

平成27年度(2015年度)博士論文

高効率・高出力ワイヤレス給電技術への
システム論的アプローチ

宮崎大学大学院農学工学総合研究科

物質・情報工学専攻生産工学教育コース

平成25年4月入学

山口 和也

主指導教員 穂高 一条教授

2016年3月

Doctoral Dissertation

A System Theoretical Approach for High
Efficiency and Output in Wireless Power
Transfer

Interdisciplinary Graduate School of Agriculture and Engineering,
University of Miyazaki

Kazuya Yamaguchi

Supervisor: Professor Ichijo Hodaka

March, 2016

目次

1	序論	5
1.1	研究背景・目的	5
1.1.1	ワイヤレス給電の利点	5
1.1.2	電気自動車への応用	5
1.1.3	その他の応用	5
1.1.4	ワイヤレス給電に関する研究の現状	6
1.1.5	本論文の目的	6
1.2	本論文の構成	8
1.3	本論文で用いる主なパラメータ	9
1.4	状態方程式と定常解	10
1.4.1	状態方程式	10
1.4.2	周期解	10
1.4.3	状態変数について	11
1.4.4	線形性	12
1.4.5	正弦波入力の場合の定常解	12
1.4.6	矩形波入力の場合の定常解	13
1.5	行列指数関数	15
1.5.1	対角化	15
1.5.2	ジョルダン標準形	17
1.6	伝達関数とボード線図	20
1.6.1	伝達関数	20
1.6.2	ボード線図	21
1.7	共振角周波数	23
1.8	回路の Q 値	24
1.9	減衰係数	27
1.10	安定性	29
1.10.1	システムの安定性	29
1.10.2	フルビッツの安定判別法	30
1.11	インダクタンスの計算	31
1.11.1	1回巻の円状コイル電流が1点に作る磁束密度	31
1.11.2	1回巻の円状コイル電流が別の円板内に作る磁束	32
1.11.3	式の整理	33
1.11.4	自己インダクタンスと相互インダクタンスの導出	33
2	ワイヤレス給電の電力と効率	39
2.1	はじめに	39
2.2	ワイヤレス給電回路と数的モデル	40
2.3	電力と効率の定義と算出	41
2.4	共振現象と電力	43
2.5	電力と効率の数値計算	45
2.6	周波数以外の要素が効率に与える影響	47

2.7	おわりに	49
3	ワイヤレス給電の効率を最大化する周波数の数式表現	51
3.1	はじめに	51
3.2	電力を最大にする角周波数の数式表現	52
3.3	効率を最大にする角周波数の数式表現	54
3.4	様々な要素についての効率の最大化	56
3.5	2次側回路が並列接続されている場合	58
3.6	おわりに	60
4	矩形波入力を用いたワイヤレス給電の電力と効率の数値計算	62
4.1	はじめに	62
4.2	入力の条件	63
4.3	基本的なワイヤレス給電回路での電力と効率	64
4.4	矩形波入力時の平均電力	66
4.5	他の数値例	70
4.6	おわりに	74
5	結論	76
6	今後の展望	77
	謝辞	79

1 序論

1.1 研究背景・目的

1.1.1 ワイヤレス給電の利点

電力を無線で送るワイヤレス給電技術の実用化に向けた研究・開発が、最近盛んに行われている。これは、電力をコイル対を介して1次側（供給側）から2次側（負荷側）へ電磁気現象を利用して送る仕組みである。その技術は、1914年にニコラ・テスラにより導入された[1]。ワイヤレス給電においては通常の給電方式と違い電源と負荷間に電線を必要としないので、その利便性は明らかであろう。安全面においても、電源・負荷間に金属接点を必要としないので感電の心配がない、人間が立ち入るには危険な場所に存在する機器への給電を遠隔で行える、といったことが挙げられる。環境面でも、自動車等の原動力が石油から電気へ徐々にシフトしている中、排気ガスを出さない電気自動車への便利な充電システムとして注目されている。以上のように、ワイヤレス給電技術は今後の給電システムに変革を起こすと期待できる。

1.1.2 電気自動車への応用

最近では、電気自動車へのワイヤレス給電システムが各国の企業により研究・開発されている。それらの先駆となったのが、2007年にMassachusetts Institute of Technology(MIT)が報告した磁界共鳴式のワイヤレス給電システムである[2]。この報告によると、電源から1m離れた負荷へ約90%もの効率で電力を給電することに成功したとある。その成果を元にした給電システムを実用化・商業化するために、同年に設立された米国のWiTricity社により、電源と負荷との距離20cm間を周波数145kHzの電源を用いて3.3kWの電力を効率90%で送電できる給電システムの開発が、Delphi社やトヨタ自動車株式会社、株式会社IHI、三菱自動車工業株式会社などの企業と共に進められている。日本国内においても、IHIが距離15～20cm間を周波数3.3kWの電源を用いて効率90%で充電するシステムの検証を行った[3]。住友電気工業は距離 14 ± 3 cm間を周波数85kHzの電源で3kWの電力をソレノイド型コイルを用いて送るシステムを発表している[4]。さらに、TDKが距離15～20cm間を電力3kW、効率80～90%で送電し、かつ20%以下の位置ずれなら許容するというシステムを用いそれを元に製品化した。普通自動車のみならず、バスやタクシー等の公共の交通機関へのワイヤレス給電の応用も広がっている[5]。このように、ワイヤレス給電技術が電気自動車の充電方式に与える影響は大きい。

1.1.3 その他の応用

ワイヤレス給電技術は、電気自動車以外への応用にも大いに期待できる。身近な例として、携帯電話・電気シェーバー・電動歯ブラシを給電パッドに置くだけで給電できるという利便性がある。通常これらへの給電のために電源・負荷間に導線をつなぐが、ワイヤレス給電をこれらへの給電のためにうまく用いることができれば、そのような手間を省くことができる。特に電動歯ブラシは水場で用いる場合が多いので、従来通り導線を用いて給電を行えばショートする可能性があるが、ワイヤレス給電システムを用いて給電を行うのならば導線を必要としないのでそのような心配がない。またロボットへの給電も、一機ごとにバッテリーを

外してそれを専用の充電器で充電しなければならない、という手間をかけずに給電可能である。医療分野においても、人の体内に埋め込まれているペースメーカーに外部から電力を送る際に用いられている。さらには、深海や砂漠、宇宙空間など、通常は人間が立ち入ることが困難な場所に設置されている機器へ給電する際にも非常に便利である。以上のように、ワイヤレス給電は様々な分野・用途で用いられている技術であり、今後の電力輸送技術の発展に大きく貢献するものである。

1.1.4 ワイヤレス給電に関する研究の現状

ワイヤレス給電に関する多くの論文では、回路やコイルの質を表す Q 値を用いて電力や効率の式が求められている。[6] は効率の式を回路定数の代わりに Q 値を用いて表した。[7] は 1 次側・2 次側の回路をそれぞれ直列・並列の場合で考え、効率の数式表現を導出した。また、[8] は 1 次側と 2 次側との回路の間に中継回路を挟んだワイヤレス給電回路について、 Q 値を用いて効率と最適抵抗負荷を数式表現した。中継回路を挟むことで、 Q 値を向上させることができるという報告もされている [9]。中継回路にはさらに磁束の拡散を防ぐ働きもある [10]。

その他、ワイヤレス給電の効率を高めるために指向性エネルギーを考慮したアンテナの利用が提案されている [11]。また、効率的な給電のために補償コンデンサを利用するとよいことが証明されている [12]。ワイヤレス給電は電磁場を介して行われる給電法なので、電力伝搬が人体に与える影響の調査が行われている [13]。さらに、共振状態にある電磁場の様子が調査されている [14]。加えて、電力・効率を考える上で重要な磁束と相互インダクタンスの計算方法が、コイルの半径・巻数・位置を用いて示されている [15]。一方、ワイヤレス給電は 1 次側・2 次側回路が電氣的に離れているが、それが等価回路として通常の電気回路のように解析されている [16, 17]。そして、通常のワイヤレス給電では入力として交流電源を用いるが、発振回路を用いた直流電源によるワイヤレス給電方式が提案されている [18]。

1.1.5 本論文の目的

本論文の目的の一つは、ワイヤレス給電システムを数式で表現し、システム論的に解析し、そして電力・効率を計算することである。具体的には、ワイヤレス給電の回路図から、オームの法則やキルヒホッフの法則等の電気回路の基本法則より回路方程式を求め、それを状態方程式としてまとめる。それを用いて、定常解、さらにはその定常解と入力との線形結合より電圧・電流を表現し、それらを元に電源と抵抗負荷の平均電力、最終的に効率の式を得る。本論文で示す解析方法をあらゆるワイヤレス給電回路へ応用できれば、解析対象となる回路についての電力と効率の値や式を論理的に求めることができる。その結果、理想的なワイヤレス給電の実現のためにはどのような素子を用いればよいのか、どのような電源の周波数を選べばよいのか、どの種類の交流電源を用いればよいのか、などを知ることができる。

ワイヤレス給電でよく議論される問題と、その議論を行う上で考えられる設計パラメータをまとめたものを表 1 に示す。また、各論文と本論文との比較を、表 2 に示す。

表 1: ワイヤレス給電の目的と設計パラメータ

ワイヤレス給電の目的	受電側の電力, および効率の最大化	
設計パラメータ	電源	周波数 波形
	配置	距離 向き
	コイル	形状 巻き方
	回路	直列 並列 中継 結合係数 相互インダクタンス Q 値
	素子	負荷抵抗 コンデンサ インピーダンス

表 2: 各論文と本論文との比較

論文	設計パラメータ	備考
[6]	Q 値, 結合係数	効率を Q 値と結合係数で数式表現
[7]	Q 値, 結合係数, 直列, 並列	効率を直列・並列回路で数式表現し最大化
[8, 17]	抵抗負荷	電源の角周波数を $1/\sqrt{LC}$ で固定し効率を数式表現
[9]	結合係数	電源の角周波数を $1/\sqrt{LC}$ で固定し効率を数式表現
[11]	コイル間距離, 向き	コイル配置による効率の変化を計算
[14]	電源の周波数	共振状態の電磁場での効率の計算
[15]	相互インダクタンス	相互インダクタンスの導出方法
[16]	インピーダンス	$R_1 = R_2, L_1 = L_2, C_1 = C_2$ と仮定し効率を数式表現
本論文	電源の周波数, 抵抗負荷, 波形	正弦波入力による電力と効率の数値計算 (2 章) 効率の数式表現と最大化 (3 章) 矩形波入力による電力と効率の数値計算 (4 章)

1.2 本論文の構成

本論文では、ワイヤレス給電について様々な観点から論じる。前小章で述べたように回路方程式より状態方程式を立て、それを解くことで一般解、定常解を得て、それを用いて電力・効率を計算するという過程は全ての解析で共通である。以下に章ごとの概要を示す。

- 第1章 序論

前述した研究背景からはじまり、以降は本論文全体に関連する用語の定義の明確化、式の導出過程、原理・定理の解説等を行う。この章で扱ったものを前提として以降の論述を進めていく。

- 第2章 ワイヤレス給電の電力と効率

ワイヤレス給電の電力と効率を、数値計算により求める手順を示している。多くのワイヤレス給電の論文で論じられている共振現象と電力・効率との関係について、2つの数値例を出して比較・検討している。最終的に、必ずしも電力と効率が同じ周波数で最大化されるとは限らないことを述べる。

- 第3章 ワイヤレス給電の効率を最大化する周波数の数式表現

第2章で論じたことをより一般的に論じるために、ワイヤレス給電の効率を回路定数を用いて数式表現している。ここで共振周波数と効率を最大化する周波数が一般的に異なるということを証明している。また効率の式を一般化したために、どの回路素子がどのように効率に影響を及ぼすかがわかる。

- 第4章 矩形波入力を用いたワイヤレス給電の電力と効率の数値計算

第3章まではAC電源として正弦波入力を用いていたが、本章では矩形波をワイヤレス給電回路の入力として用いて数値計算を行っている。複数の周波数成分を持つ矩形波の特性から、正弦波入力か矩形波入力かの違いでなぜ、どのように電力に差が出るのかを考察する。最終的に、どのような場合でどちらの入力を用いればよいかを結論付ける。

- 第5章 結論

第2章から第4章までの結果を参照し、最終的な結論を導く。

- 第6章 今後の展望

本論文の延長や他に考察すべきものを列挙して、今後の課題としている。

1.3 本論文で用いる主なパラメータ

本論文では，様々な計算のために多くのパラメータを用いている．表3に，各パラメータとそれぞれの意味を記す．

表 3: 本論文で用いる主なパラメーター一覧

パラメータ	意味
$u[\text{V}]$	ワイヤレス給電回路の電源電圧
$\omega[\text{rad/sec}]$	電源電圧の角周波数
$T[\text{sec}]$	電源電圧の周期
d	矩形波入力デューティ比 ($0 \leq d \leq 1$)
$R_1, R_2[\Omega]$	1 次側, 2 次側の内部抵抗
$R_L[\Omega]$	2 次側の負荷抵抗
$L_1, L_2[\text{H}]$	1 次側, 2 次側の自己インダクタンス
$M[\text{H}]$	1 次側, 2 次側間の相互インダクタンス
$C_1, C_2[\text{F}]$	1 次側, 2 次側の寄生容量
$v_1, v_2[\text{V}]$	1 次側, 2 次側のコンデンサにかかる電圧
$i_1, i_2[\text{A}]$	1 次側, 2 次側のコイルを流れる電流
x	状態方程式の状態変数
A, B	状態方程式内の定数行列
I	単位行列
$P_1, P_2[\text{W}]$	電源, 抵抗負荷の平均電力
η	効率 (P_1 に対する P_2 の比)

1.4 状態方程式と定常解

1.4.1 状態方程式

本論文では、ワイヤレス給電回路を表す回路方程式を状態方程式の形に書き直し、解析を行う。これは現代制御の分野において基本となる形式の方程式であり、線形定数係数微分方程式の一つである。この状態方程式の変数は状態変数とよばれ、初期値を任意に指定できるものである。本論文で扱う状態方程式の中の状態変数は、コイルを流れる電流、もしくはコンデンサの両端の電圧である。手順としては、まずオームの法則やキルヒホッフの法則などの電気回路の基本法則から回路方程式を導き、電源の電圧を入力としてコイルを流れる電流、コンデンサにかかる電圧を状態変数として状態空間モデルを立てる。その状態方程式の解を求めて、特定の条件を満たす定常解を求める。その定常解より、最終的に電力や効率の数式表現や数値計算を導く。

x を状態変数列ベクトル、 A, B を定数行列、 u を周期 T をもつ入力としたとき、次の x に関する 1 階の行列微分方程式を状態方程式という。

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (\text{ここで } \dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ である}) \quad (1)$$

また、この状態方程式の一般解は、行列指数関数を用いて

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2)$$

と表されることはよく知られている。

1.4.2 周期解

一般解 (2) は、初期値 $x(0)$ の項を含む。後に求める平均電力や効率はこの状態方程式 (1) の周期的な解に基づくので、式 (2) よりその周期的な解を求めておく。ここで、 $x(t)$ が周期的な関数になるための条件

$$x(t) = x(t + T) \quad (3)$$

を満たす解を考える。式 (3) に式 (2) を代入すると、この条件を満たす $x(0)$ が、 $\det(I - e^{AT}) \neq 0$ を仮定した上で

$$x(0) = (I - e^{AT})^{-1} e^{A(T-t)} \int_0^T e^{-A\tau} Bu(t + \tau) d\tau - \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (4)$$

と整理できる。これを式 (2) へ代入した後の $x(t)$ を $x_{ss}(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} x_{ss}(t) &= e^{At} \left[(I - e^{AT})^{-1} e^{A(T-t)} \int_0^T e^{-A\tau} Bu(t + \tau) d\tau - \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right] + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \\ &= (I - e^{AT})^{-1} e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} Bu(t + \tau) d\tau - e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \\ &= (I - e^{AT})^{-1} e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} Bu(t + \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

となる．式 (5) は $u(t + \tau)$ のみが時間 t の要素を持ち，この $u(t + \tau)$ は周期 T の周期関数であると仮定しているため，周期 T をもつことがわかる．この x_{ss} を周期入力 u に対する周期解という．今後の計算に度々用いる電圧，電流は元はこれらを状態変数とする状態方程式を解くことで得られるものであるが，これらは特に記述のない限り周期解であるとする．

1.4.3 状態変数について

状態方程式の中の変数である状態変数は，システムのふるまいの一部を表現する．システムにおいては，状態変数と入力との線形結合によりシステムのふるまいを表す全ての変数を表現することができる．電気回路の場合，通常はコイルの電流とコンデンサの電圧が状態変数になるので，コイル，コンデンサの数が状態変数ベクトルの次元になることが多い（これらの数が n 個ならば，状態変数ベクトルのサイズは $n \times 1$ ）が，状態変数と入力とは独立でなければならないので，回路構成によってはコイルの電流，コンデンサの電圧が状態変数に選ぶことができない場合もある．以下はその例である．

図 1 の回路では，電圧源の電圧 u とコンデンサの電圧 v とが独立になりえない．図 2 の回路では，電流源の電流 u とコイルの電流 i とが独立になりえない．図 3 の回路では，いずれか一つのコイルの電流が他の 2 つのコイルの電流によって決定される．

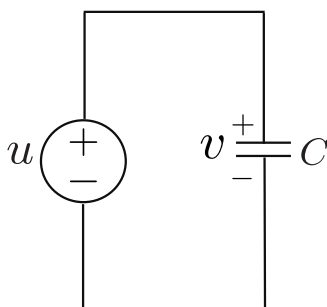


図 1: 電圧源の電圧とコンデンサの電圧とが独立でない場合

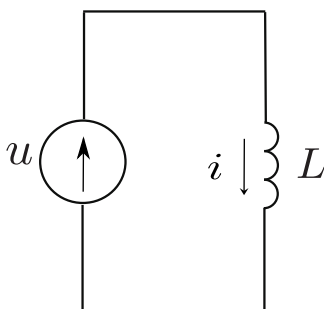


図 2: 電流源の電流とコイルの電流とが独立でない場合

よって，上記のような回路構成においては，先に述べたような「コイル，コンデンサの数＝状態変数ベクトルの次元」とは単純にはできない．ワイヤレス給電回路を設計する際にも，これらのことをよく考慮して，適切な回路を用いなければならない．

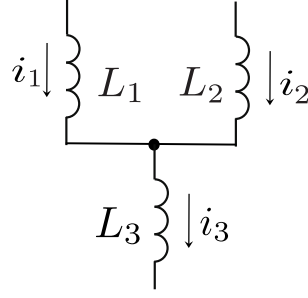


図 3: 1つの電流が他の2つの電流から決まる場合

1.4.4 線形性

実数または関数の f を考える．この f が,

$$\begin{cases} f(\alpha x) = \alpha f(x) \\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \end{cases} \quad (\alpha : \text{スカラー}) \quad (6)$$

を満たすとき， f は線形であるという．制御工学で頻繁に用いられる伝達関数や状態方程式などは，この線形性を満たす．また，非線形な制御対象に対し線形なモデルで近似するために，微小な範囲に動作点を制限することもある．振り子の振動の運動を考える際に，ある基準値からわずかに振れた範囲に注目したり，トランジスタを含む回路である電圧値からの微小な電圧の変化に対するある電流値からの電流の変化を線形近似することでモデリングを行うことがその一例である．本論文で扱う制御対象である電気回路においては，線形定数係数常微分方程式で表されるシステムは時不変であり，電圧，電流を状態変数とする状態方程式は線形定数係数常微分方程式となる．その定常解の周波数は，入力周波数と等しくなる．また，定常解の振幅は入力の振幅のゲイン（入力・出力の振幅の比）倍に比例する．この線形性より定常解の振幅は入力の振幅に比例する一方で，電力は電圧と電流の積で表現されることからわかるように入力の振幅の2乗に比例するので，非線形である．

