システム制御情報学会論文誌，Vol. 15, No. 2, pp. 106–108, 2002

研究速報

ノルム型上界に基づくギャランティードコスト制御 —入力行列にも変動がある場合への拡張*

佐藤　治†・河野　通夫†・高橋　伸弥†・佐藤　浅次‡

Guaranteed Cost Control on the Basis of a Norm-Type Upper Bound —Extensions to the Case of Parameter Variations in an Input Matrix*

Osamu SATO†, Michio KONO†, Nobuya TAKAHASHI† and Asaji SATO‡

1. はじめに

パラメータ変動に対し，評価関数値の上界の存在を保証するような制御の方式をギャランティードコスト制御とよぶ．この問題の理論的解析の際，上界行列の概念が重要な役割を演じる．ギャランティードコスト制御を最初に提案したChangとPeng [1] は，固有値・固有ベクトルに基づく上界行列を用いたが，2次安定化の研究の発展という背景もあり，その後は2次上界が用いられることが多かった [2–4,6]．参考文献 [2, 3] では，それぞれブロック構造的不確かさと構造的不確かさの場合を扱っており，入力行列のパラメータ変動も考慮に入れているが，その結果は一般に保守的になりやすいことが指摘されている [11]．参考文献 [6] は，本速報と同じパラメータ変動を仮定しており，入力行列のパラメータ変動も考慮に入れているが，参考文献 [7] において，上界行列の構成に誤りのあることが指摘されている．また，いっぽうでは，線形上界を用いた研究もある [5,9]．これに対し，筆者らは，システム行列のみにパラメータ変動のある制御対象に対し，ノルム型上界に基づくギャランティードコスト制御を提案し，ギャランティードコスト制御系が構成できるための十分条件を与えた [10]．本速報では，入力行列にも，パラメータ変動がある場合を考察し，参考文献 [9] の結果を拡張している．

2. 準備事項

不確かさを含む制御対象

$$\dot{x}(t) = A(\xi)x(t) + B(\zeta)u(t) \tag{1}$$

を考えよう．ただし，$A(\xi)$, $B(\zeta)$ は A_0, B_0 をそれぞれ公称値とし，

$$A(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{p}\xi_i A_i,\ |\xi_i| \le 1 \tag{2}$$

$$B(\zeta) = B_0 - \sum_{i=1}^{q}\zeta_i B_i,\ 0 \le \zeta_i \le 1 \tag{3}$$

と表現できると仮定する．ここで，A_i, B_i は既知定数行列で，ξ_i, ζ_i は不確かさを表わすパラメータとする．また，評価関数は

$$J = \int_0^\infty \left\{x^{\mathrm{T}}(t)C^{\mathrm{T}}Cx(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt \tag{4}$$

とする．ただし，R は正定である．パラメータ変動によって評価関数値が増大したとき，その上界の存在を保証するような制御則をギャランティードコスト制御則という．このような制御則を求めるために行列

$$\begin{aligned}&T_1(A(\xi), B(\zeta), K, R)\\&\quad = \sum_{i=1}^{p}\xi_i(KA_i + A_i^{\mathrm{T}}K) + \sum_{i=1}^{q}\zeta_i KR_iK,\end{aligned} \tag{5}$$

を導入する．ただし，

$$R_i = B_iR^{-1}B_0^{\mathrm{T}} + B_0R^{-1}B_i^{\mathrm{T}},\ i = 1, \ldots, q \tag{6}$$

である．上記の制御則は，$T_1(A(\xi), B(\zeta), K, R)$ の上界行列 $U_1(A,\ B,\ K,\ R)$ を付加項としてもつRiccati代数方程式

$$\begin{aligned}&C^{\mathrm{T}}C + KA_0 + A_0^{\mathrm{T}}K - KB_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}K\\&\quad + U_1(A, B, K, R) = 0\end{aligned} \tag{7}$$

の解 K を用いて

$$u^*(t) = -R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}Kx(t) \tag{8}$$

によって与えられる．[9]

* 原稿受付　2001年6月14日
† 宮崎大学　工学部　情報システム工学科　Faculty of Enginnering, Miyazaki University; Gakuen-Kibanadai nishi, Miyazaki city, Miyazaki 889-2192, JAPAN
‡ 都城工業高等専門学校　Miyakonojo National College of Technology; Yoshio, Miyakonojo city, Miyazaki 885-8567, JAPAN
Key Words: linear control system, guaranteed cost control, norm-type Riccati equation.

