

が成立する．

【補題 2】 k に独立な α_2 が存在し，次式が成立する．

$$\|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega - \Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB + R)(\Omega - \Omega_{k+1})A_0\| \le \alpha_2 \|P - V_k\|^2 \quad (15)$$

【補題 3】 (1) 式の解 P に対し，つぎの関係が成立する．

$$\begin{aligned} &V_{k+1} - P \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j \{\Upsilon(V_{k+1}) - \Upsilon(P) \\ &\quad + A_0^{\mathrm{T}}(\Omega - \Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB + R) \\ &\quad \cdot (\Omega - \Omega_{k+1})A_0\} \bar{\Omega}_{k+1}^j \end{aligned} \quad (16)$$

以上の補題の証明は**付録**に示す．

本節の主要な結果はつぎの定理であり，付加的な仮定のもとで**アルゴリズム I** の 2 次収束性を保証している．

【定理 3】 (1) 式の正定解 P を用いて構成した閉ループ系に対し (13) 式が成立し，さらに，$\|\Upsilon(I)\| + \alpha_1^2 < 1$ と仮定する．そのとき，**アルゴリズム I** の収束性は次式に支配される．

$$\|P - V_{k+1}\| \le c\|P - V_k\|^2 \quad (17)$$

ただし，

$$c = \alpha_2(1 - \alpha_1^2 - \|\Upsilon(I)\|) \quad (18)$$

である．

(証明) **補題 3** から，

$$\begin{aligned} &\|V_{k+1} - P\| \\ &\le \| \sum_{j=0}^{\infty} (\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j \{\Upsilon(V_{k+1}) - \Upsilon(P)\} \bar{\Omega}_{k+1}^j \| \\ &+ \| \sum_{j=0}^{\infty} (\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j A_0^{\mathrm{T}}(\Omega - \Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB + R) \\ &\quad \cdot (\Omega - \Omega_{k+1})A_0 \bar{\Omega}_{k+1}^j \| \end{aligned} \quad (19)$$

最初に第 1 項に注目する．$\bar{\sigma} < 1$ であるから，**補題 1** によって，

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\{\Upsilon(V_{k+1})-\Upsilon(P)\}\bar{\Omega}_{k+1}^j\| \\
&\le \sum_{j=0}^{\infty}\|(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\|\cdot\|\Upsilon(V_{k+1}-P)\|\cdot\|\bar{\Omega}_{k+1}^j\| \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\bar{\sigma}_{k+1}^{2j}\cdot\|\Upsilon(V_{k+1}-P)\| \\
&= \frac{\|\Upsilon(V_{k+1}-P)\|}{1-\bar{\sigma}_{k+1}^2} \le \frac{\|\Upsilon(V_{k+1}-P)\|}{1-\alpha_1^2} \\
&\le \frac{\|V_{k+1}-P\|\cdot\|\Upsilon(I)\|}{1-\alpha_1^2} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$\alpha_3 = \frac{\|\Upsilon(I)\|}{1-\alpha_1^2}$$

とおくと，定理の仮定から $\alpha_3 < 1$ となり，

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\{\Upsilon(V_{k+1})-\Upsilon(P)\}\bar{\Omega}_{k+1}^j\| \\
&\qquad\qquad \le \alpha_3\|V_{k+1}-P\| \qquad (21)
\end{aligned}
$$

が成立する．つぎに，(19) 式の第 2 項に注目し，**補題 1** を用いると，

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}} \\
&\quad \cdot(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\bar{\Omega}_{k+1}^j\| \\
&\le \|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\| \\
&\quad \cdot\sum_{j=0}^{\infty}\bar{\sigma}_{k+1}^{2j} \\
&\le \|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\| \\
&\quad /(1-\alpha_1^2) \qquad (22)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\begin{aligned}
&\|V_{k+1}-P\| \\
&\le \alpha_3\|V_{k+1}-P\| \\
&\quad +\|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\| \\
&\quad /(1-\alpha_1^2) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
&\|V_{k+1}-P\| \\
&\le \|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\| \\
&\quad /(1-\alpha_1^2)(1-\alpha_3) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって，**補題 2** から (17) 式が得られる． □