1.4.5 正弦波入力の場合の定常解

一般的に，電気回路の交流電源として正弦波入力が多く用いられている．ここで，正弦波入力の場合の定常解 x_{ss} を考える．式 (5) に角周波数 ω の入力 $u = \sin \omega t$ を代入すると，

$$x_{ss}(t) = (I - e^{AT})^{-1} e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} B \sin \omega(t + \tau) d\tau \quad (7)$$

となる．ここで，上式内の積分は部分積分法より

$$\int_0^T e^{-A\tau} \sin \omega(t + \tau) d\tau = (\omega I \cos \omega t + A \sin \omega t)(I - e^{-AT})(\omega^2 I + A^2)^{-1} \quad (8)$$

となるので，これを元の式に代入すると

$$\begin{aligned} x_{ss}(t) &= (I - e^{AT})^{-1} e^{AT} (\omega I \cos \omega t + A \sin \omega t)(I - e^{-AT})(\omega^2 I + A^2)^{-1} B \\ &= -(\omega I \cos \omega t + A \sin \omega t)(\omega^2 I + A^2)^{-1} B \end{aligned} \quad (9)$$

が得られる．ただし， $\det(\omega^2 I + A^2) \neq 0$ と仮定したが， A が安定行列の場合は常に成立する．入力角周波数が ω であったのに対し，この定常解 (9) の角周波数も同じく ω になっていることが分かる．正弦波入力を用いた電力や効率の計算は，この定常解 (9) のうち必要な要素（コイルを流れる電流やコンデンサの両端にかかる電圧）をその都度取り出して計算している．

1.4.6 矩形波入力の場合の定常解

電気回路の交流電源として，正弦波だけでなく矩形波が用いられることがある．ここで矩形波とは，

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < Td) \\ 0 & (Td \leq t < T) \end{cases}$$

かつ $u(t + T) = u(t)$ (10)

と定義され，図 4 に見られるような 2 つの値（図 4 では 1 と 0）を交互に発生させるものである．各値の持続時間（ホールド時間）は，FET などの素子を外部のマイコンなどからスイッチング制御することで決めることが多い．FET の例では，FET のゲートとソース間の電圧をマイコンで一定の周期で操作することで回路を短絡・開放し，電圧や電流の量を調節する．式 (10) において， $0 \leq t < Td$ の時間をオン時間， $Td \leq t < T$ の時間をオフ時間とよび， d をデューティ比とよぶ．ここで，図 4 に表される矩形波を入力として用いた場合の定常解を求める．

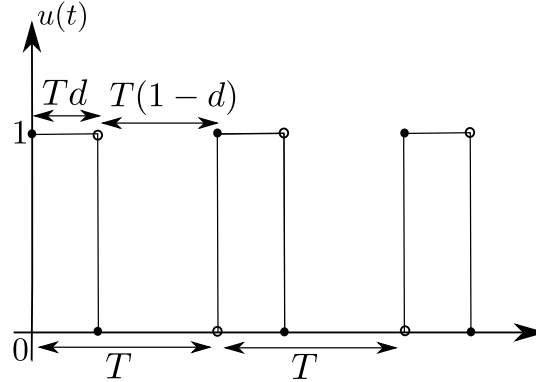


図 4: 矩形波

式 (5) に式 (10) を代入し計算していくが，(5) 内の積分の計算は以下のように場合分けして計算しなければならない．

1) $0 \leq t < Td$ の場合

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-Ap} B u(t+p) dp &= \\ &= \int_0^{Td-t} e^{-Ap} B u(t+p) dp + \int_{Td-t}^{T-t} e^{-Ap} B u(t+p) dp + \int_{T-t}^T e^{-Ap} B u(t+p) dp \\ &= \int_0^{Td-t} e^{-Ap} B dp + \int_{T-t}^T e^{-Ap} B dp \\ &= -A^{-1} e^{-AT} (e^{A(t+T(1-d))} - e^{At} - e^{AT} + I) B \end{aligned} \quad (11)$$

2) $Td \leq t < T$ の場合

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T e^{-Ap} Bu(t+p) dp = \\
 & = \int_0^{T-t} e^{-Ap} Bu(t+p) dp + \int_{T-t}^{T+dt-t} e^{-Ap} Bu(t+p) dp + \int_{T+dt-t}^T e^{-Ap} Bu(t+p) dp \\
 & = \int_{T-t}^{T+dt-t} e^{-Ap} B dp \\
 & = -A^{-1} e^{-AT} (e^{A(t-Td)} - e^{At}) B.
 \end{aligned} \tag{12}$$

よって、上述のような矩形波を入力として用いた場合の定常解 x_{ss} は、

$$x_{ss}(t) = \begin{cases} -(I - e^{AT})^{-1} A^{-1} (e^{A(t+T(1-d))} - e^{At} - e^{AT} + I) B & (0 \leq t < Td) \\ -(I - e^{AT})^{-1} A^{-1} (e^{A(t-Td)} - e^{At}) B & (Td \leq t < T) \end{cases} \tag{13}$$

となる．正弦波の定常解 (9) と比べ矩形波の定常解 (13) は行列指数関数が残っているため、これ以上の計算には以降の小章で解説する対角化の考え方を導入しなければならない．以上で正弦波と矩形波をそれぞれ入力として用いた場合の定常解が求められたので、両者の比較を行う．正弦波入力は振幅と位相、周波数を調節できるが、矩形波入力はさらにデューティ比を変更することができる（PWM 制御）．また正弦波を電子回路を用いてハードウェア的に生成するには、多くのトランジスタが必要になるため多くの電力を要するが、矩形波はそれより少ない数のトランジスタで生成でき、小さな電力でよい．例えば、正弦波はファンクションジェネレータなどで生成できるが、矩形波は電池等の 5V 電源により駆動されるマイクロコントローラで生成することができる．一方、式 (13) に見られるように矩形波入力を用いた際の定常解の式は行列指数関数を含む．そのため電力や効率の計算を行う際に、その計算に必要な対角化のために正方行列 A の固有値を求めなければならず、 A のサイズが大きくなればそれほど、言い換えると回路内の素子の数が多くなればなるほど、それだけ特性方程式の次数も増えていき困難である．一部の論文は共振現象を用いて矩形波を正弦波として近似しているが、これは前述したような問題を近似的に解決しようとしているためであると推測できる．よってそれぞれの波形の性質をよく理解し、計算を正しく行い、状況に応じてこれらの波を使い分けることが重要である．

1.5 行列指数関数

式 (13) 内には，行列指数関数 e^A が含まれる．これは正方行列 A を用いて表現される関数であり，

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots \quad (14)$$

という無限等比級数で定義されるものであり，任意の実行列 A に対して絶対収束する．これは，スカラー関数

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^k}{k!} + \cdots \quad (15)$$

を行列に拡張したものである．さらに， e^A は e^a と類似した以下の性質を持つ．

$$\begin{aligned} e^0 &= I \\ e^{aI} &= e^a I \\ Be^A &= e^A B \text{ (if } AB = BA) \\ e^{A+B} &= e^A e^B \text{ (if } AB = BA) \\ \frac{d}{dt} e^{At} &= Ae^{At} = e^{At} A \\ Pe^A P^{-1} &= e^{PAP^{-1}} \text{ (det } P \neq 0) \\ (e^A)^{-1} &= e^{-A} \\ e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]. \\ (F(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F]) & \end{aligned} \quad (16)$$

ここでは上述の証明は省略するが，本論文での行列指数関数に関する諸計算はこれらの性質を用いている．

1.5.1 対角化

A が次のような $n \times n$ の対角行列であるとする．

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}. \quad (17)$$

このとき、 e^{At} は式 (14) より

$$\begin{aligned}
 e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} a_1 t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n t \end{bmatrix}^k \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1 t)^k}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_2 t)^k}{k!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_3 t)^k}{k!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n t)^k}{k!} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{a_n t} \end{bmatrix} \tag{18}
 \end{aligned}$$

と計算される．しかし，一般的には A は対角行列でない場合が多い．そこで，行列の対角化を経由して行列指数関数を求める．対角化のために， A の固有値を求める必要がある．

ここで，固有値について考える． n 次正方形行列である A が与えられたとき， $\det(\lambda I - A)$ を A の固有多項式という．これを計算すると，

$$\lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n \tag{19}$$

という形の n 次多項式となる．この多項式の根，つまり

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{20}$$

の解を A の固有値という．式 (19) は n 次の多項式であるため，固有値は n 個存在する．つまり，固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると，固有多項式は

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \tag{21}$$

と因数分解することができる．

この固有値を用いて， A を対角化することを考える． A の対角化と e^{At} は，対角化を可能

にする $P(\det P \neq 0)$ を求めることができれば,

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(P \begin{bmatrix} \lambda_1 t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n t \end{bmatrix} P^{-1} \right)^k = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (22)$$

と計算できる．なお，上述した対角化の方法は A が対角化可能な場合にのみ適用できるものであり，固有値を求めるための固有方程式が重解を持ち対角化できない場合は，ジョルダン標準形を用いなければならない．

1.5.2 ジョルダン標準形

先ほど求めた対角化の方法は， A の固有値がすべて異なる場合のものであった．しかし，実際は必ずしも A が異なる固有値を持つとは限らない．そこで， n 次正方形行列 A の固有値に重解が含まれる場合，つまり，例えば固有値 λ_1 が 2 重解， λ_2 が 3 重解， λ_3 が 4 重解で，固有多項式が

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda - \lambda_2)^3 (\lambda - \lambda_3)^4 \quad (23)$$

となるような場合は，ジョルダン標準形を考える必要がある．ここで， A に関する固有多項式が

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s} \quad (24)$$

であるとする．つまり， A の固有値がそれぞれ λ_1 が n_1 個， λ_2 が n_2 個， \dots ， λ_s が n_s 個である場合を考える．当然，固有多項式は n 次の多項式であるため， $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$ を満たす．まず， n_1, n_2, \dots, n_s に対して，自然数

$$\begin{aligned} & q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1r_1} \quad (r_1 \text{ 個}) \\ & q_{21}, q_{22}, \dots, q_{2r_2} \quad (r_2 \text{ 個}) \\ & \vdots \\ & q_{s1}, q_{s2}, \dots, q_{sr_s} \quad (r_s \text{ 個}) \end{aligned}$$

および n 次正則行列 P が存在し，各自然数が

$$\begin{aligned} & q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1r_1} = n_1 \\ & q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2r_2} = n_2 \\ & \vdots \\ & q_{s1} + q_{s2} + \cdots + q_{sr_s} = n_s \end{aligned}$$

という関係を満たしているとする。このとき、

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{q_{11}} + N_{q_{11}} & & & \\ & \lambda_1 I_{q_{12}} + N_{q_{12}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 I_{q_{1r_1}} + N_{q_{1r_1}} \end{bmatrix} \\
 J_2 &= \begin{bmatrix} \lambda_2 I_{q_{21}} + N_{q_{21}} & & & \\ & \lambda_2 I_{q_{22}} + N_{q_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_2 I_{q_{2r_2}} + N_{q_{2r_2}} \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 J_s &= \begin{bmatrix} \lambda_s I_{q_{s1}} + N_{q_{s1}} & & & \\ & \lambda_s I_{q_{s2}} + N_{q_{s2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{q_{sr_s}} + N_{q_{sr_s}} \end{bmatrix} \tag{25}
 \end{aligned}$$

という行列を定義する。これら J_1, J_2, \dots, J_s を、ジョルダン細胞とよぶ。これらジョルダン細胞を次のように対角上に並べると、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_s \end{bmatrix} \tag{26}$$

が成立するが、これを A のジョルダン標準形とよんでいる。ただし、 I_k は k 次の単位行列、 N_k は k 次の正方行列で

$$N_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

である。以上がジョルダン標準形を作成するための手順である。この手順を用いてジョルダン標準形を作るためには、当然どのように自然数 q_{ij} 、および正則行列 P を求めるかを考察しなければならない。しかし、その過程は非常に複雑であるためここでは省略し、以上のよう結論だけ述べておく。

ここでジョルダン標準形を作成するための例として、次のような6次正方行列 A について

のジョルダン標準形を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

この A に関するジョルダン標準形を作成するために, まずは A の固有値を求めなければならない. この A に関する固有多項式は,

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 1) \quad (28)$$

となるので, 固有値は $\lambda = 0$ (2重解), 1 (3重解), -1 である. この A に対し,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

という P をとった場合, ジョルダン標準形は

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる.

1.6 伝達関数とボード線図

1.6.1 伝達関数

入力 $u(t)$, 出力 $y(t)$ で表現されるあるシステムが次の微分方程式で与えられたとする.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (31)$$

(n, m はそれぞれ 0 以上の整数, $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ は任意の実数)

このような式で表されるシステムの伝達関数 $G(s)$ を考える. 伝達関数とは, 全ての初期値を 0 とし, t の関数である $u(t), y(t)$ にラプラス変換 $\mathcal{L}[u(t)], \mathcal{L}[y(t)]$ を適用することで得られる s 領域での入力 $\hat{u}(s)$ と出力 $\hat{y}(s)$ との比で定義されるので, 式 (31) を全ての初期値 0 の条件でラプラス変換しそれを変形することで

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (32)$$

と得られる. 式 (32) の分母多項式 $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ は, システムの安定性を決めるものである. また, この $G(s)$ において $n \geq m$ のとき, このシステムはプロパーであるといい, とくに $n > m$ の際に厳密にプロパーであるという.

上述のように伝達関数とは s 領域での入力と出力との比であったが, この関係式は (1) のような状態方程式からも導出できる. 状態変数を $x(t)$, 出力を $y(t)$ としたとき, 次のような $x(t)$ と $y(t)$ との関係式を出力方程式という.

$$y(t) = Cx(t) \quad (C \text{ は定数行列}). \quad (33)$$

式 (1), (33) をそれぞれ $x(0) = 0$ の条件の下でラプラス変換すると,

$$\begin{aligned} s\hat{x}(s) &= A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) &= C\hat{x}(s) \end{aligned} \quad (34)$$

となる. 式 (34) の 2 式を連立させることにより, s 領域の入力 $\hat{u}(s)$ と出力 $\hat{y}(s)$ との関係式が

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) \quad (35)$$

と得られる. よって, u から y への伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = C(sI - A)^{-1}B \quad (36)$$

である. C の取り方により, u からどの状態変数への伝達関数を表すのかが決まる. 例えば, $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ (T は行列の転置を表すとする), $C = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ と取れば, $G(s)$ は u から x_4 への伝達関数を示すこととなる.

1.6.2 ボード線図

伝達関数 $G(s)$ より、ボード線図を描くことができる。ここでは $G(s)$ はスカラーとする。ボード線図はゲイン線図と位相線図から成る、横軸を周波数とするものである。 $G(s)$ に $s = j\omega$ を代入し、

$$\begin{aligned} & 20 \log_{10} |G(j\omega)| \\ & \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}[G(j\omega)]}{\text{Re}[G(j\omega)]} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

を計算し、横軸を周波数の対数とし、それぞれをプロットすることでそれぞれゲイン線図、位相線図を得る。ゲインとは入力振幅に対する出力の振幅、つまり増幅率である。また、 $G(s)$ が振動性の伝達関数であるならば、ゲイン線図より共振周波数を読み取ることができる。本論文内で数値計算を行っている箇所では、数式処理システムを用いて伝達関数を求め、それを用いてボード線図を描き、図5のようにゲイン線図の極大点より共振周波数を導出している。

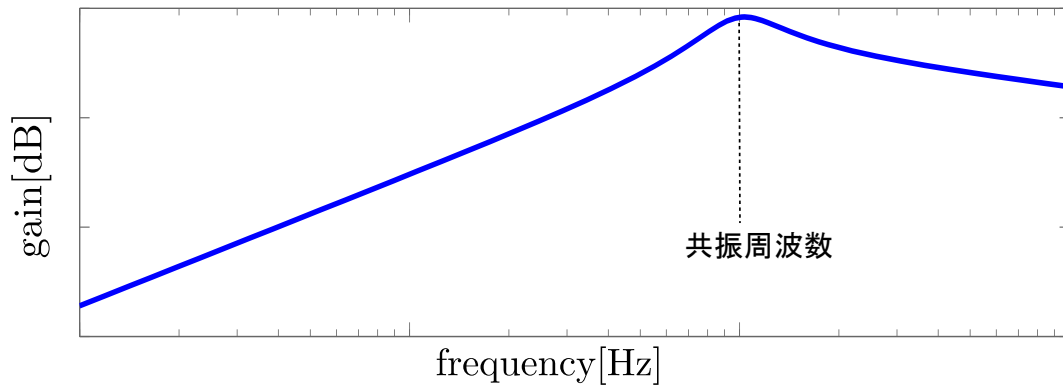


図 5: ゲイン線図と共振周波数

図5は共振周波数を一つもつシステムのゲイン線図である。伝達関数の振動・減衰の性質は、伝達関数の分母多項式の係数で決まる。分母多項式の極を求め、極が零でない虚部をもつとき振動性の伝達関数となる。電気回路をモデルとした場合は、伝達関数の性質は抵抗、コイル、コンデンサの値で決まり、さらに共振周波数の個数はコイルとコンデンサの組数で決定される。例えば、コイルとコンデンサの組が2つあり、かつ伝達関数が2次振動性の伝達関数の足しあわせであるならば、共振周波数は図6のように2つとなる。また中継回路を含むワイヤレス給電回路など、コイル・コンデンサの組が増えると、それだけ共振周波数が増える可能性がある。図7の例では、2次振動性の伝達関数が3つ重ね合わせられているため共振周波数が3つ見られる。

なお、伝達関数は入力から出力への写像を表すので、入力の種類とは関連しない。受動素子のみから成る電気回路の場合、抵抗、コイル、コンデンサによりこれが決まり、入力の振幅・周波数、入力波形などには影響されない。すなわち、伝達関数が定まることにより描かれるボード線図も、これらの受動素子のみがその形状に関係する。

$$G(s) = \frac{-6.7 \times 10^3 s^3}{s^4 + 2.8 \times 10^5 s^3 + 2.7 \times 10^{12} s^2 + 2.8 \times 10^{17} s + 1.3 \times 10^{24}}$$

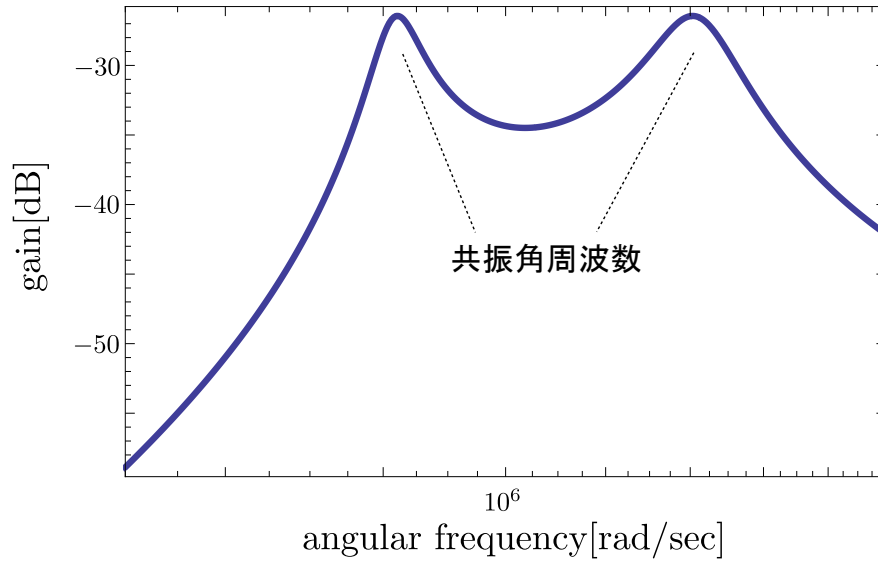


図 6: 2つのピークを持つゲイン線図と共振周波数

$$G(s) = -\frac{3.2 \times 10^4 s^5 + 9.2 \times 10^7 s^4 + 9.2 \times 10^{16} s^3 + 4.2 \times 10^{14} s}{s^6 + 4.0 \times 10^5 s^5 + 1.2 \times 10^{13} s^4 + 2.2 \times 10^{18} s^3 + 3.2 \times 10^{25} s^2 + 1.1 \times 10^{30} s + 1.1 \times 10^{37}}$$