3. 主な結果

正の定数 a を

$$a = 2\sum_{i=1}^{p} \|A_i\| \tag{9}$$

と定義する．ただし，$\|A_i\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A_i^{\mathrm{T}} A_i)}$ であり，$\lambda_{\max}$ は最大固有値を表す．また，R_i の 0 でない固有値に対応する右固有ベクトルを並べた行列を V_i とする．R_i のランクを r_i とすれば，当然 V_i の列の数は r_i となる．

$$V = \sum_{i=1}^{q} V_i |\Lambda_{r_i}| V_i^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

と定義する．ただし，Λ_{r_i} は R_i の 0 でない固有値を対角要素としてもつ対角行列であり，$|\Lambda_{r_i}|$ は Λ_{r_i} の各要素の絶対値をとった行列を表す．このとき，つぎの定理が成立する．

【定理 1】 つぎの行列は，$T_1(A(\xi), B(\zeta), K, R)$ の上界行列になる．

$$\Upsilon(K) = (a\|K\| \cdot I_n + KVK) \tag{11}$$

ただし，I_n は n 次の単位行列である．

（証明） (11) 式の第 1 項が (5) 式の第 1 項の上界行列になることは文献 [10] に示されている．以下では，第 2 項が上界行列になっていることを示す．R_i の零空間の直交基ベクトルを並べた行列を N_i とおく．そのとき，$[V_i, N_i]$ は直交行列となり，

$$\begin{bmatrix} V_i^{\mathrm{T}} \\ N_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} R_i \begin{bmatrix} V_i & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{r_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} |\Lambda_{r_i}| & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成立する．上式に左から $K[V_i,\, N_i]$ を，右から $[V_i,\, N_i]^{\mathrm{T}} K$ をかけると，

$$KR_iK \le KV_i |\Lambda_{ri}| V_i^{\mathrm{T}} K$$

となり，

$$\zeta_i KR_iK \le \zeta_i KV_i |\Lambda_{r_i}| V_i^{\mathrm{T}} K \le KV_i |\Lambda_{r_i}| V_i^{\mathrm{T}} K$$

が成立するから，

$$\sum_{i=1}^{q} \zeta_i KR_iK \le KVK \tag{12}$$

が得られる． □

（注意 1） この結果は，参考文献 [9] と異なり，R_i の定値性（[9] の仮定 A1）を要求していない．

入力行列の変動が大き過ぎない条件としてつぎの仮定をおく．

i) $V \le B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}}$

この仮定のもとで，

$$D = B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} - V \tag{13}$$

とおく．**定理 1** と文献 [9,10] の結果からつぎの結果が得られる．

【定理 2】 仮定 i) が成立し，さらにつぎの条件がみたされていると仮定する．

ii) C は零行列でなく，$(A_0,\, D)$ は可安定である．

iii) 次式が成立する．

$$a \cdot \left\{ \inf_F \left\| \int_0^\infty e^{t(A_0 - DF)^{\mathrm{T}}} \cdot e^{t(A_0 - DF)} dt \right\| \right\} < 1 \tag{14}$$

そのとき，ノルム型 Riccati 代数方程式

$$C^{\mathrm{T}} C + KA_0 + A_0^{\mathrm{T}} K - KDK + a \cdot \|K\| \cdot I_n = 0 \tag{15}$$

に正定解 K が存在し，ギャランティードコストを保証する制御則は

$$u^*(t) = -R^{-1} B_0^{\mathrm{T}} K x(t) \tag{16}$$

によって与えられる．

（注意 2） $(C, A(\xi))$ が可検出であれば，制御則 (16) はロバスト安定性も保証している [9]．

（注意 3） (14) 式において，ノルムの中の行列を P とおくと，P は次の Lyapunov 方程式の解となる [8]．

$$(A_0 - DF)^{\mathrm{T}} P + P(A_0 - DF) + I_n = 0$$

したがって，条件 iii) が満たされていることの十分性は，ある F に対して次式が満足されていることが確認できればよい．

$$a \cdot \|P(F)\| < 1 \tag{17}$$

4. 数値例

以下のようなシステムに対して **3.** の結果を適用する．

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0 \\ 0.15 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/20 \end{bmatrix}$$