4. アルゴリズム II

アルゴリズム II は，文献 [3] に与えられている，確率連続型 Riccati 代数方程式の数値解法を離散時間の場合に拡張したものである．

【定理 4】 **定理 1** と同じ仮定をおく．(6) 式の正定解 V_0 を初期値とし，つぎのような標準離散型 Lyapunov 方程式の列を考える．

$$
\begin{aligned}
V_k &= \bar{\Omega}_k^{\mathrm{T}}V_k\bar{\Omega}_k + A_0^{\mathrm{T}}\Omega_k^{\mathrm{T}}R\Omega_kA_0 + C^{\mathrm{T}}C + \Upsilon_k, \\
&\qquad k=1,2,3,\ldots \qquad (25)
\end{aligned}
$$

ただし，

$$\Upsilon_k = \Upsilon(V_{k-1}) = \sum_{i=1}^{p}A_i^{\mathrm{T}}V_{k-1}A_i \qquad (26)$$

$$\Omega_k = (B^{\mathrm{T}}V_{k-1}B+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}V_{k-1} \qquad (27)$$

$$\bar{\Omega}_k = (I-B\Omega_k)A_0 \qquad (28)$$

である．そのとき，P は

$$P = \lim_{k\to\infty}V_k \qquad (29)$$

として得られる．

（注意 3） (25) 式を Bartels-Stewart 法で解けば，flop 数は n^4 のオーダになり，一般化離散型 Lyapunov 方程式の場合より計算量が少ない（注意 1 を参照)．

証明の前につぎの補題をおく．

【補題 4】 適当なサイズの行列 A_0, B, C および正定対称行列 R, V が与えられていると仮定する．任意の Ω_0 と

$$\Omega_1 = (B^{\mathrm{T}}VB+R)^{-1}B^{\mathrm{T}}V \qquad (30)$$

によって与えられる Ω_1 に対し，恒等式

$$
\begin{aligned}
&A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_1-\Omega_0)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)(\Omega_1-\Omega_0)A_0 \\
&\qquad +\bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}}V\bar{\Omega}_1 + A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0 \\
&= \bar{\Omega}_0^{\mathrm{T}}V\bar{\Omega}_0 + A_0^{\mathrm{T}}\Omega_0^{\mathrm{T}}R\Omega_0A_0 \qquad (31)
\end{aligned}
$$

が成立する．ただし，$\bar{\Omega}_0$ は (7) 式によって定義され，$\bar{\Omega}_1 = (I-B\Omega_1)A_0$ である．

(証明は付録)

（証明） (6) 式と **補題 4** から

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \bar{\Omega}_0^{\mathrm{T}}V_0\bar{\Omega}_0 + A_0^{\mathrm{T}}\Omega_0^{\mathrm{T}}R\Omega_0A_0 + C^{\mathrm{T}}C + \Upsilon(V_0) \\
&= \bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}}V_0\bar{\Omega}_1 + A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0 + C^{\mathrm{T}}C + \Upsilon(V_0) \\
&\quad +A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_1-\Omega_0)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}V_0B+R)(\Omega_1-\Omega_0)A_0 \\
&= \bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}}V_0\bar{\Omega}_1 + M_1 \qquad (32)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$
\begin{aligned}
M_1 &= A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0 + C^{\mathrm{T}}C + \Upsilon(V_0) \\
&\quad +A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_1-\Omega_0)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}V_0B+R)(\Omega_1-\Omega_0)A_0 \qquad (33)
\end{aligned}
$$

である．文献 [1] の**補題 2 ii)** より，$\bar{\Omega}_1$ は漸近安定であるから，(32) 式は

$$V_0 = \sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}})^jM_1\bar{\Omega}_1^j \qquad (34)$$

と等価である．いっぽう，(25) 式において $k=1$ とおいた方程式の解 V_1 は

$$V_1=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}})^j(A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon_1)\bar{\Omega}_1^j \tag{35}$$