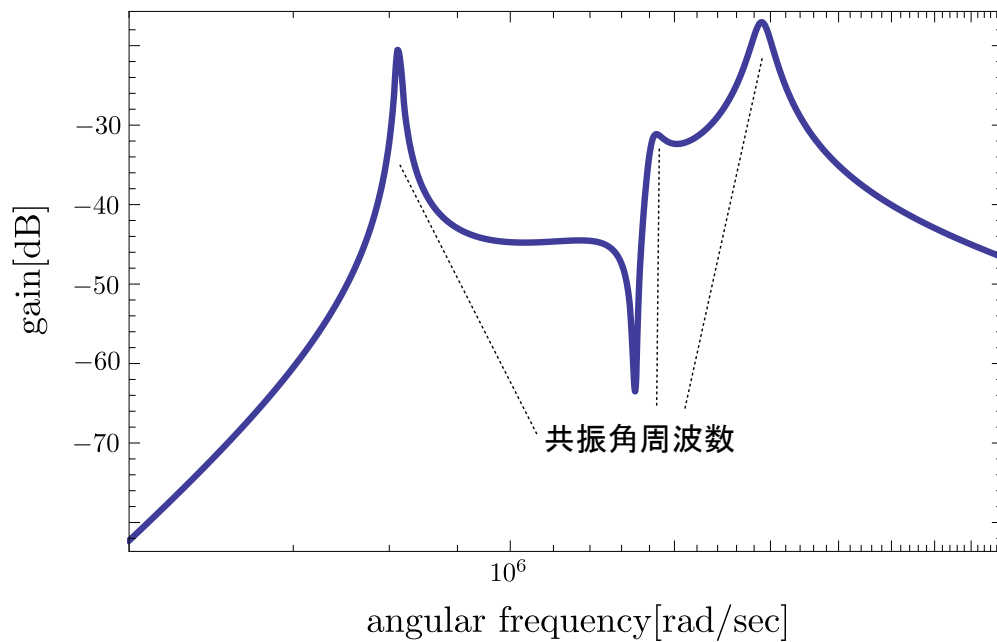


図 7: 3つのピークを持つゲイン線図と共振周波数

1.7 共振角周波数

本小章で、本論文中にて頻繁に用いられている共振角周波数の定義について述べておく。この定義は、電気回路の分野において一般的に用いられているものとは異なる。

電気回路の分野における共振角周波数 ω_0 は、回路を電源側から見た合成インピーダンス（入力インピーダンス）を $Z = R + jX$ （ R は抵抗分、 X はリアクタンス分）と表したときに、

$$X = 0 \quad (38)$$

となるようなときの電源の角周波数であると定義されている。

一方、本論文で述べる共振角周波数 ω_r は、回路の電源電圧を入力 u 、抵抗負荷を流れる電流を出力 y とした場合の伝達関数 $G(s)$ のゲイン $|G(j\omega)|$ が極大となるときの角周波数と定義している。つまり、電源の角周波数 ω を変数とする方程式

$$\frac{\partial |G(j\omega)|}{\partial \omega} = 0 \quad (39)$$

を解き、それにより得られた解が $|G(j\omega)|$ を極大にするとき、その解を共振角周波数と呼んでいる。この ω_r は前小章で述べたように、図 6、7 のようなゲイン線図からも読み取ることができる。

後で述べるように、これら 2 つの共振角周波数は、定義だけでなくその値も異なる。ただし、回路を電源側から見た合成インピーダンスの抵抗分が小さいときは、2 つの共振角周波数は近い値をとる。通常のワイヤレス給電回路では負荷抵抗が含まれるので、上記の抵抗分が小さいとは限らず、これら 2 つの共振角周波数は区別されるべきである。

1.8 回路の Q 値

回路の質を表す要素の一つとして、クオリティファクター Q が用いられることがある。これは、回路内で生じる消費エネルギーに対する蓄積エネルギーの比である。式で表現すると、電圧源の電圧もしくは電流源の電流の周期を T とすると

$$Q = \frac{2\pi (\text{最大蓄積エネルギー})}{T (\text{平均消費電力})} \quad (40)$$

となる。ここで、次のような抵抗 R と、コイル L 、コンデンサ C からなる RLC 直列回路を考える。

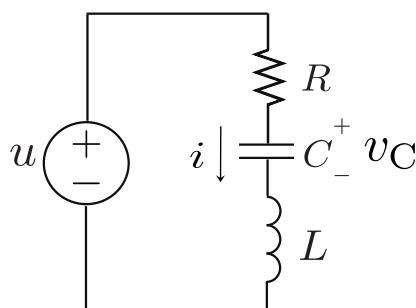


図 8: RLC 直列回路

式 (40) より、この回路の Q は、

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (41)$$

と求められる。ここで ω_0 は $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ である。またここで、回路を流れる電流 i とコンデンサの電圧 v_C に関する微分方程式を立てると、

$$\begin{cases} u = Ri + v_C + Li \\ C\dot{v}_C = i \end{cases} \quad (42)$$

となる。初期条件 $i(0) = \dot{i}(0) = 0$ のもと、この微分方程式より u から i への伝達関数 $G(s)$ が、

$$G(s) = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (43)$$

と導出される。この伝達関数の極は、

$$s = \frac{1}{2} \left(-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} \right) \quad (44)$$

となり、これより振動の条件がわかる。式 (44) の根号内が負であると振動性、0 であると臨界減衰性、正であると過減衰性の応答となる。これを式 (41) より Q を用いて表現すると、それぞれ $Q > 0.5$ の場合に振動性、 $Q = 0.5$ の場合に臨界減衰性、 $Q < 0.5$ の場合に過減衰性

となる．このように， Q は振動の条件を表現する上で適切な要素であるといえる． Q を扱っているワイヤレス給電に関する文献は，効率の式を式 (41) を用いて角周波数や回路定数の代わりに Q で表現している．なお，今回は回路の Q 値について述べたが，素子の Q 値も存在する．

図 9 から図 11 はそれぞれの Q での単位インパルス応答である．

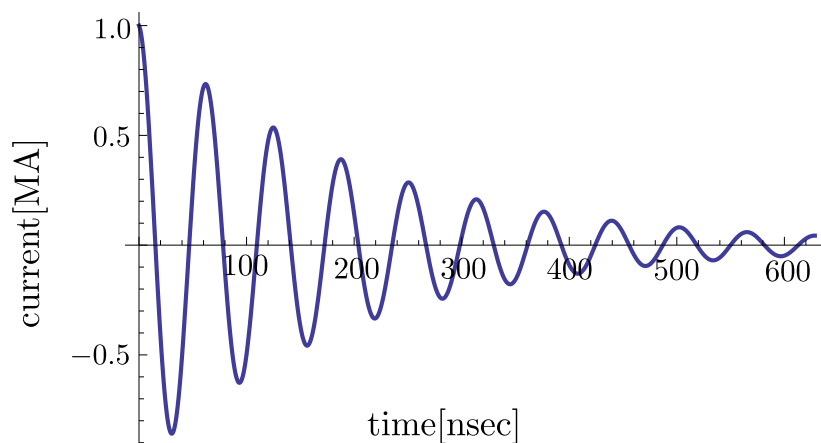


図 9: 振動性の単位インパルス応答 ($R = 10\Omega$, $L = 1\mu\text{H}$, $C = 100\text{pF}$, $Q = 10$)

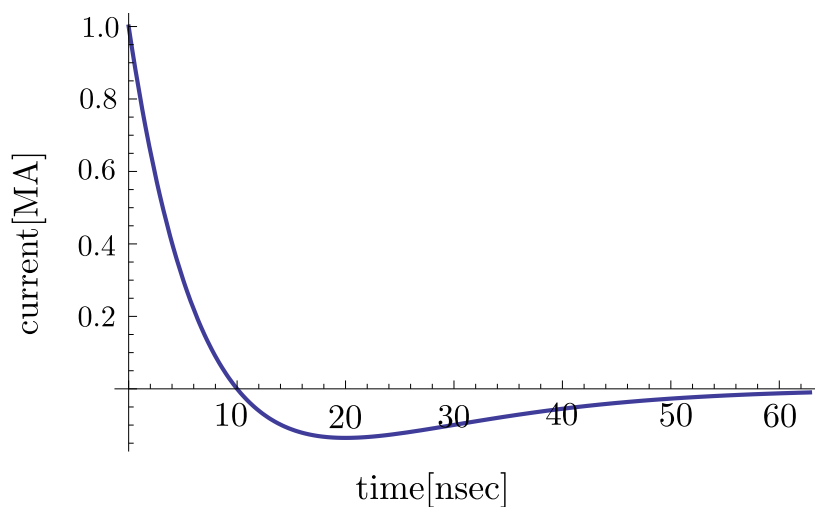


図 10: 臨界減衰性の単位インパルス応答 ($R = 200\Omega$, $L = 1\mu\text{H}$, $C = 100\text{pF}$, $Q = 0.5$)

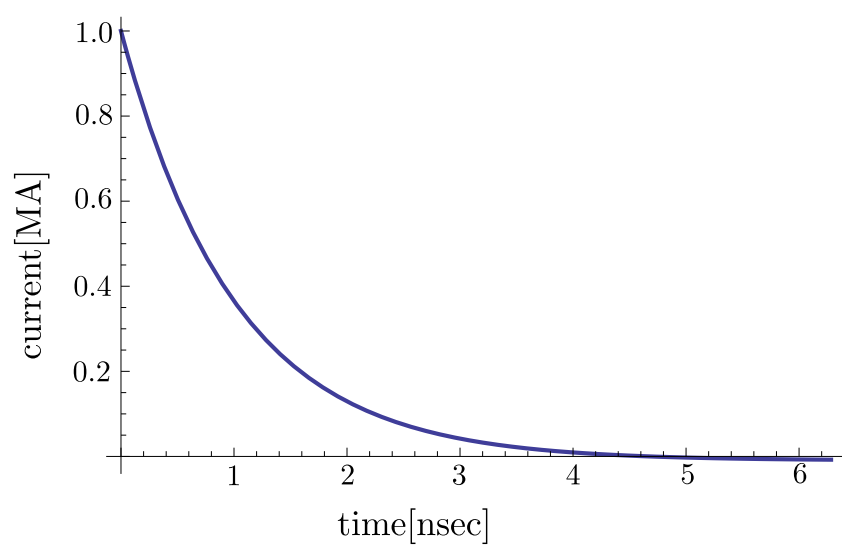


図 11: 減衰性の単位インパルス応答 ($R = 1\text{k}\Omega$, $L = 1\mu\text{H}$, $C = 100\text{pF}$, $Q = 0.1$)

1.9 減衰係数

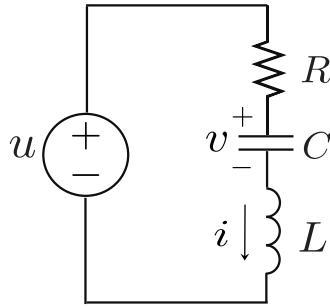


図 12: RLC 直列回路

図 12 の回路の共振角周波数について考える．この回路の回路方程式は，キルヒホッフの電圧則を用いて

$$u = Ri + L\dot{i} + v \quad (45)$$

と書ける．いま，電源を正弦波 $u = \sin \omega t$ とし，電流 i を最大にする角周波数，つまり共振角周波数 ω_r を求めると

$$\omega_r = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2L - R^2C}{2C}} \quad (46)$$

となる．ここで，次のような定数を定義する．

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (47)$$

これを式 (46) に代入すると，式 (46) は

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\zeta^2} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (48)$$

となる．この ζ を減衰係数とよぶ．この ζ からわかるように，抵抗成分の大きさが共振角周波数に影響する．仮に $R = 0$ であるとすれば $\zeta = 0$ となり，共振角周波数は $\omega_r = \sqrt{1/(LC)}$ となるので，この値は無損失時の LC 回路の共振角周波数であるといえる．図 13 に $\zeta = 0.05, 0.25, 0.5$ のときのボード線図を示す． $\zeta = 0.05, 0.25, 0.5$ のときに共振角周波数はそれぞれ $\omega_r = 9.97 \times 10^7, 9.35 \times 10^7, 7.07 \times 10^7 [\text{rad/sec}]$ となる．ワイヤレス給電回路にも抵抗成分は含まれるので，当然共振周波数はそれらの値に左右される．

前小章と本小章にて Q 値と減衰係数 ζ を扱ったが，それぞれ電気系分野，機械系分野でよく用いられている．これらは，

$$\frac{1}{Q} = 2\zeta \quad (49)$$

という関係にある．

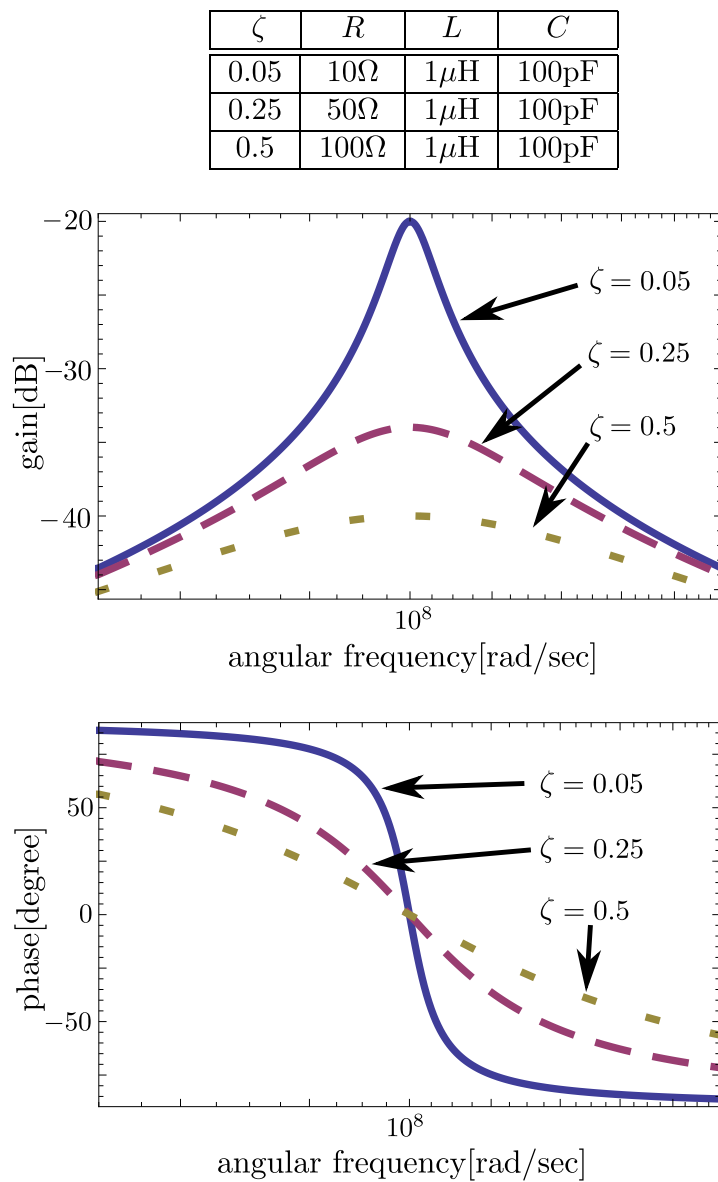


図 13: 減衰係数の変動とボード線図

1.10 安定性

1.10.1 システムの安定性

状態方程式内の定数行列 A の固有値の実部がすべて負のとき、 A は安定行列であるといひ、同時にシステムは安定であるという。この安定性は制御工学において非常に重要なものであり、不安定なシステムに対しては安定になるよう何らかのフィードバック制御を行う。その安定性を調べる最も一般的な方法として、伝達関数の極を求め、その極より安定かどうかを判断する方法がある。ここで伝達関数 $G(s)$ の分母多項式 $f(s)$ に注目し、特性方程式 $f(s) = 0$ を解いて極 $s = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を得たとする。この極の実部が全て負であるときに限り、そのシステムは安定である。システムが安定ならば、どのような初期値 $x(0)$ を取ったとしても時間が十分経過すれば応答 $x(t)$ は定常解 $x_{ss}(t)$ に収束する。つまり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_{ss}(t) - x(t)\| = 0 \quad (50)$$

となる。ここで $\|x\|$ は、 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ (T は行列の転置を表す) に対して

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (51)$$

と定義する。図 14 と図 15 に、システムが安定の場合・不安定な場合の極配置と静止状態応答の例をそれぞれ示す。

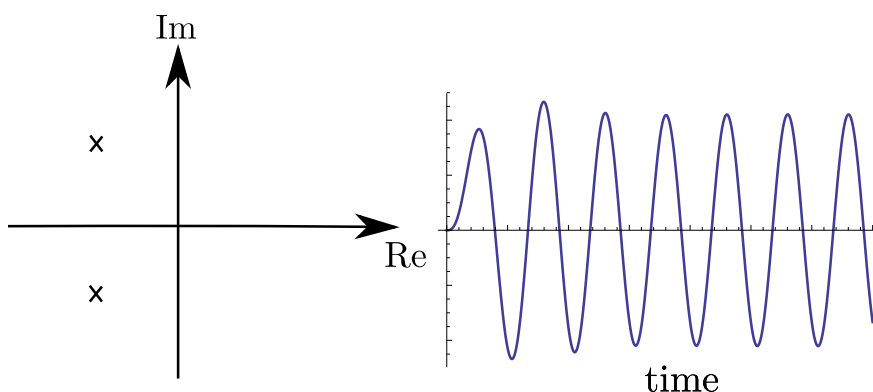


図 14: システムが安定な場合の極と静止状態応答

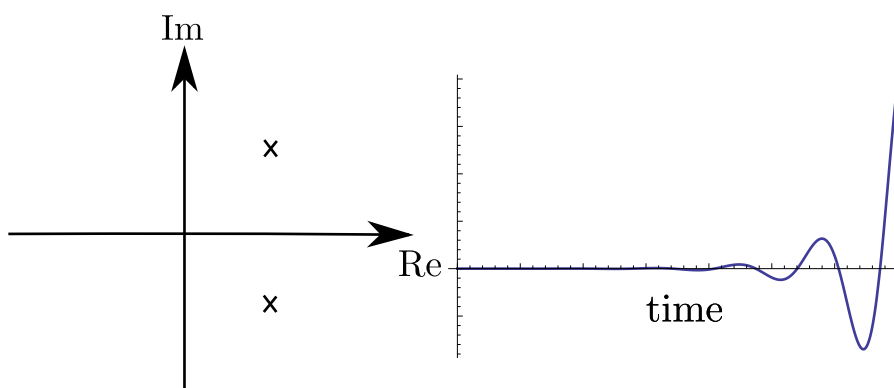


図 15: システムが不安定な場合の極と静止状態応答

1.10.2 フルビッツの安定判別法

システムの安定性を調べる方法として、極を求める以外にフルビッツの安定判別法がある。これは1895年にアドルフ・フルビッツ (Adolf Hurwitz, 1859 - 1919) により発見されたものである。ある伝達関数の分母多項式 $a_0s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} \cdots + a_n$ が次のような条件を満たすことが、その伝達関数が安定であるための必要十分条件である。