ただし，$p = 1$, $q = 1$ である．この数値例において，R_1 の固有値は

$$(\ 0,\ 2.8078,\ -0.8028\ )$$

となり，定値性をもたないので参考文献[9]の結果は適用できない．行列Dは次のように与えられる．

$$D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & -1.5\\ 0 & -1.5 & 20\end{bmatrix}$$

この行列は半正定であるので，仮定i)はみたされる．また，(A_0,D)の可制御性行列のランクは3となるので，条件ii)も満たされている．Fが次の場合について考える．

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -0.1458 & 0.0285\\ 0 & -0.1109 & 0.1521\end{bmatrix}$$

このとき，(17)の左辺の値は0.6267となり，条件iii)を満たしている．(15)式を解くことによって，次のフィードバック行列が求められた．

$$R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}K=\begin{bmatrix}-0.0936 & 3.0751 & -0.5296\\ 2.1632 & -1.0591 & 7.4258\end{bmatrix}$$

パラメータ変動を受けたときの閉ループ系は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&A_c(A(\xi),B(\zeta))\\ &=A_0-B_0R^{-1}B_0^{\mathrm{T}}K+\sum_{i=1}^{p}\xi_iA_i+\sum_{i=1}^{q}\zeta_iB_iR^{-1}B_0^{\mathrm{T}}K\end{aligned}$$

$\xi_1=\xi_2=\zeta_1=1$の場合，この閉ループ系の固有値は次のように求められる．

$$(\ -1.3837,\ \ -5.8227\pm0.6459j\ )$$

ただし，jは虚数単位を表す．以上より，このパラメータ変動に対しロバスト安定性を保証していることが確認できた．

5. おわりに

入力行列にもパラメータ変動がある場合についてノルム型の上界行列を提案し，ギャランティードコスト制御則が存在するための十分条件を求めた．また，数値例を与え，その有効性を示した．

将来の課題としては，他の上界行列関数（たとえば，2次上界）を用いた場合との制御性能の比較や，(15)式を解く有効なアルゴリズムの開発等がある．

参考文献

[1] S. S. Chang and T. K. C. Peng: Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters; *IEEE Trans.* Vol. AC17, No. 4, pp. 474–483 (1972)

[2] D. S. Bernstein and W. M. Haddad: The optimal projection equations with Petersen-Hollot bounds: Robust stability and performance via fixed-order dynamic compensation for systems with structured real-valued parameter uncertainty; *IEEE Trans. on Automat. Cont.*, Vol. 33, No. 6, pp. 578–582 (1988)

[3] I. R. Petersen and D. C. McFarlane: Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems; *IEEE Trans. on Automat. Cont.*, Vol. 39, No. 9, pp. 1971–1977 (1994)

[4] C. T. Liou and C. T. Yang: Guaranteed cost control of tracking problems with large plant uncertainty; *International Journal of Cont.*, Vol. 45, pp. 2161–2171 (1987)

[5] O. I. Kosmidou and P. Bertrand: Robust-controller design for systems with large parameter variations; *International Journal of Cont.*, Vol. 45, pp. 927–938 (1987)

[6] O. I. Kosmidou: Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: an extension of guaranteed cost control approach; *International Journal of Cont.*, Vol. 52, pp. 627–640 (1990)

[7] J. S. Luo and A. Johnson: Comment on 'Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: an extension of guaranteed cost control approach'; *International Journal of Cont.*, Vol. 57, pp. 999–1002 (1993)

[8] Z. Gajic and M. T. J. Qureshi: *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press (1995)

[9] 高橋，河野，平沼，佐藤：ギャランティードコスト制御の一般化；日本機械学会論文集（C編），Vol. 66, No. 645, pp. 1531–1536（2000）

[10] 河野，高橋，平沼，佐藤：ノルム型Riccati代数方程式の解の存在と数値解法；システム制御情報学会論文誌，Vol. 13, No. 11, pp. 504–510（2000）

[11] 木村，藤井，森：ロバスト制御，コロナ社（1994）