と表現できる．$\Upsilon_1=\Upsilon(V_0)$ であるから，

$$\begin{aligned}&V_1-V_0\\&=-\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_1^{\mathrm{T}})^jA_0^{\mathrm{T}}(\Omega_1-\Omega_0)^{\mathrm{T}}\\&\quad\cdot(B^{\mathrm{T}}V_0B+R)(\Omega_1-\Omega_0)A_0\bar{\Omega}_1^j\\&\le 0\end{aligned} \tag{36}$$

となる．一般に V_{k-1} が正定で，

$$V_k-V_{k-1}\le 0 \tag{37}$$

と仮定しよう．(25) 式と**補題 4** から

$$\begin{aligned}V_k&=\bar{\Omega}_k^{\mathrm{T}}V_k\bar{\Omega}_k+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_k^{\mathrm{T}}R\Omega_kA_0+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon_k\\&=\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}}V_k\bar{\Omega}_{k+1}+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_{k+1}^{\mathrm{T}}R\Omega_{k+1}A_0+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon_k\\&\quad+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_{k+1}-\Omega_k)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}V_kB+R)(\Omega_{k+1}-\Omega_k)A_0\\&=\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}}V_k\bar{\Omega}_{k+1}+M_{k+1}\end{aligned} \tag{38}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}M_{k+1}=&A_0^{\mathrm{T}}\Omega_{k+1}^{\mathrm{T}}R\Omega_{k+1}A_0+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon_k\\&+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_{k+1}-\Omega_k)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}V_kB+R)\\&\cdot(\Omega_{k+1}-\Omega_k)A_0\end{aligned} \tag{39}$$

である．上と同様にして，$\bar{\Omega}_{k+1}$ は漸近安定であるから，(25) 式の半正定解 V_k は

$$V_k=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^jM_{k+1}\bar{\Omega}_{k+1}^j \tag{40}$$

と表現できる．いっぽう，V_{k+1} は

$$\begin{aligned}V_{k+1}=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j(&A_0^{\mathrm{T}}\Omega_{k+1}^{\mathrm{T}}R\Omega_{k+1}A_0\\&+C^{\mathrm{T}}C+\Upsilon_{k+1})\bar{\Omega}_{k+1}^j\end{aligned} \tag{41}$$

と表現できるから，

$$\begin{aligned}&V_{k+1}-V_k\\&=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\{\Upsilon_{k+1}-\Upsilon_k\\&\quad-A_0^{\mathrm{T}}(\Omega_{k+1}-\Omega_k)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}V_kB+R)\\&\quad\cdot(\Omega_{k+1}-\Omega_k)A_0\}\bar{\Omega}_{k+1}^j\end{aligned} \tag{42}$$

が得られる．仮定 (37) と $\Upsilon(P)$ の線形性から

$$\begin{aligned}&\Upsilon_{k+1}-\Upsilon_k\\&=\Upsilon(V_k)-\Upsilon(V_{k-1})\\&\le 0\end{aligned}$$

であるから，(42) 式によって

$$V_{k+1}-V_k\le 0$$

が成立する．V_k は単調非増加で下に有界であるから，収束する．

$$V_\infty=\lim_{k\to\infty}V_k$$

V_∞ は明らかに (1) 式の解になっている．□

【定理 5】　アルゴリズム **II** の収束性は次式に支配される．

$$\|P-V_{k+1}\|\le c_1\|P-V_k\|+c_2\|P-V_k\|^2 \tag{43}$$

ここで，c_1，c_2 は k に独立な正の定数である．

（証明）**補題 3** の証明と同様にして

$$\begin{aligned}&V_{k+1}-P\\&=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\{\Upsilon_{k+1}-\Upsilon(P)\\&\quad+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\}\bar{\Omega}_{k+1}^j\end{aligned} \tag{44}$$