1. a_0, a_1, \dots, a_n がすべて零でなく、かつ同符号である
2. 次の行列式がすべて正である ($a_0 > 0$ の場合)

$$\begin{aligned}
 D_1 &= a_1 \\
 D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \\
 D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \\
 &\vdots \\
 D_{n-1} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-3} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-4} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-5} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-6} \\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{2n-7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{52}$$

この方法を用いると、分母多項式の極を求めることなく安定かどうかを判別できるので (もちろん、極が安易に求められるような状況ならばそれらの実部が正か負か0かで判断すればよい)、分母多項式が高次の場合に便利である。なお、本論文で扱うモデルは電気回路であるが、受動素子のみで構成され、抵抗成分が含まれる回路は必ず安定なシステムになる。

1.11 インダクタンスの計算

ワイヤレスで1次側の電源から2次側の負荷に電力を送る仕組みは、ファラデーの電磁誘導の法則やアンペール＝マクスウェル則などの電磁気学の諸定理によって説明できる。そのためには、1次側と2次側の回路内に最低限1つずつコイルが含まれなければならない。また、それらのコイルの半径や距離によって自己インダクタンス・相互インダクタンスが決定される。そしてワイヤレス給電の電力や効率、それらインダクタンスの変化の影響を受ける。そこで数値計算を行う際、実験装置を作成する際などに必要になる自己インダクタンス、相互インダクタンスの求め方を整理しておく。

1.11.1 1回巻の円状コイル電流が1点に作る磁束密度

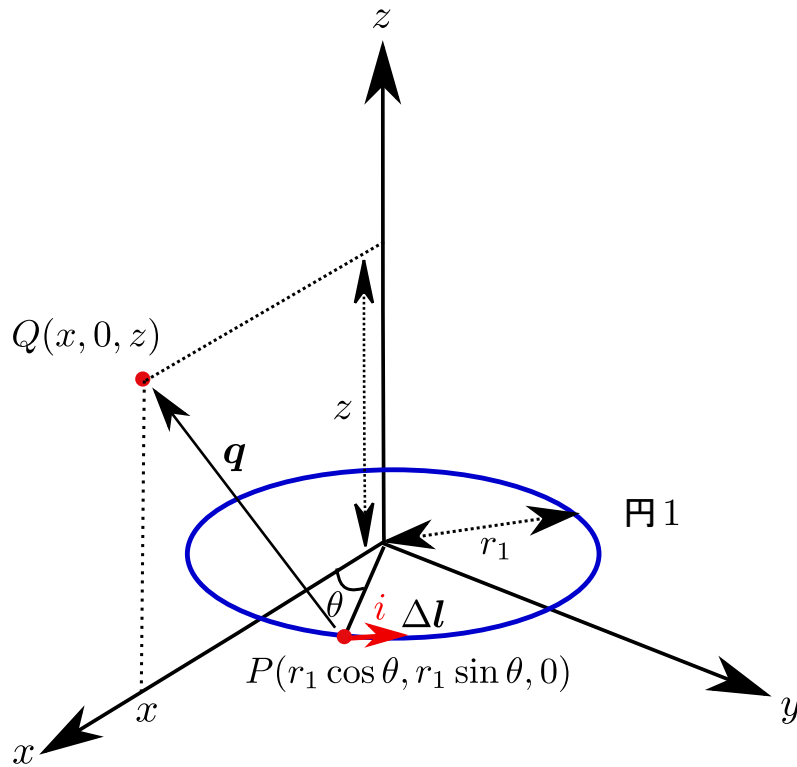


図 16: 1回巻きの円と考える点との位置関係

xy 平面上の円1: $x^2 + y^2 = r_1^2$ 内の $P(r_1 \cos \theta, r_1 \sin \theta, 0)$ を流れる電流 i が $Q(x, 0, z)$ に作る磁場を考える。ビオ・サバールの法則より、 P 上の微小区間 $\Delta l = r_1 \Delta \theta$ の電流が Q に作る磁束密度は透磁率を μ とすると、

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{q}}{q^3} \quad (53)$$

となる。ここで $\Delta \mathbf{l}$ は、 P を始点とし P から $\Delta \theta$ 進んだ点 $P'(r_1 \cos(\theta + \Delta \theta), r_1 \sin(\theta + \Delta \theta), 0)$ を終点とするベクトルであり、 $\Delta \theta$ の2次以上の項を無視すると、近似的に $\Delta \mathbf{l} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)r_1 \Delta \theta$ となる。また、 \mathbf{q} は P を始点とし Q を終点とするベクトルであり、 $\mathbf{q} = (x - r_1 \cos \theta, -r_1 \sin \theta, z)$ となる。これらを式 (53) に代入し、円1に沿って θ を0から 2π まで積分することにより、1

回巻きの円状コイルを流れる電流 i が Q に作る磁束密度 \mathbf{B} が

$$\mathbf{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu i r_1}{4\pi} \begin{bmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ r_1 - x \cos \theta \end{bmatrix} (x^2 + z^2 + r_1^2 - 2x r_1 \cos \theta)^{-3/2} d\theta \quad (54)$$

と得られる.

1.11.2 1 回巻の円状コイル電流が別の円板内に作る磁束

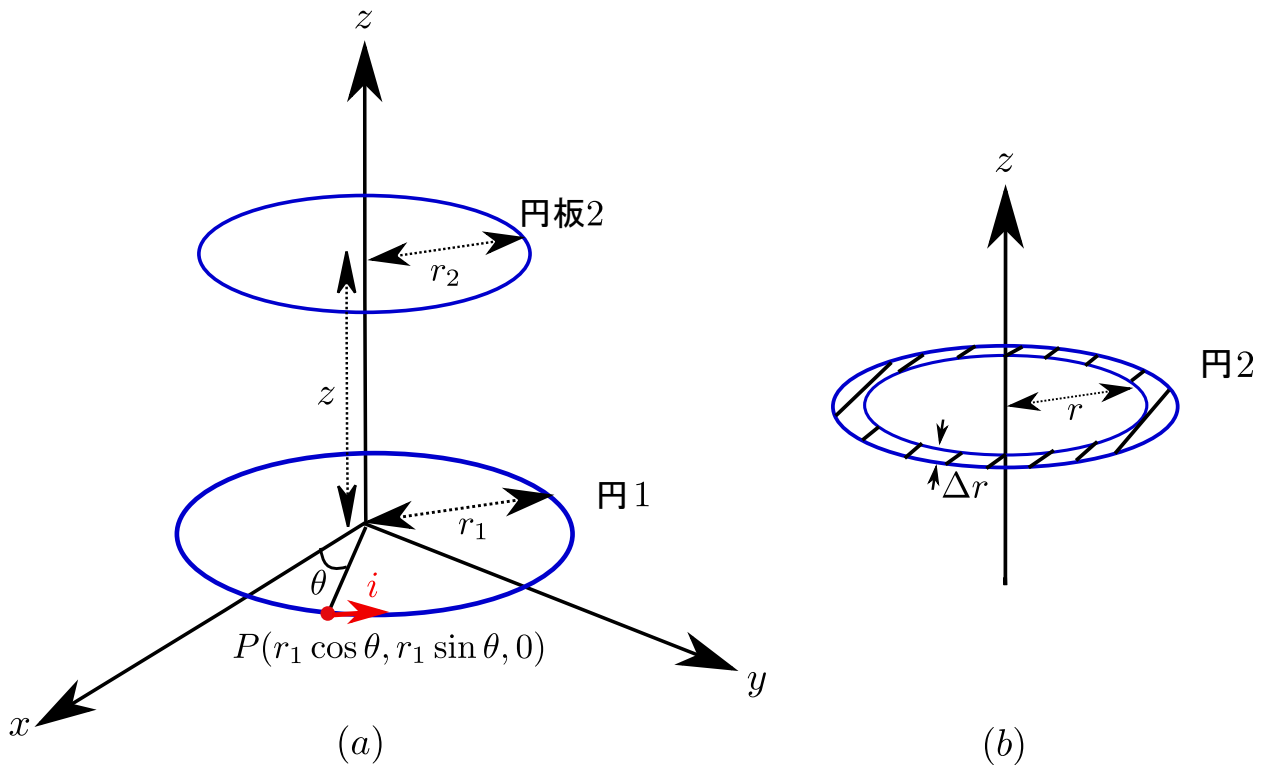


図 17: 1 回巻きの円と考える点・別の 1 回巻の円との位置関係

図 17(a) のように, 円 1 に対し並行 (z 軸に対し垂直) であり, 円 1 から距離 z 離れた位置にある円板 2: $x^2 + y^2 = r_2^2$ を貫く磁束 Φ を考える. Φ は, z 軸の正の向きの微小面積 $d\mathbf{S}$ を用いて

$$\Phi = \int_{\text{円板 2 の面積}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (55)$$

と書ける. ここで, 円板から図 17(b) のように幅 Δr の円環: $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq (r + \Delta r)^2$ を抽出する. この円環の面積は, Δr が十分小さいとすると $2\pi r \Delta r$ と近似できる. また $d\mathbf{S}$ の向きを考慮すると, Φ の計算に関係する \mathbf{B} の成分は z 成分のみであるので, 円環を貫く磁束 $\Delta\Phi$ は

$$\Delta\Phi = \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\mu i r_1}{4\pi} (r_1 - r \cos \theta) (r^2 + z^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos \theta)^{-3/2} d\theta \right\} \cdot 2\pi r \Delta r \quad (56)$$

となる．よって，円2全体を貫く磁束は，この $\Delta\Phi$ を $r = 0$ から $r = r_2$ まで積分することで

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_0^{r_2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\mu i r_1}{4\pi} (r_1 - r \cos \theta) (r^2 + z^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta)^{-3/2} d\theta \right\} \cdot 2\pi r dr \\ &= \mu i r_1 \int_0^{r_2} \int_0^\pi r (r_1 - r \cos \theta) (r^2 + z^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta)^{-3/2} d\theta dr\end{aligned}\quad (57)$$

となる．これで，ある1回巻の円状コイルを流れる電流が同心円状にある別の1回巻のコイルへ作る磁束を表すことができた．なお，今回はそれぞれのコイルが同心円状に存在すると仮定して面積分を行った．しかし，実際は軸を正確に合わせることができない場合も多いため，軸がずれた場合の計算も本小節の計算を元に工夫して行うべきである [19]．

1.11.3 式の整理

ここで，先ほど求めた変数を次のように無次元化する．

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{r_1}, \quad \eta = \frac{r_2}{r_1}. \quad (58)$$

式 (58) を用いて式 (57) を無次元化する．積分変数が r から \tilde{r} ，積分範囲が $r : 0 \rightarrow r_2$ から $\tilde{r} : 0 \rightarrow \eta$ に置き換わることに注意すると，

$$\Phi = \mu i r_1 \int_0^\eta \int_0^\pi \tilde{r} (1 - \tilde{r} \cos \theta) (\tilde{r}^2 + \tilde{z}^2 + 1 - 2\tilde{r} \cos \theta)^{-3/2} d\theta d\tilde{r} \quad (59)$$

となる．ここで，

$$\Psi = \int_0^\eta \int_0^\pi \tilde{r} (1 - \tilde{r} \cos \theta) (\tilde{r}^2 + \tilde{z}^2 + 1 - 2\tilde{r} \cos \theta)^{-3/2} d\theta d\tilde{r} \quad (60)$$

を定義する．このとき，

$$\Phi = \mu i r_1 \Psi \left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{z}{r_1} \right) \quad (61)$$

の関係が成立する．同様に，円2を流れる電流 i_2 が円1に作る磁束は

$$\Phi = \mu i_2 r_2 \Psi \left(\frac{r_1}{r_2}, \frac{z}{r_2} \right) \quad (62)$$

と表される．

1.11.4 自己インダクタンスと相互インダクタンスの導出

図18は，それぞれの中心軸が共通の2つのコイルの断面図を表したものである．片方のコイルをコイル1，もう片方のコイルをコイル2とし，それぞれの半径を r_1, r_2 とする．コイル1，コイル2を形成する導線の中で最も小さいコイル間距離を z_1 とする．また，コイル1，コイル2を形成する導線の直径をそれぞれ D_1, D_2 とする．それぞれのコイルには中心軸側から半径方向に 11, 12, 13, ..., 上から中心軸方向に 11, 21, 31, ... という名前を付ける．コイル1(半径 r_1 , 電流 i_1 とする)，コイル2(半径 r_2 , 電流 i_2 とする)を形成するループのうちある1ループに発生する起電力は，それぞれ先ほど求めた Ψ とファラデーの電磁誘導の法則

$$v = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (63)$$

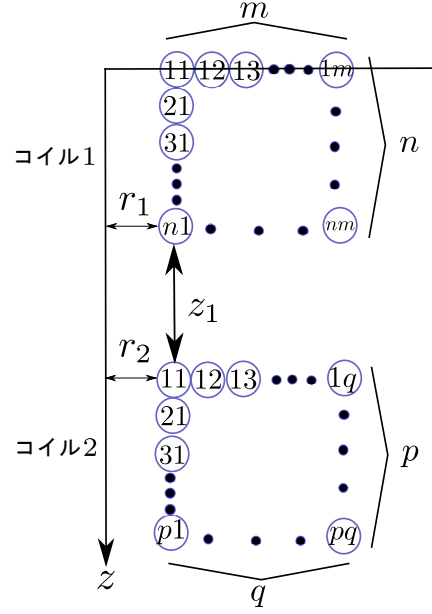


図 18: コイルの断面

より,

$$\begin{aligned} v_1 &= \mu r_1 \Psi(1, 0) \frac{di_1}{dt} + \mu r_2 \Psi\left(\frac{r_1}{r_2}, \frac{z_1}{r_2}\right) \frac{di_2}{dt} \\ v_2 &= \mu r_1 \Psi\left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{di_1}{dt} + \mu r_2 \Psi(1, 0) \frac{di_2}{dt}. \end{aligned} \quad (64)$$

と表せる．考えたいコイルの起電力は，この 1 巻のループが直列接続されていると考えると，1 巻 1 巻の起電力を求めていきそれを足したものになる（キルヒホッフの電圧則）．導線 11, 12, ... に生じる起電力を v_{11}, v_{12}, \dots とすると，コイル全体の起電力 v は

$$\begin{aligned} v &= v_{11} + v_{12} + \dots \\ &+ v_{21} + v_{22} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (65)$$

となる．つまり，

$$\begin{aligned} v &= \sum \left(\mu r_1 \Psi \frac{di_1}{dt} + \mu r_2 \Psi \frac{di_2}{dt} \right) \\ &= \sum \mu r_1 \Psi \frac{di_1}{dt} + \sum \mu r_2 \Psi \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (66)$$

である．定義より，上式の電流の時間微分の係数がインダクタンスである．いま，各コイルは 1 巻のコイルが直列接続されていると考えているので，コイル 1，コイル 2 のいずれの導線にもそれぞれ等しく i_1, i_2 の電流が流れていることになる．以上のことを踏まえ，コイル 1 の自己インダクタンス L_1 ，コイル 2 の自己インダクタンス L_2 ，コイル 1 がコイル 2 に作る相

互インダクタンス M_{21} , コイル 2 がコイル 1 に作る相互インダクタンス M_{12} を書き下すと,

$$\begin{aligned}
L_1 &= \mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left(r_1 + \frac{D_1}{2} + (ll-1)D_1 \right) \\
&\times \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \Psi \left(\frac{r_1 + \frac{D_1}{2} + (l-1)D_1}{r_1 + \frac{D_1}{2} + (ll-1)D_1}, \frac{|(k-1)D_1 - (kk-1)D_1|}{r_1 + \frac{D_1}{2} + (ll-1)D_1} \right) \\
L_2 &= \mu \sum_{ii=1}^p \sum_{jj=1}^q \left(r_2 + \frac{D_2}{2} + (jj-1)D_2 \right) \\
&\times \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Psi \left(\frac{r_2 + \frac{D_2}{2} + (j-1)D_2}{r_2 + \frac{D_2}{2} + (jj-1)D_2}, \frac{|(i-1)D_2 - (ii-1)D_2|}{r_2 + \frac{D_2}{2} + (jj-1)D_2} \right) \\
M_{21} &= \mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \left(r_1 + \frac{D_1}{2} + (l-1)D_1 \right) \\
&\times \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \Psi \left(\frac{r_2 + \frac{D_2}{2} + (j-1)D_2}{r_1 + \frac{D_1}{2} + (l-1)D_1}, \frac{(n-k+\frac{1}{2})D_1 + (i-\frac{1}{2})D_2 + z_1}{r_1 + \frac{D_1}{2} + (l-1)D_1} \right) \\
M_{12} &= \mu \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left(r_2 + \frac{D_2}{2} + (j-1)D_2 \right) \\
&\times \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \Psi \left(\frac{r_1 + \frac{D_1}{2} + (l-1)D_1}{r_2 + \frac{D_2}{2} + (j-1)D_2}, \frac{(n-k+\frac{1}{2})D_1 + (i-\frac{1}{2})D_2 + z_1}{r_2 + \frac{D_2}{2} + (j-1)D_2} \right) \quad (67)
\end{aligned}$$

となる [15]. 以上で, 自己インダクタンス, 相互インダクタンスの計算のための式が導かれた. なお, ここではコイル 2 がコイル 1 に作る相互インダクタンス, コイル 1 がコイル 2 に作る相互インダクタンスをそれぞれを M_{12} , M_{21} と区別したが, 実際は相反定理より, $M_{21} = M_{12}$ が成立する.

これを用いて, 実際に作成したコイルの自己インダクタンスと相互インダクタンスを計算する. 今回は計算のために数式処理システムである mathematica を用いた. 計算に必要な各値を表 4 に示す. なお, 透磁率は空気中の透磁率とほぼ同等である真空の透磁率 ($\mu = 4\pi \times 10^{-7}[\text{H/m}]$) として計算した.

表 4: インダクタンスの計算に必要な各値

長さ	値	巻き数	値
r_1, r_2	88.5mm	n	8
z_1	73.2mm	m	12
D_1, D_2	2.5mm	p	8
		q	12

これらの値を代入すると, 各インダクタンスは次のようになる.

$$L_1, L_2 = 2.81\text{mH}$$

$$M = 545\mu\text{H}$$

ここで, コイル間距離の変化に対する相互インダクタンスの変化を, 式 (67) を用いて視覚化する. コイル間距離が増すとともに, 相互インダクタンスは図 19 のように減少していく.

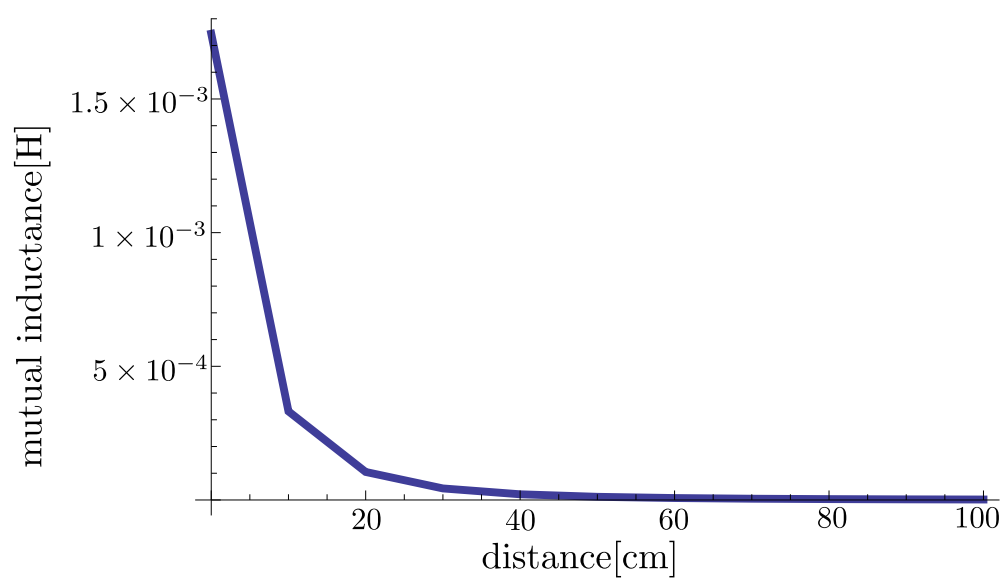


図 19: 距離の変動による相互インダクタンスの増減

参考文献

- [1] N. Tesla, U. S. patent 1, 119, 732, 1914.
- [2] A. Kurs, A. Karalis, R. Moffatt, J. D. Joannopoulos, P. Fisher, and M. Soljačić, “Wireless Power Transfer via Strongly Coupled Magnetic Resonances”, *Science*, vol. 317, pp. 83-86, 2007.
- [3] 徳良晋他, “電気自動車向け非接触充電システムの開発”, IHI 技報, vol. 53, 38-41 頁, 2013.
- [4] 篠原真毅他, “電界磁界結合型ワイヤレス給電技術”, 科学情報出版株式会社, 2014.
- [5] 高橋俊輔, “EV 用ワイヤレス給電システムにおける効率向上”, 電子情報通信学会技術研究報告, WPT2012-22, 11-16 頁, 2012.
- [6] C. A. Tucker, K. Warwick, and W. Holderbaum, “A contribution to the wireless transmission of power”, *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 47, pp. 235-242, 2013.
- [7] G. Vandevoorde and R. Puers, “Wireless energy transfer for stand-alone systems: a comparison between low and high power applicability”, *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 92, pp. 305-311, 2001.
- [8] 田倉哲也, 三澤崇弘, 佐藤文博, 佐藤忠邦, 松木秀敏, “共振コンデンサ接続型ピックアップコイルを用いた LC ブースター方式における最大伝送効率について”, *Journal of the Magnetics Society of Japan*, vol. 37, 102-106 頁, 2013.
- [9] H. Hoang and F. Bien, “Maximizing Efficiency of Electromagnetic Resonance Wireless Power Transmission Systems with Adaptive Circuits”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 207-226, 2012.
- [10] X. Zhand, S. L. Ho, W. Fu, “Quantitative Design and Analysis of Relay Resonators in Wireless Power Transfer System”, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, 4026-4029, 2012.
- [11] I. J. Yoon, H. Ling, “Realizing Efficient Wireless Power Transfer in the Near-Field Region Using Electrically Small Antennas”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 151-172, 2012.
- [12] Z. Qingwei, W. Lifang, L. Chenglin, “Compensate capacitor optimization for kilowatt-level magnetically resonant wireless charging system”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 61, 6758-6768, 2014.
- [13] J. Y. Mun, M. G. Seo, W. G. Kang, H. Y. Jun, Y. H. Park, J. K. Pack, “Study on the Human Effect of a Wireless Power Transfer Device at Low Frequency”, *PIERS Proceedings*, pp. 322-324, 2012.

-
- [14] L. L. Tan, X. L. Huang, H. Huang, Y. W. Zou, and H. Li, “Transfer efficiency optimal control of magnetic resonance coupled system of wireless power transfer based on frequency control”, *Science China Technological Sciences*, vol. 54, pp. 1428-1434, 2011.
 - [15] H. Hirayama, “Equivalent Circuit and Calculation of Its Parameters of Magnetic-Coupled-Resonant Wireless Power Transfer”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 117-132, 2012.
 - [16] T. Imura, Y. Hori, “Maximizing Air Gap and Efficiency of Magnetic Resonant Coupling for Wireless Power Transfer Using Equivalent Circuit and Neumann Formula”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, pp. 4746-4752, 2011.
 - [17] K. A. Kalwar, M. Aamir, S. Mekhilef, “Inductively coupled power transfer (ICPT) for electric vehicle charging - A review”, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 47, pp. 462-475, 2015.
 - [18] A. N. Laskovski and M. R. Yuce, “Class-E self-oscillation for the transmission of wireless power to implants”, *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 171, pp. 391-397, 2011.
 - [19] 居村岳広, 堀洋一, “ワイヤレス電力伝送と電気自動車により実現される未来の交通社会”, 電子情報通信学会通信ソサイエティマガジン, 2013年夏号, 19-24頁, 2013.

2 ワイヤレス給電の電力と効率

2.1 はじめに

共振現象は、電源の周波数を回路の共振周波数に合わせることで引き起こされる。その共振周波数は、回路のトポロジーと抵抗、コイル、コンデンサなどの回路中の回路素子により定まる。その中の要素の一つである相互インダクタンスは、コイルの半径、巻数、コイル間の相対位置により決まる [1]。よって、相互インダクタンスがどのように定まるのかを数量的に知ることは重要である。

ワイヤレス給電を考える上での重要な要素として、電力と効率が挙げられる。多くの論文では、これらを高めるためには共振現象を用いればよいとしているが、共振現象がどのようにワイヤレス給電に影響を与えるかを数式的に表現している文献はあまり多くない。

本章では、共振現象と平均電力、そして1次側と2次側との平均電力の比を表す効率との関係を解析する。その際、解析は制御理論でよく用いられる状態方程式に基づき行う。これに伴い、様々な伝達関数の扱いや安定性について議論する。結論の一つとして、この状態方程式を解析に用いることで共振現象が一般的には効率を最大化するとは限らないことが明らかとなる。このような状況を説明するために、単純なワイヤレス給電回路を想定し、その中の回路素子に実用的な数値を代入し、数値計算結果を示す。

本章の構成

- ワイヤレス給電回路と数的モデル
本章で扱う回路を示し、状態方程式を導く
- 電力と効率の求め方と定義
状態方程式より伝達関数を求め、最終的に効率の計算を行う
- 共振現象と電力
前小章で求めたボード線図を描き、それより共振角周波数を求める
- 電力と効率の数値計算
実用的な素子の値を用い、電力と効率とを数値計算する
- 周波数以外の要素が効率に与える影響
電源の周波数以外に抵抗負荷、相互インダクタンスに焦点を当てる
- おわりに
本章の結果をまとめる

2.2 ワイヤレス給電回路と数的モデル

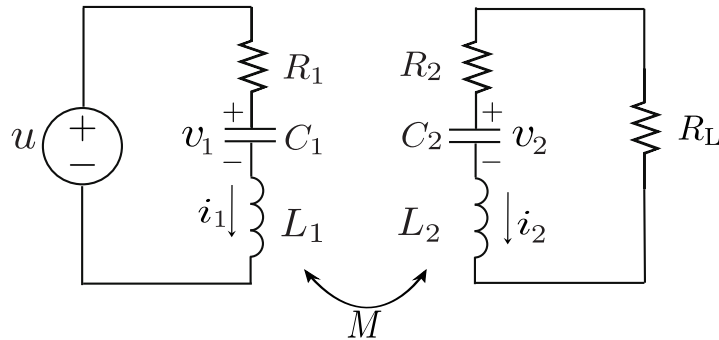


図 20: ワイヤレス給電回路

この章では、図 20 のワイヤレス給電回路を解析する [2]。この回路は、左側が1次側（送電側）、右側が2次側（受電側）であり、これらは互いに電気的には繋がっていないが電磁氣的に繋がっており、送電の仕組みは電磁気学の範囲内にある。回路図中の u は正弦波入力 $u = \sin \omega t$ 、抵抗 R_1, R_2 、およびコンデンサ C_1, C_2 はそれぞれ1次側、2次側の寄生要素、 L_1, L_2 は1次側と2次側のコイル、 M は相互インダクタンス、 R_L は抵抗負荷である。ただし、 L_1, L_2 は同軸上に一定の距離をおいて同じ向きに巻かれているとする。このようなワイヤレス給電回路の電力・効率、は、キルヒホッフの法則やオームの法則に代表される電気回路の諸法則を元に計算されるべきである。本論文では、これらの計算を線形時不変な状態方程式を用いてシステム論的形式に基づいて行う。キルヒホッフの法則やオームの法則より得た回路方程式から不必要な変数を取り除くことで、状態変数 x と入力 u とが回路全体の挙動を表すような状態方程式を

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & i_1 & i_2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{T は行列の転置を表す}) \quad (68)$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_2} \\ -L_2 & M & -R_1 L_2 & R_3 M \\ M & -L_1 & R_1 M & -R_3 L_1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2, \quad R_3 = R_2 + R_L$$

と書くことができる。ここでは1次側と2次側のコイル、コンデンサ、計4つの変数 (v_1, v_2, i_1, i_2) が状態変数である。さらに、 Δ の値は物理的に必ず正の値を取る。本論文ではこのような状態方程式を今後様々な回路について立てることになるので、その度に手計算をすると非常に大変である。そこで、回路から状態方程式を生成するソフトウェアを利用した [3]。

2.3 電力と効率の定義と算出

この章の目的は、ワイヤレス給電の電力と効率がどのように交流電源の周波数に依存するかを調べることである。ここでいう効率とは、交流電源の平均電力 P_1 と抵抗負荷の平均電力 P_2 との比で定義されるものである。よって、まずは各平均電力の計算方法を考える。入力 u から 1 次側の回路を流れる電流 i_1 への伝達関数を $G_1(s)$ 、2 次側の回路を流れる電流 i_2 への伝達関数を $G_2(s)$ とする。式 (36) より、それぞれの伝達関数は

$$\begin{cases} G_1(s) = H_1(sI - A)^{-1}B \\ G_2(s) = H_2(sI - A)^{-1}B \end{cases} \quad (69)$$

と求められる。ただし、 $H_1 = [0, 0, 1, 0]$, $H_2 = [0, 0, 0, 1]$ である。よってそれぞれ

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \frac{L_2 C_1 C_2 s^3 + R_2 C_1 C_2 s^2 + C_1 s}{d(s)} \\ G_2(s) &= \frac{-M C_1 C_2 s^3}{d(s)} \\ d(s) &= \Delta C_1 C_2 s^4 + (R_1 L_2 + R_3 L_1) C_1 C_2 s^3 \\ &\quad + (L_1 C_1 + L_2 C_2 + R_1 R_3 C_1 C_2) s^2 + (R_1 C_1 + R_3 C_2) s + 1 \end{aligned} \quad (70)$$

と求まる。ここでフルビッツの安定判別法により、この伝達関数が安定であるかどうかを判定しておこう。まず、分母多項式の係数は

$$\begin{aligned} \Delta C_1 C_2 &> 0 \\ (R_1 L_2 + R_3 L_1) C_1 C_2 &> 0 \\ L_1 C_1 + L_2 C_2 + R_1 R_3 C_1 C_2 &> 0 \\ R_1 C_1 + R_3 C_2 &> 0 \\ 1 &> 0 \end{aligned} \quad (71)$$

である。さらに、フルビッツ行列の行列式を計算すると

$$\begin{aligned} D_1 &= C_1 C_2 (R_1 L_2 + R_2 L_1) > 0 \\ D_2 &= C_1^2 C_2^2 \left[R_1 R_3 (R_1 L_2 + R_3 L_1) + \frac{1}{C_1} (R_1 L_2^2 + R_3 M^2) + \frac{1}{C_2} (R_3 L_1^2 + R_1 M^2) \right] > 0 \\ D_3 &= C_1 C_2 [R_1 R_3 \{R_1^2 L_2 C_1 C_2^2 + R_1 R_3 L_1 C_1^2 C_2 + R_1 R_3 L_2 C_1 C_2^2 + R_3^2 L_1 C_1 C_2^2 + (L_1 C_1 - L_2 C_2)^2\} \\ &\quad + M^2 \{R_1^2 C_1^2 + R_3^2 C_2^2 + 2 R_1 R_3 C_1 C_2\}] > 0 \end{aligned} \quad (72)$$

となるので、 $G_1(s), G_2(s)$ は安定である。したがって、周期解は定常解である。 i_1, i_2 の定常解 i_{s1}, i_{s2} を求めると、

$$\begin{aligned} i_{s1}(t) &= |G_1(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) \\ i_{s2}(t) &= |G_2(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (73)$$

となる。 $|G_1(j\omega)|, |G_2(j\omega)|$ はそれぞれ $G_1(s), G_2(s)$ のゲイン、つまり u の振幅と i_1, i_2 の定常状態での振幅の比であり、 θ, ϕ はそれぞれ $G_1(j\omega), G_2(j\omega)$ の偏角である。これらを用いて、

電源の平均電力 P_1 ，抵抗負荷の平均電力 P_2 ，そして効率 η は

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i_{s1}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t |G_1(j\omega)| \sin(\omega t + \theta) dt = \frac{1}{2} |G_1(j\omega)| \cos \theta \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[G_1(j\omega)] \\
 P_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T R_L i_{s2}(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_L |G_2(j\omega)|^2 \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{1}{2} R_L |G_2(j\omega)|^2 \\
 \eta &= \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_L |G_2(j\omega)|^2}{\operatorname{Re}[G_1(j\omega)]}
 \end{aligned} \tag{74}$$

と求められる．これで電力と効率の式が求まったので，以降この章では回路定数に実用的な数値を代入し，数値計算を行う．

2.4 共振現象と電力

式 (74) より, $|G_2(j\omega)|$ が最大, つまり電源の角周波数 ω が共振角周波数に合わせられた場合, 抵抗負荷 R_L の平均電力 P_2 が最大となる事がわかる. ただし, ゲインは入力の変幅に対する出力の変幅なので, 共振現象とはある変幅 (今回は 1) の入力に対し最大の電力を与えるものである. 共振角周波数を求める方法の一つとして, ボード線図を描きゲイン線図のピークを調べる方法がある. ここで, ボード線図を描くのために次のように素子の値を定める.

表 5: 回路内の素子の値

素子	値	素子	値
R_1	50.1Ω	M_1	$0.5\mu\text{H}$
R_2	0.1Ω	M_2	$0.5\mu\text{H}$
R_L	50Ω	C_1	1nF
L_1	$10\mu\text{H}$	C_2	1nF
L_2	$10\mu\text{H}$		

これらの値を代入し, $G_2(s)$ のボード線図を図 21 のように描く.

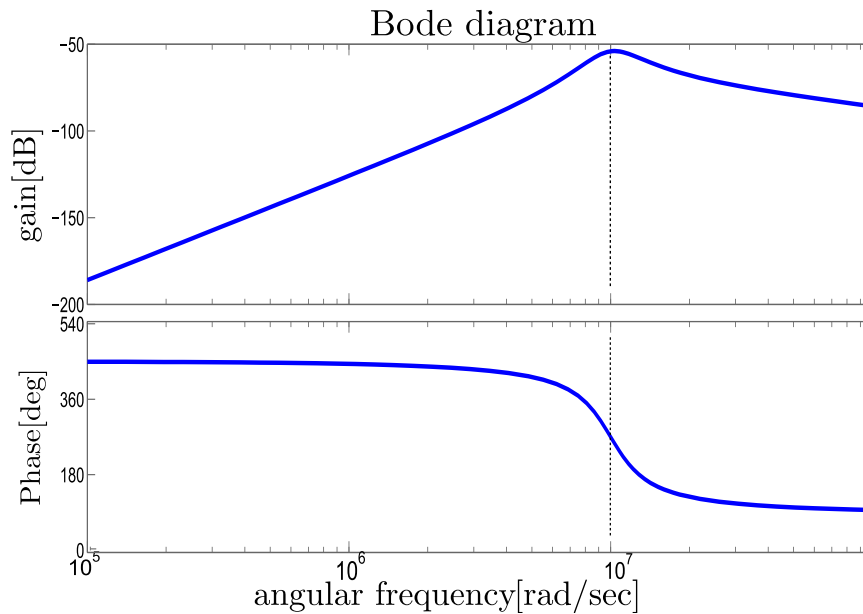


図 21: u から i_2 へのボード線図

図 21 に示したボード線図の横軸は, 電源電圧の角周波数 $\omega[\text{rad/sec}]$ の常用対数であり, 今後も横軸が周波数のものは常用対数を取っているとする. 縦軸はそれぞれゲイン $[\text{dB}]$ と位相 $[\text{deg}]$ である. 図 21 より, 電源の角周波数 ω が $1 \times 10^7[\text{rad/sec}]$ 付近に合わせられたとき共振現象が起こり, 入力の変幅に対する最大の抵抗負荷の平均電力が得られる. ここで, 共振状態での電源と抵抗負荷の瞬時電力 p_1, p_2 を図 22 に示す. これより, 定数行列 A が安定行列であるために, 初期条件に関わらず十分時間が経った際に瞬時電力が定常状態になっていることがわかる [4].

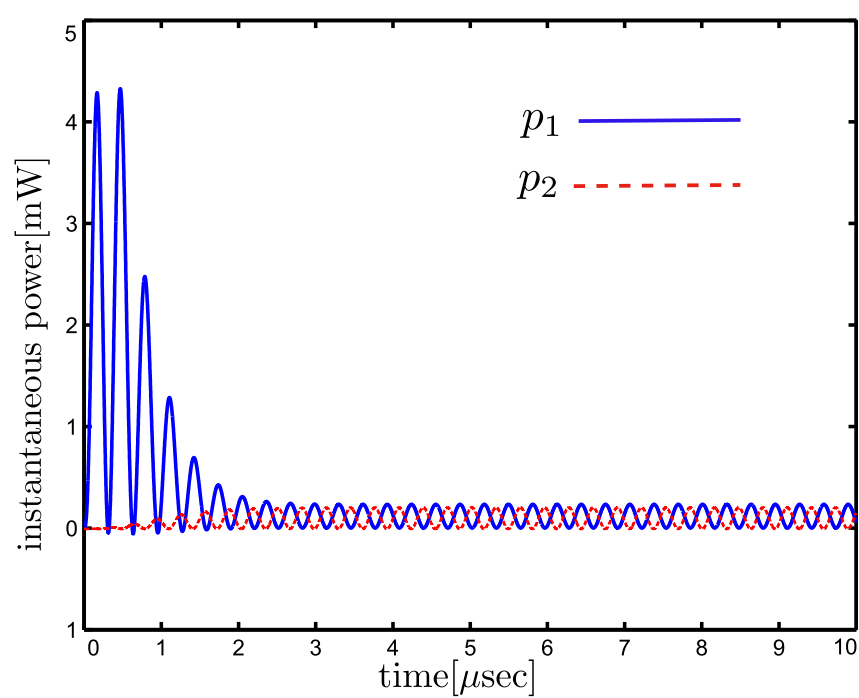


図 22: 入出力の瞬時電力

2.5 電力と効率の数値計算

式 (74) より，ワイヤレス給電において電源の角周波数 ω と効率 η との間には直接的な因果関係は無いことがわかる．ワイヤレス給電に関する多くの論文では， ω を共振周波数に合わせることでよりよい伝送を行うことができると述べられているが [5, 6]，抵抗負荷の平均電力は共振現象を用いることで最大にできる事に対し，効率は共振現象とどう関係するのか不透明である．この状況を明らかにするため，次のように数値計算を行った．まずは，抵抗負荷の平均電力 P_2 と効率 η の数値計算の結果を図 23 に示す．