ノルムをとれば，**補題 1** によって，k に独立な α_1 が存在して

$$\begin{aligned}&\|P-V_{k+1}\|\\&\le\sum_{j=0}^{\infty}\|\bar{\Omega}_{k+1}^j\|^2\cdot\|\Upsilon_{k+1}-\Upsilon(P)\\&\quad+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\|\\&\le\{\|\Upsilon_{k+1}-\Upsilon(P)\|\\&\quad+\|A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\|\}/(1-\alpha_1^2)\end{aligned} \tag{45}$$

となる．(45) 式と**補題 2** から結果は明らか．□

5.　数値例と考察

離散型 Riccati 代数方程式は連続型 Riccati 代数方程式に比較して複雑な形をしており，数値計算上も取り扱いが困難だと予想される．

$p=1$ の場合について乱数を用いて行列 A_0，$A_1\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times 1}$，$C\in R^{1\times n}$ を発生し，$R=1$ とし，数値実験を試みた．OS は Windows2000 で，Matlab 5.2 を用いた．$n=5,7,9,11,13$ の場合の結果を Table 1 に示す．ここで，F_1,I_1 はアルゴリズム **I** で計算した場合の flop 数および収束までに要した繰り返し回数であり，F_2,I_2 はアルゴリズム **II** を用いた場合の対応する数値である．$n=7$ までは，連続型の場合と同様，アルゴリズム **II** がアルゴリズム **I** よりも優勢であるが，それより次数が高くなると，逆にアルゴリズム **I** がアルゴリズム **II** よりも優勢になり，さらに次数が増大すると，この傾

Table 1 Comparison of two methods

n	F_1/F_2	I_1/I_2
5	2.3222	0.6667
7	2.6266	0.4444
9	0.8723	0.0714
11	0.1648	0.0073
13	7.4298×10^{-5}	1.8716×10^{-8}

向は一段と著しくなる．これは，次数が高くても 2 次収束の効果は大きく，収束までのステップ数がほとんど変わらないことが大きく貢献していると考えられる．**定理 5** から予想されるように**アルゴリズム II** の場合は，次数の増加とともに収束性が急激に悪化している．連続型の場合，$n=20$ まで**アルゴリズム II** が優勢であるという結果が得られている [3]．上記の結果とこのことを比較すると，離散型の場合と連続型の場合では，まったく状況が異なることがわかる．

6. 結論

確率離散型 Riccati 代数方程式に対し，二つのアルゴリズムを提案し，その収束性を調べた．また，数値例によって次数が高い場合には**アルゴリズム I** の方が優勢であることを示した．

残された課題は，閉ループ系の固有値が単位円上にある場合について収束性の考察をすることである．

参考文献

[1] 唐, 河野, 鈴木：確率離散型 Riccati 代数方程式の可解性；計測自動制御学会論文集, Vol. 38, No. 2, pp. 227–229 (2002)

[2] D. L. Kleinman: On an iterative technique for Riccati equation; *IEEE Trans.*, AC-13, pp. 114–115 (1968)

[3] 河野, 中井, 横道：確率 Riccati 代数方程式の数値解法；計測自動制御学会論文集, Vol. 36, No. 12, pp. 1178–1179 (2000)

[4] G. A. Hewer: An iterative technique for the computation of the steady state gains for the discrete optimal regulator; *IEEE Trans.*, Vol. AC-16, pp. 382–383 (1971)

[5] C-H. Guo: Newton's method for discrete algebraic Riccati equations when the closed-loop matrix has eigenvalues on the unit circle; *SIAM J. Matrix Analysis and Application*, Vol. 20, No. 2, pp. 279–294 (1998)

[6] P. Lancaster: Explicit solutions of linear matrix equations; *SIAM Review*, Vol. 12, No. 4, pp. 544–566 (1970)

[7] R. H. Bartels and G. W. Stewart: Solution of the matrix equation $AX+XB=C$; *Communications of the ACM*, Vol. 15, No. 9, pp. 820–826 (1972)