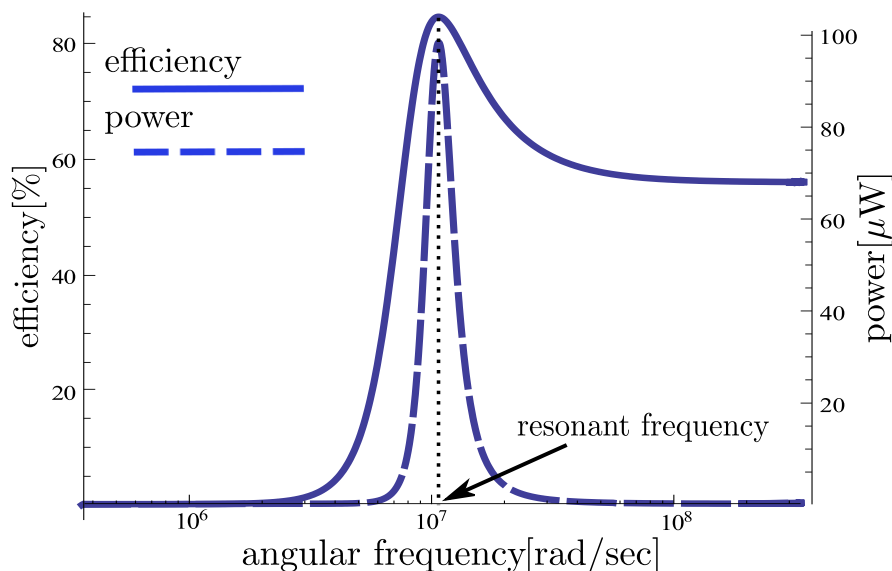


図 23: 周波数を変化させることによる抵抗負荷の平均電力と効率の変化

この数値例では，効率は電力と同じく $\omega = 1.07 \times 10^7 \text{ rad/sec}$ で最大化された [7]．また，効率を最大化する角周波数が共振角周波数と等しくない状況を考えるために，次のような素子の値による別の数値例を示す．先ほどの数値例との違いは 1 次側のキャパシタンス C_1 の値が異なるだけである．

表 6: 回路内の素子の値

素子	値	素子	値
R_1	50.1Ω	M_1	$0.5\mu\text{H}$
R_2	0.1Ω	M_2	$0.5\mu\text{H}$
R_L	50Ω	C_1	0.1nF
L_1	$10\mu\text{H}$	C_2	1nF
L_2	$10\mu\text{H}$		

これらの値を代入し，同じように電力と効率とを数値計算により求めたものを図 24 に示す．図 23 と異なり，電力と効率は異なる角周波数においてそれぞれ最大になっていることがわかる．よってこれら 2 つの数値計算の結果より，共振状態において平均電力は最大になることがわかるが，効率は必ずしもそうではないことがわかる．それゆえ，電力・効率と共振現象を一括りに考えることは適切でないと判断できる．

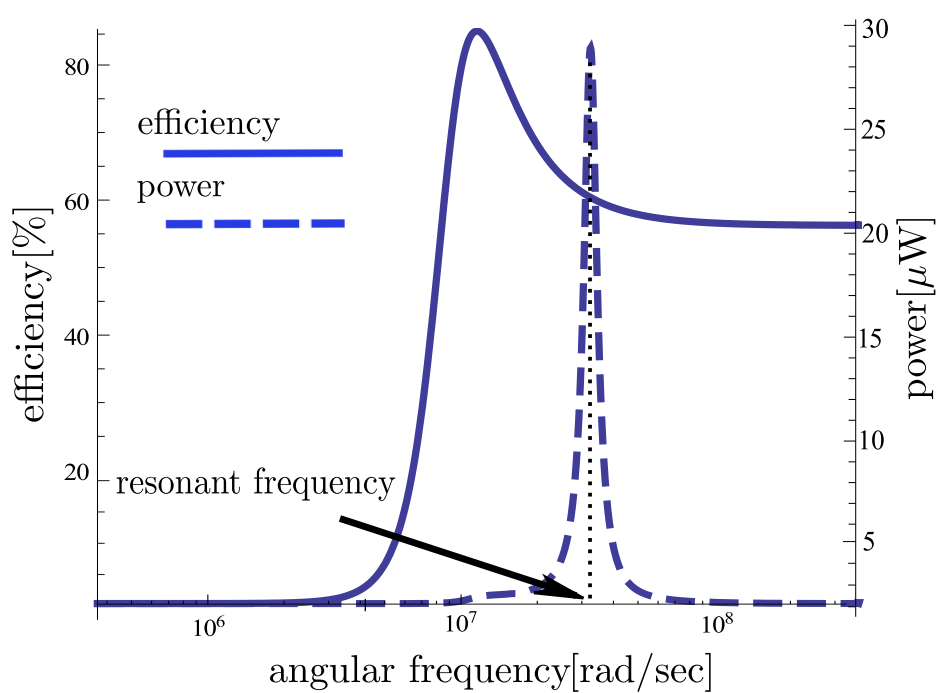


図 24: 周波数を変化させることによる抵抗負荷の平均電力と効率の変化

2.6 周波数以外の要素が効率に与える影響

ワイヤレス給電の効率に影響を及ぼす要素は、電源の周波数以外にも存在する。例えば、2次側に接続する抵抗負荷の抵抗値にも影響を受ける。また、充電を行うデバイスをどの位置に置くか、つまり相互インダクタンスの変化によっても効率は変わる。よって、周波数のみに注目すればワイヤレス給電の効率の変化を全て理解できる、ということとはできない。そこで、周波数以外の要素の一例として、抵抗負荷の抵抗値を変えることにより効率がどのように変化するかを表したものを図 25 に示す。数値は表 5 のものを用いる。

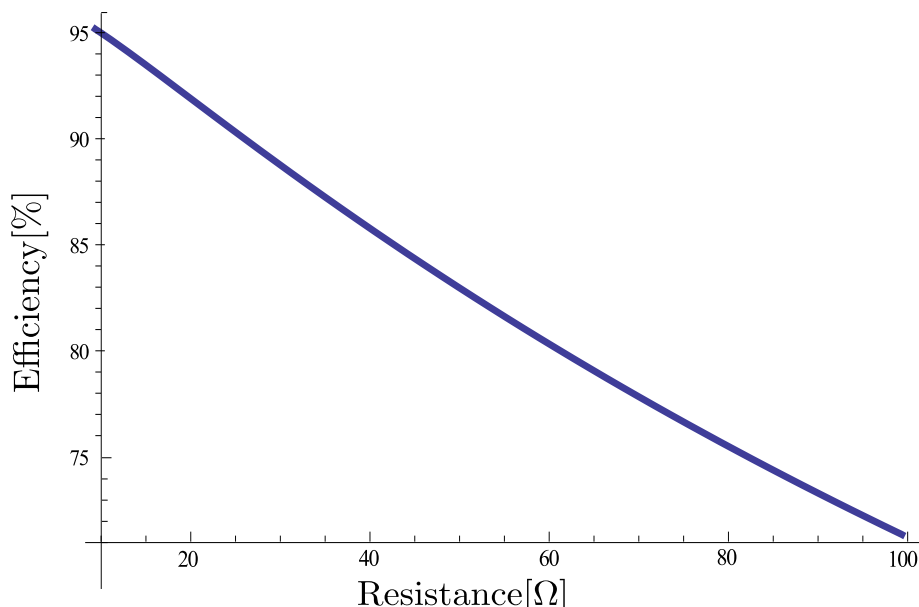


図 25: 抵抗負荷を変化させることによる効率の変化

これより、この数値例においては抵抗負荷の値が大きければ、それだけ効率が低くなるのがわかる。また、相互インダクタンスと自己インダクタンスとの比の変化による効率の変化を図 26 に示す。図 25 と同じく表 5 の値を用い、 $L_1 = L_2 = L, M_1 = M_2 = M$ としてグラフを描く。

これより、この数値例においては自己インダクタンスに対する相互インダクタンスの比が大きくなる、つまり 2 つのコイルの結合状態が強くなればなるほど、効率が大きくなるのがわかる。結合状態を大きくする要因としては、単純にコイル間の距離が近づくといったことから、コイル間に強磁性体（透磁率の大きな磁性体）を設置する、コイルの巻数や半径を増やす、といったことが挙げられる。これは序章で導出した式 (67) から理解することができる。

この章では以上を示した結果のようにある数値例を用いて数値計算を行っているため、これらの結果は一般的なものではないことを明記しておく。また今回は 1 次側と 2 次側とが RLC 直列回路で構築される典型的なワイヤレス給電回路に対しての数値計算を行ったが、回路構成は無数にありえ、今回のような受動素子のみから成る回路だけでなく、トランジスタ等の非線形な電気的特性を示す素子が含まれるワイヤレス給電回路も存在する。しかしどのような回路構成のワイヤレス給電回路に対しても、線形時不変な状態方程式を導出することができれば、同様の方法で電力・効率の数値計算を行うことができる。

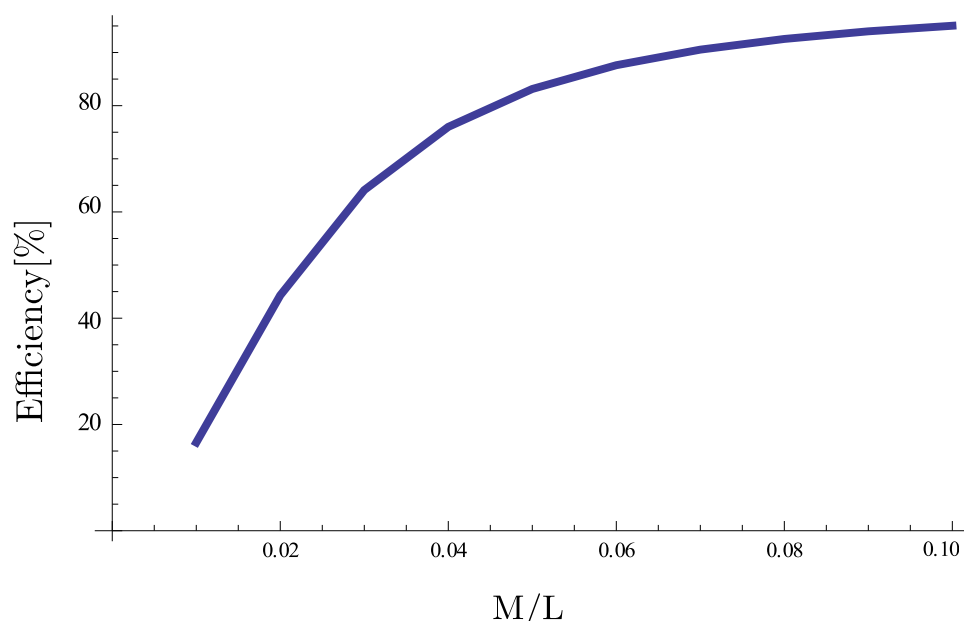


図 26: インダクタンスの比を変化させることによる効率の変化

2.7 おわりに

本章では、まず典型的なワイヤレス給電回路を設計し、その回路について状態方程式を作成した。それを用い電源の電圧から2次側の電流への伝達関数を導き、安定性を示した。そして導いた伝達関数よりゲインの式を求め、そのゲインが大きいほど平均電力が大きくなることを式で説明し、結果的に電源の周波数を回路の共振周波数に合わせることで、ある振幅の入力に対する抵抗負荷の平均電力を最大にできるということを証明した。そのような手順で電力と効率の式を導いたので、実際の実験装置を想定した回路素子の値を回路定数に代入し、電力・効率の数値計算を行った。電源の周波数を共振周波数に合わせることで電力と効率とを同時に最大化できる場合とそうでない場合を、それぞれ2つの数値計算例で示した。さらに、抵抗負荷と相互インダクタンスの大小がどのように効率に影響を及ぼすのかも数値例で示した。今回示した方法以外にも、フィードバック制御を用いて電源に新たな入力を加えることで電力と効率を大きくする方法もある [8]。

本章では数値計算により電力と効率の変化を調べたが、これらはあくまで無限に存在する状況のほんの一部にすぎない。一般的なことを述べるためには、電力や効率を回路定数だけで表す必要がある。次章では、共振周波数と効率を最大化する周波数とを回路定数のみを用いて表す方法を示す。

参考文献

- [1] H. Hirayama, “Equivalent Circuit and Calculation of Its Parameters of Magnetic-Coupled-Resonant Wireless Power Transfer”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 117-132, 2012.
- [2] M. Dionigi, A. Costanzo, M. Mongiardo, “Network Methods for Analysis and Design of Resonant Wireless Power Transfer Systems”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 65-94, 2012.
- [3] T. Hirata, K. Yamaguchi, Y. Yamamoto, Ichijo Hodaka, “Symbolic Computer- Aided Design for Wireless Power Transmission”, *Proceedings of the 2014 International Conference on Circuits, Systems, Signal Processing, Communications and Computers (CSSCC’14)*, pp. 35-39, 2014.
- [4] O. Najat, E. Nouredine, “Robust Fuzzy Control for Synchronous Machine with Uncertain Parameters”, *Recent Advances in Circuits, Communications and Signal Processing*, pp. 46-51, 2013.
- [5] M. Kato, T. Imura, Y. Hori, “New Characteristics Analysis Considering Transmission Distance and Load Variation in Wireless Power Transfer via Magnetic Resonant Coupling”, *Telecommunications Energy Conference*, pp. 1-5, 2012.
- [6] 庄木裕樹, “ワイヤレス電力伝送技術が社会を変える”, *電子情報通信学会通信ソサイエティマガジン*, 2013 年夏号, 13-18 頁, 2013.
- [7] T. Komaru, M. Koizumi, K. Komurasaki, T. Shibata, K. Kano, “Compact and Tunable Transmitter and Receiver for Magnetic Resonance Power Transmission to Mobile Objects”, *Wireless Power Transfer - Principles and Engineering Explorations*, pp. 133-150, 2012.
- [8] Y. Yamamoto, I. Hodaka, K. Yamaguchi, T. Hirata, “Using Non-Sinusoidal Inputs for Efficient Wireless Power Transmission”, *Proceedings of the 2014 International Conference on Circuits, Systems, Signal Processing, Communications and Computers (CSSCC’14)*, pp. 58-60, 2014.

3 ワイヤレス給電の効率を最大化する周波数の数式表現

3.1 はじめに

ワイヤレス給電に関するいくつかの論文では、効率を最大化するために共振現象を用いられ
ばよいとしている [1, 2]。しかし実際は、共振現象はある電源の振幅に対し電圧もしくは電
流の振幅が最大になるような現象と定義されているので、この現象は一般的には抵抗負荷の
電力を最大にする際に用いられるべきである。一方効率は2つの平均電力の比で定義される
ので、最大効率を実現するという観点から見ると、一般には共振現象とは単純に結び付けら
れないとわかる。

本章ではワイヤレス給電の効率に注目し、回路方程式に基づきワイヤレス給電回路を解析
する。この回路は、互いに電氣的に絶縁され、電源を含む1次側と抵抗負荷を含む2次側か
ら成り、電気エネルギーを電磁氣的に送るために両側にコイルが含まれている。効率を最大
にする周波数が共振周波数と一致するかどうかを調べるために、回路定数を用いた効率の数
式表現を導く。前章では具体的な素子の値を用い数値例をいくつか示したが、これらはあく
まで無数に存在する数値例の中の一部であり、一般的な結論を導くものではないが [3]、本章
では数式表現によりどの回路素子が電力や効率にどのように影響を与えるかを議論する。

本章の構成

- 電力を最大にする角周波数の数式表現
本章で扱う回路を示し、状態方程式、伝達関数を導き、ある電源電圧の振幅に対する
最大電力を与える角周波数について述べる
- 効率を最大にする角周波数の数式表現
状態方程式より効率の数式表現を導き、それから効率を最大にする角周波数を求める
- 様々な回路素子についての効率の最大化
前小章では適切な電源の角周波数を選ぶことで効率を最大化しているが、本小章では
回路素子をどのように選べば効率を最大化できるのかを考察する
- 2次側回路が並列接続されている場合
1次側・2次側共に直列なワイヤレス給電回路以外の他の例として、2次側が並列接続
されている回路について効率を数式表現する
- おわりに
本章の結果をまとめる

3.2 電力を最大にする角周波数の数式表現

ワイヤレス給電を用いて電力を電源から負荷へ送ることを考える際、その電力は可能な限り大きいことが望ましい。ある入力振幅に対する抵抗負荷の電力を最大にするためには、前章で結論づけたように共振現象を用いればよい。前章のように、数値計算による数値例でなく、本章では回路定数を用いてワイヤレス給電回路の共振周波数を数式表現する。そのような周波数の数式を導出するために、まずは前章と同じく回路方程式から状態方程式、それを用いて伝達関数、その伝達関数よりゲインを求める必要がある。そのゲインが最も高くなる際の周波数を計算により見つけることができれば、それが共振周波数である。本章で考察するワイヤレス給電回路を図 27 に示す。

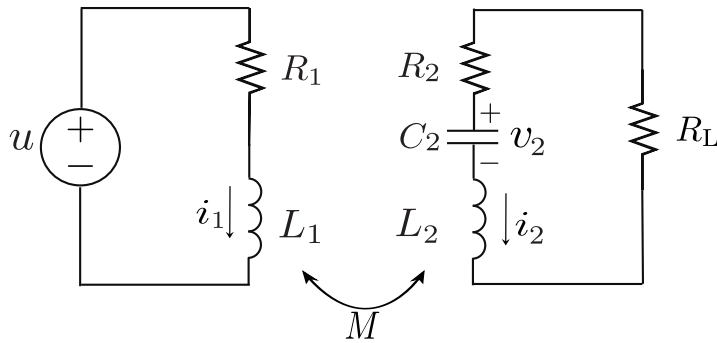


図 27: 本章で用いるワイヤレス給電回路

入力 $u = \sin \omega t$ で、コイルが 2 つあるので両側の回路間で電磁気的なやりとりができ、かつコイル・コンデンサの組が 1 つのみ存在するので、共振現象が起こる最低限の回路となっている。これより、この回路の状態方程式が

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (75)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_2} \\ M & -R_1 L_2 & R_3 M \\ -L_1 & R_1 M & -R_3 L_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2$$

と得られる。なお、 $R_3 = R_2 + R_L$ である。次に、共振周波数は第 1 章で述べたようにゲインが最大となる点での周波数であるので、まずはゲインの式を求めるために伝達関数を求めなければならない。入力 u から 2 次側の電流 i_2 への伝達関数 $G_3(s)$ は、 $G_3(s) = C(sI - A)^{-1}B$, $C = [0 \ 0 \ 1]$ を計算することにより求められ、

$$G_3(s) = \frac{-MC_2 s^2}{\Delta C_2 s^3 + (R_1 L_2 + R_3 L_1) C_2 s^2 + (L_1 + R_1 R_3 C_2) s + R_1} \quad (76)$$

となる．状態変数のサイズが 3×1 なので，この $G_3(s)$ は分母多項式が s の 3 次式である 3 次の伝達関数となった．また，フルビッツの安定判別法により， $G_3(s)$ は安定であることがわかる．この $G_3(s)$ を元に，共振角周波数を求める．この値は，前章よりゲイン $|G(j\omega)|$ が最大になるときの角周波数であった．よって，共振角周波数 ω_r は $G_3(s)$ の周波数伝達関数

$$G_3(j\omega) = \frac{\omega^2 M C_2}{-\omega^2(R_1 L_2 + R_3 L_1)C_2 + R_1 + j(-\Delta\omega^3 C_2 + \omega(L_1 + R_1 R_3 C_2))} \quad (77)$$

の大きさ

$$|G_3(j\omega)| = \frac{\omega^2 M C_2}{\sqrt{(-\omega^2(R_1 L_2 + R_3 L_1)C_2 + R_1)^2 + (-\Delta\omega^3 C_2 + \omega(L_1 + R_1 R_3 C_2))^2}} \quad (78)$$

が最大となるときの ω を計算する，つまり

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |G_3(j\omega)| = 0 \quad (79)$$

を ω について解けばよく，その解の一つは

$$\omega_r = \left(\frac{2\sqrt{6}R_1^2}{\gamma} \right)^{1/6} \quad (80)$$

$$\gamma = J(J-2) \left(-J^3 + 54\Delta^2 R_1^4 C_2^2 + 6\sqrt{3}\Delta R_1^2 C_2 \sqrt{27\Delta^2 R_1^4 C_2^2 - J^3} \right)^{1/3}$$

と求められる．なお， $2L_2 - R_3^2 C_2 = K$, $L_1^2 - K R_1^2 C_2 = J$ である．ただし，式 (80) の実数 ω_r が存在するためには $\gamma > 0$ である必要であり，これが存在しない場合は ω が大きくなるほど電力は低下する．この ω_r が，図 27 に示したワイヤレス給電回路の抵抗負荷の電力を最大にする共振角周波数の数式表現である．このような角周波数が求められた一方で，前章でも述べたようにこの ω_r はあくまである入力振幅に対する負荷電力を最大にするものであり，一般的に効率を最大にする角周波数とは異なる．前章ではある数値例のときにこれらが一致する・不一致である場合を数値例を用い例示したが，本章では ω_r に加え次小章にて効率を最大にする角周波数も同じく一般化するために数式表現する．そして，そのような角周波数と本小章で求めた共振角周波数とがどのような関係であるかを確かめる．

3.3 効率を最大にする角周波数の数式表現

ワイヤレス給電における効率は、共振現象とは直接的には関係ないということは前章で示した。ある入力振幅に対する電力は共振点において最大になるが、効率はその電力の比で表現されるということが理由であった。そこで、前小章で求めた共振角周波数の数式表現とは別に、図 27 のワイヤレス給電回路の効率を最大にする角周波数を求める必要がある。そこでまずは効率を数式表現するために、定常解を求める。状態方程式 (75) を入力 $u = \sin \omega t$ の正弦波を用いて解き定常解を得るには、式 (75) の A, B を式 (9) に代入すればよい。そのようにして求めた定常解 x_{ss} を

$$x_{ss} = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \quad (81)$$

とおく。ただし、 $\alpha = -\omega(\omega^2 I + A^2)^{-1}B, \beta = -A(\omega^2 I + A^2)^{-1}B$ である。ここで、行列 $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T, \beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3]^T$ (T は行列の転置を表す) とおくと、状態変数の定常解はそれぞれ $v_2 = \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t, i_1 = \alpha_2 \cos \omega t + \beta_2 \sin \omega t, i_2 = \alpha_3 \cos \omega t + \beta_3 \sin \omega t$ となるので、式 (74) と同様にして電源と抵抗負荷の平均電力 P_1, P_2 をそれぞれ求め、これらより効率 η の数式表現が

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t (\alpha_2 \cos \omega t + \beta_2 \sin \omega t) dt = \frac{\beta_2}{2} \\ P_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T R_L i_2(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T R_L (\alpha_3 \cos \omega t + \beta_3 \sin \omega t)^2 dt = \frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{2} R_L \\ \eta &= \frac{P_2}{P_1} = \frac{\alpha_3^2 + \beta_3^2}{\beta_2} R_L = \frac{R_L M^2 C_2^2 \omega^4}{(R_1 L_2^2 + R_3 M^2) C_2^2 \omega^4 + R_1 (-2L_2 + R_3^2 C_2) C_2 \omega^2 + R_1} \end{aligned} \quad (82)$$

と得られる。これが図 27 に示されるワイヤレス給電回路の効率の数式表現である。これを元に、効率を最大にする角周波数を求める。ここで、この η の極値を与える角周波数 ω_{opt} は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = 0 \quad (83)$$

を ω について解けばよく、 $2L_2 - R_3^2 C_2 > 0$ のとき、方程式 (83) をみたす正の実数 ω が存在して

$$\omega = \omega_{opt} = \sqrt{\frac{2}{(2L_2 - R_3^2 C_2) C_2}} \quad (84)$$

となる。 $2L_2 - R_3^2 C_2 \leq 0$ の場合は実数解 (84) は存在しなく、よって η に極値は無い。式 (84) からわかるように、この ω_{opt} は 1 次側の各素子、および相互インダクタンス、つまりコイル間距離には無関係である。この ω_{opt} を η の式 (82) に代入すると、最大効率 η_{max} の数式表現が

$$\eta_{max} = \frac{4R_L M^2}{R_3 (4M^2 + 4R_1 R_3 L_2 C_2 - R_1 R_3^3 C_2^2)} \quad (85)$$

と得られる。これが電源の角周波数を調節することで得られる最大効率の数式表現である。電力を最大にする周波数と効率を最大にする周波数とは一般的には異なるという事を前章で数値例を示すことで確認したが、本章で求めた式 (80) と式 (84) とを比較することで、電力を最大にする角周波数 ω_r と効率を最大にする角周波数 ω_{opt} との関係は一般的に

$$\omega_r \neq \omega_{opt} \quad (86)$$

であることが証明された．これより，共振現象を用いることは必ずしも高効率を与えるとは限らないということを示せたことになる．ここで， ω_{opt} の有無による η の増減の違いを表 7, 8 にまとめておく．

このように効率を数式表現し一般化することで，任意の素子に対しての最大効率の式を求めることができる．本小章では ω についての極大値を求めたが，次小章ではそれ以外の要素についての極値を求める．極値が存在しない場合は，可能な限り効率を大きくする素子の値を考察する．ちなみに，今回は回路定数を用いて効率を数式表現したが， Q 値を用いてこれを表現しているものもある [4]．この論文のようにワイヤレス給電のために中継回路を用いている場合は，共振コンデンサの有無が効率に与える影響が大きいという報告がされている．また本論文の本章と同様に効率を数式表現し，さらにインピーダンス整合の考え方を用いているものもある [5]．これはインピーダンス整合により抵抗負荷の電力を最大にすることを提案し，さらに送電・受電コイルの中心軸のずれを考慮した効率を高める方法を考察している．

表 7: $2L_2 - R_3^2 C_2 > 0$ の場合の η の増減

ω	0	...	ω_{opt}	...
$\frac{\partial \eta}{\partial \omega}$	0	+	0	-
η	0	\nearrow	η_{max}	\searrow

表 8: $2L_2 - R_3^2 C_2 \leq 0$ の場合の η の増減

ω	0	...
$\frac{\partial \eta}{\partial \omega}$	0	+
η	0	\nearrow

3.4 様々な要素についての効率の最大化

図 28 の回路について考える．

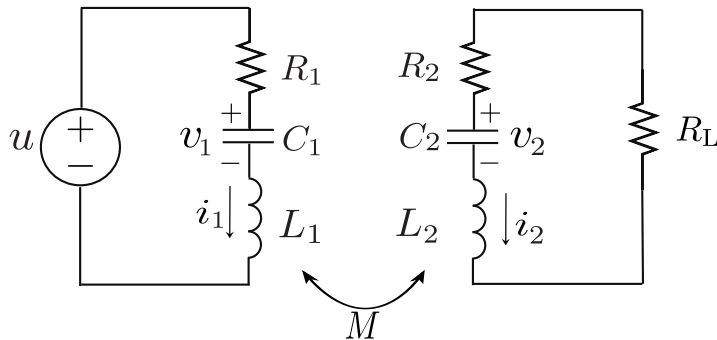


図 28: 1 次側・2 次側共に RLC 直列なワイヤレス給電回路

この回路の効率 η は

$$\eta = \frac{R_L M^2 C_2^2 \omega^4}{(R_1 L_2^2 + R_3 M^2) C_2^2 \omega^4 + R_1 (-2L_2 + R_3^2 C_2) C_2 \omega^2 + R_1} \quad (87)$$

となる．この式 (87) は，図 27 の回路より求めた効率の式 (82) と同一となる．これら 2 つの回路図 28 と図 27 との違いは，1 次側のコンデンサ C_1 の有無のみである．図 28 内に C_1 があるにもかかわらず式 (87) が (82) と同値になるということは要するに，図 28 のような 1 次側・2 次側共に RLC 直列回路となっているようなワイヤレス給電回路の効率の式は，一次側のコンデンサ C_1 の有無に関係ないことがわかる（ただし、電力の式に無関係というわけではない）．よって，効率を最大にする角周波数も当然式 (84) と同一になる．ちなみに式 (87) の右辺には 1 次側のコイル L_1 も含まれていないため， η の値自体はこの L_1 も C_1 と同じく無関係であるが，電磁場を介して電気エネルギーを 2 次側に送るためには，1 次側・2 次側にそれぞれ最低 1 つずつはコイルが含まれなければならない．

式 (87) のように効率の式を全て回路定数で書くことができたので，前小章で求めた効率 η を最大にする角周波数以外にも様々な情報を得ることができる．場合によっては抵抗負荷や相互インダクタンスを自由に変化させることができることがあるため，本小章では電源の角周波数以外にも焦点を当てて考える．まずは， η を最大にする抵抗負荷 R_{Lopt} を考える．ここで，

$$\frac{\partial \eta}{\partial R_L} = 0 \quad (88)$$

を R_L について解き，それを R_{Lopt} とおくと，

$$R_{Lopt} = \frac{1}{C_2 \omega} \sqrt{\frac{(R_1 L_2^2 + R_2 M^2) C_2^2 \omega^4 + R_1 (R_2^2 C_2 - 2L_2) C_2 \omega^2 + R_1}{R_1}} \quad (89)$$

と求められる．この R_{Lopt} が η の極大値を与える抵抗負荷である．

次に，相互インダクタンス M についての最大化を考える． M はコイル間距離により左右されるので，この距離と M の関係が分かっているのならば，コイルを移動させることで M の値を自由に調節できるという事になる．そこで電源の角周波数 ω ，抵抗負荷 R_L について

最大化した方法と同様に M の極値を求めようとするが、式 (87) より M の極値は存在しないことがわかる。なぜならば、

$$\frac{\partial \eta}{\partial M} = 0, \quad M > 0 \quad (90)$$

という M に関する方程式の実数解が存在しないからである。それゆえ、 η はある M の値のときに最大化されるのではなく、単純に M に関し単調増加、あるいは単調減少であると考えられる。よってこれまで行ってきた効率の極大値を求める方法ではなく、極限を考える。ここで、次のような文字 α, β, γ を導入する。

$$\begin{aligned} \alpha &= R_L C_2^2 \omega^4 \\ \beta &= R_3 C_2^2 \omega^4 \\ \gamma &= R_1 (L_2^2 C_2^2 \omega^4 + (-2L_2 + R_3^2 C_2) C_2 \omega^2 + 1). \end{aligned} \quad (91)$$

これを式 (87) に代入すると、

$$\eta = \frac{\alpha}{\beta + \frac{\gamma}{M^2}} \quad (92)$$

となる。この式 (92) より M の極限を求めると、

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow 0} \eta &= 0 \\ \lim_{M \rightarrow \infty} \eta &= \frac{\alpha}{\beta} = \frac{R_L}{R_3} = \frac{R_L}{R_2 + R_L} \end{aligned} \quad (93)$$

となることがわかる。式 (93) より、 M の値が小さければ小さいほど、要するにコイル間距離が大きくなればなるほど、 η の値は小さくなっていくことがわかる。一方、 M の値が大きくなればなるほど、 η は式 (93) に示した値に収束することがわかる。ここで R_2 は 2 次側の回路の内部抵抗であったため、この値が R_L に比べ十分小さいと考えると式 (93) に示した M が十分大きい際の η はほぼ 1 であると考えられる。要するに、 M の値が大きくなればなるほど η は大きくなると考えられる。このことに関しては、前章の図 26 の数値例を示した際にも確認することができた。

ここまで、1 次側・2 次側がそれぞれ RLC 直列回路から構成される回路についての電力・効率について論じてきた。それらを踏まえ、次小章では 2 次側が並列となっている回路についても同様の解析を行い、効率の数式表現を行う。

3.5 2次側回路が並列接続されている場合

一般に，どのような回路トポロジーがワイヤレス給電に向いているか一概に言えず，さまざまなトポロジーに関して解析しておくことが必要である．そこで，本小章ではその例として，図 29 に示す 2 次側の回路が並列接続されているワイヤレス給電回路について，効率を最大にするような角周波数を求める．本章で行ってきた解析法を，同様に図 29 のワイヤレス給電回路に対しても適用する．

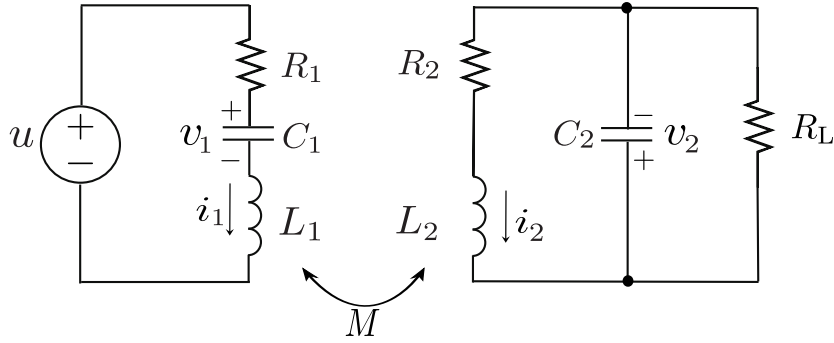


図 29: 抵抗負荷側の回路が並列のワイヤレス給電回路

この回路の状態方程式は，

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (94)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{C_2 R_L} & 0 & \frac{\Delta}{C_2} \\ -L_2 & M & -R_1 L_2 & R_2 M \\ M & -L_1 & R_1 M & -R_2 L_1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2$$

となる．これより効率は

$$\eta = \frac{R_L M^2 \omega^2}{f(\omega)} \quad (95)$$

$$f(\omega) = R_L^2 C_2^2 (R_1 L_2^2 + R_2 M^2) \omega^4$$

$$+ [R_1 (L_2^2 - 2R_L^2 L_2 C_2 + R_2^2 R_L^2 C_2^2) + (R_2 + R_L) M^2] \omega^2$$

$$+ R_1 (R_2 + R_L)^2$$

と導出できる．これまでと同様に，この η を ω で偏微分し，極値を求める．計算の結果より，効率の極大を与える角周波数が

$$\omega_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{R_2 + R_L}{R_L C_2}} \left(\frac{R_1}{R_1 L_2^2 + R_2 M^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

ただし， $\frac{R_2 + R_L}{R_L C_2} > 0$ かつ $\frac{R_1}{R_1 L_2^2 + R_2 M^2} > 0$ (96)

と求められる．本小章ではこのような2次側が並列接続されているワイヤレス給電回路について解析を行ったが，その他の回路構成についても同様に状態方程式を立て，定常解を求め，それを用いて電力・効率を計算できる．ただし，第1章で述べたように回路構成によってはコイルを流れる電流，あるいはコンデンサにかかる電圧を状態変数に選べない場合があるので注意が必要である．また，定常解の計算中に逆行列が含まれるために，サイズの大きな行列になればなるほど，要するにコイルやコンデンサの数が増えれば増えるほど，数式が複雑になり計算機の処理が困難になる．そのような場合は，何らかの近似を行い式を比較的簡単にする等の対処を行うべきである．

3.6 おわりに

本章では、前章と同様にワイヤレス給電の回路図より状態方程式を求め、伝達関数を導出し、ゲインを回路内の回路定数を用いて数式で表現した。それが最大となる条件を考え、その結果共振角周波数を数式表現した。また、直前に求めた状態方程式より定常解を求め、それを用いて計算した平均電力の比を取ることで効率を計算、数式を得た。その効率の式より、効率を最大にする電源の角周波数を導出、さらにそれを効率の式に戻し最大効率の数式表現を得た。この角周波数と前章で導出した共振角周波数を比較し、それらが異なるということをはじめて明らかにした。次に抵抗負荷、相互インダクタンスが効率を最大化するための条件を求めた。同様に、2次側が並列接続されているワイヤレス給電回路についての効率、さらにそれを最大にする電源の角周波数の数式表現を得た。

前章、本章では正弦波入力の際のワイヤレス給電の電力・効率について述べたが、実際の場合を考えた場合、正弦波より矩形波の方が生成することは安易である。よって、次章では矩形波を入力として用いた場合の電力と効率について述べる。

参考文献

- [1] M. Kato, T. Imura, Y. Hori, “New Characteristics Analysis Considering Transmission Distance and Load Variation in Wireless Power Transfer via Magnetic Resonant Coupling”, *Telecommunications Energy Conference*, pp. 1-5, 2012.
- [2] 庄木裕樹, “ワイヤレス電力伝送技術が社会を変える”, 電子情報通信学会通信ソサイエティマガジン, 2013 年夏号, 13-18 頁, 2013.
- [3] K. Yamaguchi, T. Hirata, Y. Yamamoto, I. Hodaka, “Resonance and efficiency in wireless power transfer system”, *WSEAS Transactions on Circuit and Systems* 13, pp. 218-223, 2014.
- [4] 田倉哲也, 三澤崇弘, 佐藤文博, 佐藤忠邦, 松木秀敏, “共振コンデンサ接続型ピックアップコイルを用いた LC ブースター方式における最大伝送効率について”, *Journal of the Magnetics Society of Japan*, vol. 37, 102-106 頁, 2013.
- [5] S. G. Lee, H. Hoang, Y. H. Choi, and F. Bien, “Efficiency improvement for magnetic resonance based wireless power transfer with axial-misalignment”, *Electronics Letters*, vol. 48, pp. 339-340, 2012.