付　　録

補題 1 の証明

アルゴリズム I における $\bar{\Omega}_k$ の構成法 (文献 [1] の**定理 1** の証明を参照) から，$\bar{\sigma}_k<1(k=0,1,\ldots)$ である．また

$$\lim_{k\to\infty}\bar{\sigma}_k=\bar{\sigma}$$

が成立する．仮定から $\bar{\sigma}<\alpha_1<1$ となる α_1 を選ぶことができる．

補題 2 の証明

最初に $\Omega-\Omega_{k+1}$ を計算する．

$$\begin{aligned}&\Omega-\Omega_{k+1}\\&=(B^{\mathrm T}PB+R)^{-1}B^{\mathrm T}P\\&\quad-(B^{\mathrm T}V_kB+R)^{-1}B^{\mathrm T}V_k\\&=R^{-1}B^{\mathrm T}(R_c+P^{-1})^{-1}\\&\quad-R^{-1}B^{\mathrm T}(R_c+V_k^{-1})^{-1}\\&=R^{-1}B^{\mathrm T}\{(R_c+P^{-1})^{-1}-(R_c+V_k^{-1})^{-1}\}\end{aligned}\tag{A1}$$

ただし，$R_c=BR^{-1}B^{\mathrm T}$ である．ここで，

$$\Psi=(R_c+P^{-1})^{-1}-(R_c+V_k^{-1})^{-1}\tag{A2}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}&(R_c+P^{-1})\Psi(R_c+V_k^{-1})\\&=P^{-1}(P-V_k)V_k^{-1}\end{aligned}\tag{A3}$$

であるから，

$$\Psi=(PR_c+I)^{-1}(P-V_k)(R_cV_k+I)^{-1}\tag{A4}$$

と表現できる．V_k の単調非増加性から $V_0\geq V_k$ が成立すること，および $V_k\geq P>0$ であることを考慮し，Ψ のノルムを計算すると，

$$\begin{aligned}&\|\Psi\|\\&\leq\|(PR_c+I)^{-1}\|\cdot\|P-V_k\|\cdot\|(R_cV_k+I)^{-1}\|\\&=\|(PR_c+I)^{-1}\|\cdot\|P-V_k\|\cdot\|V_k^{-1}(R_c+V_k^{-1})^{-1}\|\\&\leq\|(PR_c+I)^{-1}\|\cdot\|P-V_k\|\cdot\|V_k^{-1}\|\cdot\|(R_c+V_k^{-1})^{-1}\|\\&\leq\|(PR_c+I)^{-1}\|\cdot\|P-V_k\|\cdot\|P^{-1}\|\cdot\|(R_c+V_0^{-1})^{-1}\|\\&\leq\beta_1\|P-V_k\|\end{aligned}\tag{A5}$$

となる．ただし，$\beta_1=\|(PR_c+I)^{-1}\|\cdot\|P^{-1}\|\cdot\|(R_c+V_0^{-1})^{-1}\|$ である．つぎに (A1) 式を (15) 式の左辺に代入し，(A4) 式を用いると

$$\begin{aligned}&\|A_0^{\mathrm T}\Psi^{\mathrm T}BR^{-1}(B^{\mathrm T}PB+R)R^{-1}B^{\mathrm T}\Psi A_0\|\\&\leq\|\Psi A_0\|^2\cdot\|B(R^{-1}B^{\mathrm T}PBR^{-1}+R^{-1})B^{\mathrm T}\|\\&\leq\alpha_2\|P-V_k\|^2\end{aligned}\tag{A6}$$

が得られる．ただし，

$$\alpha_2=\beta_1\|A_0\|^2$$

$$\cdot\|B(R^{-1}B^{\mathrm{T}}PBR^{-1}+R^{-1})B^{\mathrm{T}}\| \tag{A7}$$

である．

□

補題 3 の証明

補題 4 と (1) 式から

$$\begin{aligned}
&A_0^{\mathrm{T}}\Omega_{k+1}^{\mathrm{T}}R\Omega_{k+1}A_0\\
&=-\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}}P\bar{\Omega}_{k+1}+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\
&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0+\bar{\Omega}^{\mathrm{T}}P\bar{\Omega}+A_0^{\mathrm{T}}\Omega^{\mathrm{T}}R\Omega A_0\\
&=-\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}}P\bar{\Omega}_{k+1}+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}\\
&\quad\cdot(B^{\mathrm{T}}PB+R)(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\\
&\quad+P-\Upsilon(P)-C^{\mathrm{T}}C
\end{aligned}\tag{A8}$$

が得られる．これを，(9) 式において k を $k+1$ に置き換えた式に代入し，変形すると，

$$\begin{aligned}
&V_{k+1}-P\\
&=\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}}(V_{k+1}-P)\bar{\Omega}_{k+1}+\Upsilon(V_{k+1})\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\
&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0-\Upsilon(P)
\end{aligned}\tag{A9}$$

が得られる．$\bar{\Omega}_{k+1}$ は安定であるから，

$$\begin{aligned}
&V_{k+1}-P\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}(\bar{\Omega}_{k+1}^{\mathrm{T}})^j\{\Upsilon(V_{k+1})-\Upsilon(P)\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}(\Omega-\Omega_{k+1})^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}PB+R)\\
&\quad\cdot(\Omega-\Omega_{k+1})A_0\}\bar{\Omega}_{k+1}^j
\end{aligned}\tag{A10}$$

と表現できる．

□

補題 4 の証明

つぎの等式が成立することを示せば十分である．

$$\begin{aligned}
&(A_0-B\Omega_1A_0)^{\mathrm{T}}V(A_0-B\Omega_1A_0)+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0\\
&=(A_0-B\Omega_0A_0)^{\mathrm{T}}V(A_0-B\Omega_0A_0)+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_0^{\mathrm{T}}R\Omega_0A_0\\
&\quad-(\Omega_0A_0-\Omega_1A_0)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)(\Omega_0A_0-\Omega_1A_0)
\end{aligned}\tag{A11}$$

以下で (A11) 式が成立することを示す．(30) 式から，$B^{\mathrm{T}}V=(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_1$ であるから，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺})&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}VB\Omega_1A_0-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VA_0\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VB\Omega_1A_0+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}R\Omega_1A_0\\
&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}VB\Omega_1A_0-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VA_0\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_1A_0\\
&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}VB\Omega_1A_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺})&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}VB\Omega_0A_0-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_0^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VA_0\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_0^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_1A_0\\
&\quad+A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_0A_0\\
&\quad-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_1A_0\\
&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}VB+R)\Omega_1A_0\\
&=A_0^{\mathrm{T}}VA_0-A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VA_0
\end{aligned}$$

$A_0^{\mathrm{T}}\Omega_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}VA_0=A_0^{\mathrm{T}}VB\Omega_1A_0$ であるから，右辺と左辺は一致する．

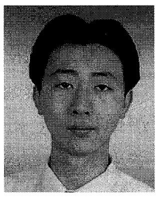
□

著 者 略 歴

河野 通夫（こうの みちお）(正会員)

1974 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了．同年同大学助手，1979 年東京商船大学助教授，1992 年宮崎大学教授．制御理論の研究に従事．工学博士．計測自動制御学会，情報処理学会，日本機械学会の会員．

唐 一兵（とう いっぺい）

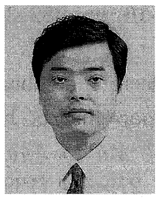


2000 年宮崎大学博士前期課程修了．2003 年中国コンピュータ（株）勤務，現在に至る．電気情報通信学会会員．離散型 Riccati 代数方程式の研究に従事．

高橋 伸弥（たかはし のぶや）

1996 年宮崎大学大学院工学研究科博士前期課程修了．同年同大学教務職員，1999 年同大学助手，現在に至る．制御理論の研究に従事．計測自動制御学会の会員．

佐藤 治（さとう おさむ）



1980 年東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了．同年同大学工学部助手，1988 年都城工業高等専門学校助教授，1990 年宮崎大学工学部助教授，2003 年同大学教授となり現在に至る．マニピュレータの特性解析と制御に関する研究に従事．工学博士．日本機械学会，精密工学会の会員．