4 矩形波入力を用いたワイヤレス給電の電力と効率の数値計算

4.1 はじめに

ワイヤレス給電に関する多くの論文は、電源電圧として正弦波を用いている。しかし、電磁場を介しワイヤレスで1次側から2次側へ電力を送るには、矩形波入力であってもよい。[1, 2] は、共振状態では矩形波はそれと同じ周波数を持つ正弦波と近似できると述べている。これは多くの周波数を持つ矩形波の基本周波数が共振周波数に合わせられた場合、その基本周波数以外の周波数成分による影響は小さいと考えられるためである。しかし実際は、電源の周波数の駆動可能範囲内に常に共振周波数が入っているとは限らない。よって、例えば機器の出力の制約のため、電源の周波数が共振周波数に合わせられないような状況で、矩形波の基本周波数以外の周波数の影響が無視できないほど見られる場合の解析も行うべきである[3]。

本小章では、多くの論文が正弦波入力を利用している一方で、矩形波入力がどのようにワイヤレス給電の電力と効率に影響を与えるのかを明らかにする。電力と効率の値を、矩形波を正弦波として近似することなく計算する。計算は3種類の回路で行われ、正弦波入力時と矩形波入力時の抵抗負荷の平均電力を、各波の性質と共振現象の観点から比べる。最終的に、様々な状況においてどちらの波を用いればよいのか、高出力なワイヤレス給電の実現のためには電源の周波数をどのように決めるべきかを議論する。

本章の構成

- 入力の条件
本章は正弦波入力時と矩形波入力時で電力・効率の違いを考察するが、そのための準備として各種波形の振幅を定める
- 基本的なワイヤレス給電回路での電力と効率
本章で用いる回路を示し、電力と効率の数値計算の結果を示す
- 矩形波入力時の電力
何故正弦波入力時と矩形波入力時で前小章のような違いが出たのかを、共振現象の観点から考察する
- 他の数値例
他の2つの回路で同様の数値計算を行い、その結果を示す
- おわりに
本章の結果をまとめる

4.2 入力条件

本章では，第2章で扱った回路と同じものを扱う．ただし，入力 u は正弦波入力もしくは矩形波入力とし，これらの選択がワイヤレス給電システムをどう良くするのか，あるいは悪くするかを調べる．それぞれの波形の持つ性質がワイヤレス給電の電力・効率にどう影響を及ぼすかを理解するために，まずはそれぞれの電源が同じ電力を持つよう，電圧の振幅を決定すべきである．そこで，ワイヤレス給電回路を考える前に，図30の電源と抵抗負荷のみから成る回路を考える．図30の表は順に正弦波・矩形波の波形，瞬時電力，平均電力を示している．図30のように正弦波と矩形波の振幅を1Vと選べば，図30に示すようにそれぞれが5mWの平均電力を発するようになる．これで，お互いが同一の抵抗負荷に対し同じ電力を出力するという条件になり，電力・効率を比較をする際に平等な条件であるといえる．したがって本章では，以降両波形の振幅をこのように1Vとして扱う．

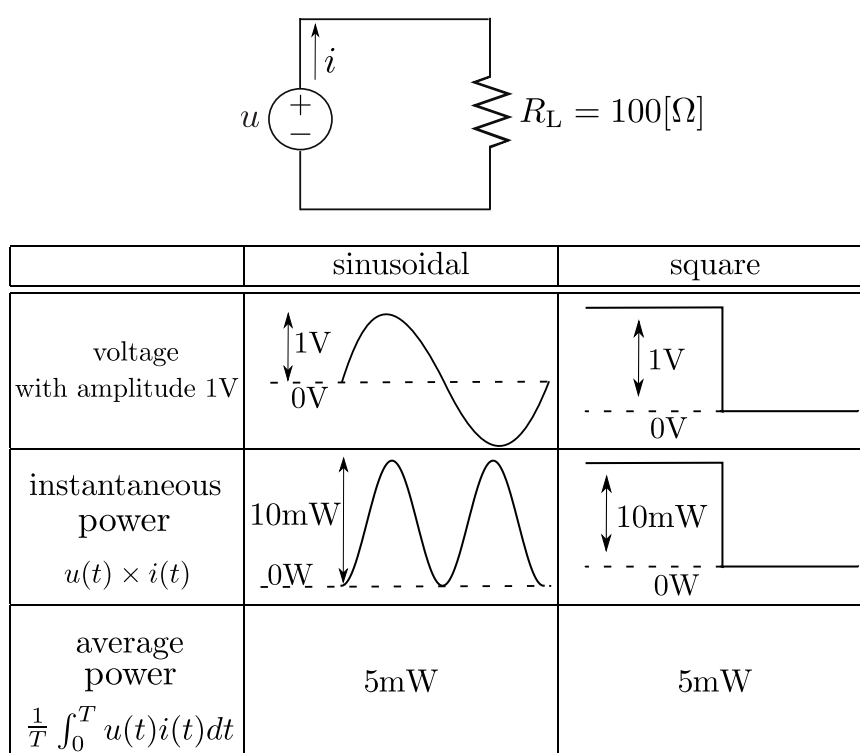


図 30: 入力波形と瞬時電力・平均電力

4.3 基本的なワイヤレス給電回路での電力と効率

図 31 の回路について，電力と効率を計算する．状態方程式については式 (68) で求めてある．入力波形が正弦波か矩形波かでどのような違いが出るかをこれらの計算結果から確かめ，その原因を考察する．今回は数値計算を行うので，そのために図 31 のように各回路素子に具体的な値を代入する．

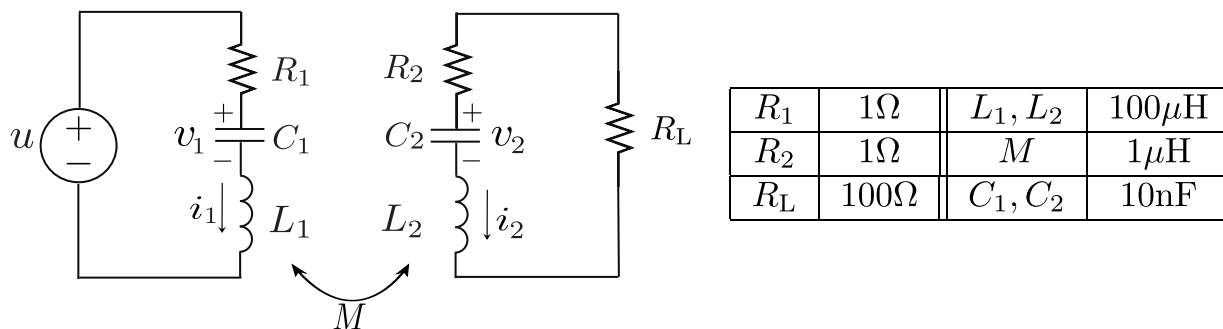


図 31: 本章で考察するワイヤレス給電回路

図 32 に数値計算の結果を示す．1 段目のグラフは入力波形を示し，それぞれ正弦波，矩形波を表している．2 段目のグラフは電源の電圧 u から 2 次側を流れる電流 i_2 への伝達関数のゲイン線図，3 段目のグラフは電源の平均電力 P_1 と抵抗負荷の平均電力 P_2 を表したものの，4 段目のグラフは P_2 と P_1 との比で定義される効率 η を表している．各グラフの描写，数値計算は数式処理システムの mathematica で行った．

ここで 2 段目に見られるゲイン線図は，どちらも共振角周波数が 10^6rad/sec であることに注意する（伝達関数，およびゲイン線図は回路の特性，つまり回路の素子の値のみで決定され，入力波形には影響されない）．図 32 を見ると，正弦波入力を用いた場合の平均電力 P_1, P_2 は，共振角周波数で最大となっている．効率も同じく共振角周波数付近で最大となっている．一方，矩形波入力を用いた場合，電力は同じく共振角周波数で極大をとっているが，常にそこだけにのみ極大点が存在しているというわけではない．さらに，効率も複数の角周波数で極大をとっている．このように，両者の大きな違いは電力と効率の最大・極大点の数である．正弦波入力時は電力も効率も唯一 1 点でのみ最大となるが，矩形波入力時は電力も効率も共振角周波数を含む様々な角周波数のときに極大をとる．この違いの要因としては，正弦波がただひとつの角周波数のみ持つ事に対し，矩形波がフーリエ級数を用いて無数の正弦波の足しあわせにより書かれることからわかるように，多くの異なる周波数を持っていて，回路内の電圧や電流がそれぞれ異なる周波数を持つ正弦波の重ねあわせで表現されることが原因であると考えられる．それが上記のような結果になった原因であるかどうかを知るために，次の小章ではフーリエ級数を用いて矩形波入力を表現し，平均電力がどのような級数で表現されるのかを考え，適切な近似を用い，矩形波が持つ独特の性質がどのように平均電力に影響を及ぼしたのかを考察する．

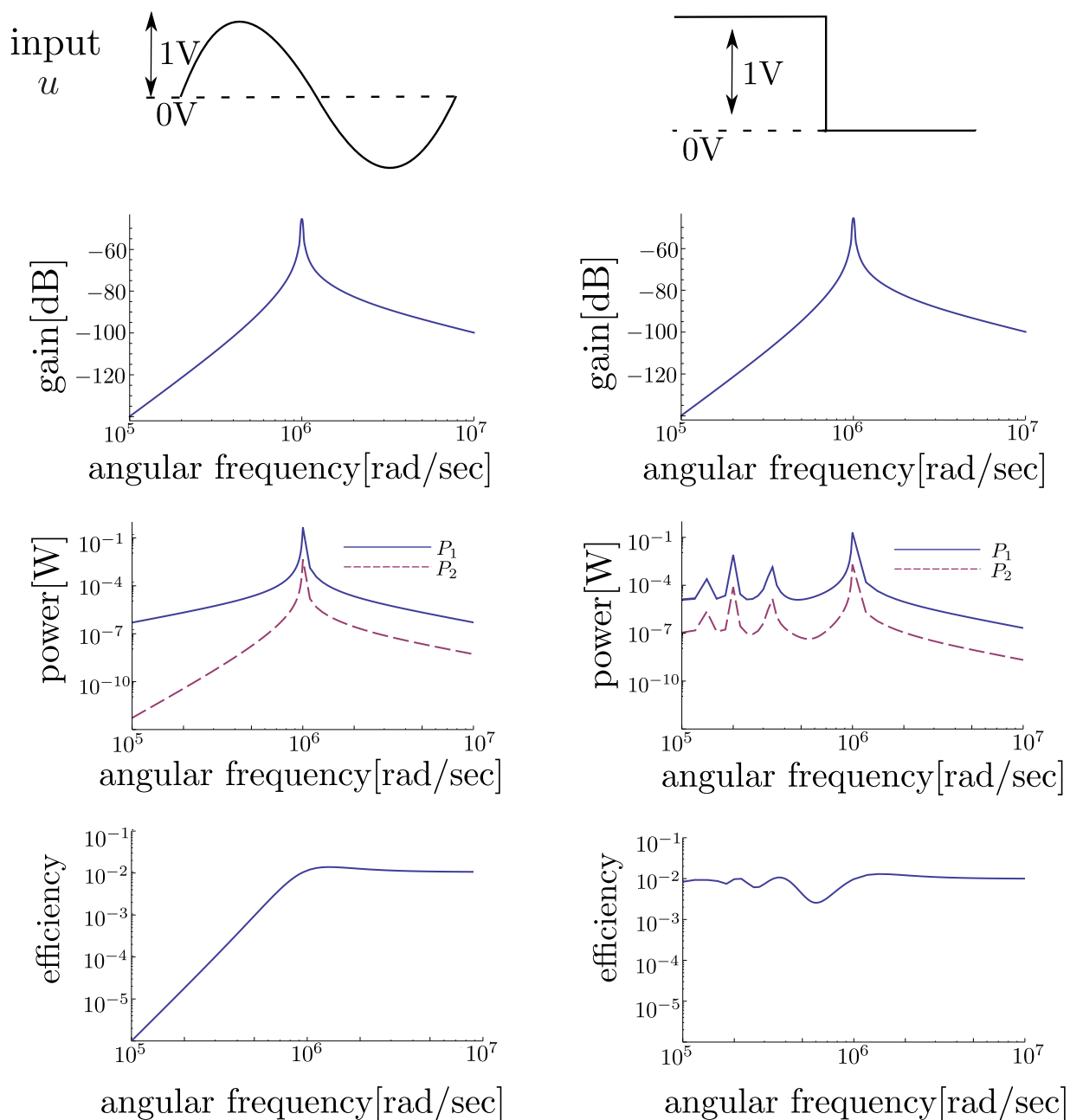


図 32: 本章で考察するワイヤレス給電回路についてのボード線図, 電力・効率

4.4 矩形波入力時の平均電力

振幅 1V の矩形波のフーリエ級数の部分和 $\widetilde{u}_{\text{sq}}$ は

$$\widetilde{u}_{\text{sq}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\omega t \quad (97)$$

となる．ここで $(2k-1)\omega$ は矩形波に含まれる正弦波の角周波数であり， $\omega = 2\pi/T$ (T は $\widetilde{u}_{\text{sq}}$ の基本周期) である．式 (97) 内の n を十分大きくとると，矩形波入力を用いた際のより正確な近似解を得ることができる．例として， $n = 10, 30, 100$ の場合の $\widetilde{u}_{\text{sq}}$ をそれぞれ図 33 の (a), (b), (c) に示す．

ここで，電力は電圧と電流との積である注意する．電流や電圧は線形であるため状態方程式の定常解をそのまま用いれば計算は易しいが，電力はそれらの積なので電源の電圧と抵抗負荷の平均電力との関係は非線形となり，電力の数式表現を得ることは単純ではない．そこで，まずは式 (97) に含まれる異なる周波数を持つ正弦波同士の直交性を考える．いま，それぞれ周波数の異なる正弦波 x_1, x_2 があるとする．これらが直交する条件とは，それぞれの内積を計算した結果が 0 になる，つまりそれぞれの周期を T とすると

$$(x_1, x_2) = \int_0^T x_1(t)x_2(t)dt = 0 \quad (98)$$

を満たすことである．また，定常解の線形性より，2つの入力 u_1, u_2 の和 $u_1 + u_2$ を入力とした際の定常解 $x_{\text{ss}}(u_1 + u_2)$ は，それぞれの入力を別々に用いた場合の定常解 $x_{\text{ss}}(u_1), x_{\text{ss}}(u_2)$ の和となる．つまり，

$$x_{\text{ss}}(u_1 + u_2) = x_{\text{ss}}(u_1) + x_{\text{ss}}(u_2) \quad (99)$$

である．これら性質を用いて， $u_1 + u_2$ を入力とするワイヤレス給電回路の平均電力を考察する．このために， u による平均電力を $P(u)$ と書くこととする．まず，入力を $u_1 + u_2$ とした際の電源の平均電力 $P_1(u_1 + u_2)$ を考える．入力が u_1 のときの 1 次側を流れる定常電流を i_{1n} ，入力が u_2 のときの 1 次側を流れる定常電流を i_{1m} とすると，入力が $u_1 + u_2$ のときの 1 次側を流れる定常電流は，式 (99) より $i_{1n} + i_{1m}$ となる．これを用い $P_1(u_1 + u_2)$ を計算すると，

$$P_1(u_1 + u_2) = \frac{1}{T} \int_0^T (u_1 + u_2)(i_{1n} + i_{1m})dt \quad (100)$$

ここで式 (98) より

$$P_1(u_1 + u_2) = \frac{1}{T} \int_0^T u_1 i_{1n} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_2 i_{1m} dt \quad (101)$$

となる．式 (101) の右辺の第 1 項，第 2 項はそれぞれ入力が u_1, u_2 の際の電源の平均電力となっているので，すなわち

$$P_1(u_1 + u_2) = P_1(u_1) + P_1(u_2) \quad (102)$$

である．次に，入力を $u_1 + u_2$ とした際の抵抗負荷の平均電力 $P_2(u_1 + u_2)$ について考える．入力が u_1 のときの 2 次側を流れる定常電流を i_{2n} ，入力が u_2 のときの 2 次側を流れる定常電

流を i_{2m} とすると、入力 $u_1 + u_2$ のときの2次側を流れる定常電流は、式(99)より $i_{2n} + i_{2m}$ となる。これを用い $P_2(u_1 + u_2)$ を計算すると、

$$P_2(u_1 + u_2) = \frac{1}{T} \int_0^T R_L (i_{2n} + i_{2m})^2 dt \quad (103)$$

ここで式(98)より

$$P_2(u_1 + u_2) = \frac{1}{T} \int_0^T R_L i_{2n}^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T R_L i_{2m}^2 dt \quad (104)$$

となる。式(104)の右辺の第1項、第2項はそれぞれ入力 u_1, u_2 の際の抵抗負荷の平均電力となっているので、すなわち

$$P_2(u_1 + u_2) = P_2(u_1) + P_2(u_2) \quad (105)$$

である。以上より、異なる周波数を持つ正弦波を足しあわせて作成した入力を回路の電源として用いた場合、その平均電力は各正弦波をそれぞれ個別に入力として用いた場合に得られる平均電力を合計すればよいということがわかった。それゆえ、 $P(\widetilde{u_{sq}})$ は矩形波の部分和であったので

$$P(\widetilde{u_{sq}}) = P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{2}{\pi} \sin \omega t\right) + P\left(\frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t\right) + \cdots + P\left(\frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)\omega t\right) \quad (106)$$

と表現できる。ここで、入力 u の振幅と平均電力について考える。定常解の線形性より、定常解の振幅は入力の振幅に比例する、つまり、 α を任意の実数とすると

$$x_{ss}(\alpha u) = \alpha x_{ss}(u) \quad (107)$$

である。この性質を用いると、 u を α 倍した場合、1次側を流れる電流 i_1 は αi_1 となり、2次側を流れる電流 i_2 は αi_2 となる。それをふまえ、 u を α 倍した αu を入力とした場合の平均電力を考える。まず、電源の平均電力 P_1 は

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_0^T (\alpha u)(\alpha i_1) dt = \alpha^2 \frac{1}{T} \int_0^T u i_1 dt \quad (108)$$

となる。つまり、 u を α 倍すると、電源の平均電力は u を α 倍しない場合と比べ α^2 倍されるということがわかる。次に、抵抗負荷の平均電力 P_2 は

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T R_L (\alpha i_2)^2 dt = \alpha^2 \frac{1}{T} \int_0^T R_L i_2^2 dt \quad (109)$$

となる。つまり、 u を α 倍すると、抵抗負荷の平均電力も u を α 倍しない場合と比べ α^2 倍されるということがわかる。電源の振幅と平均電力との関係をまとめると、

$$P(\alpha u) = \alpha^2 P(u) \quad (\alpha \text{ は任意の実数}) \quad (110)$$

である。これを用いると式(106)は

$$P(\widetilde{u_{sq}}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1}\right)^2 P(\sin(2k-1)\omega t) \quad (111)$$

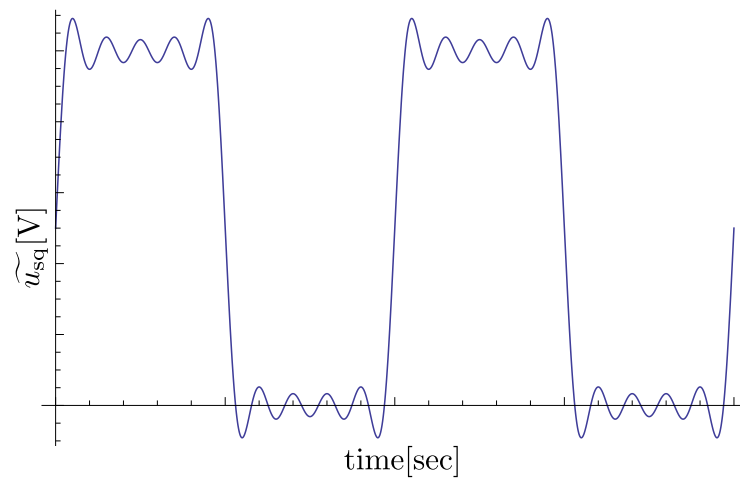
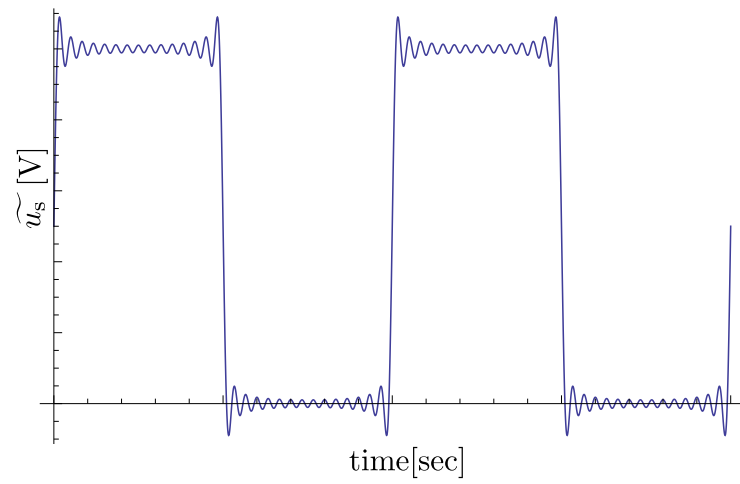
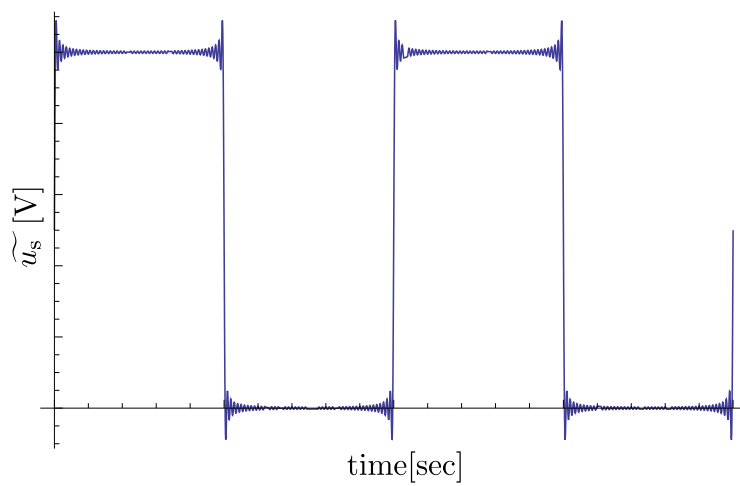
と整理される．この複数の正弦波の和を入力として用いた場合の平均電力の計算法を示した式 (111) を元に，矩形波を入力として用いた場合の平均電力を計算する．ここで，矩形波入力時の平均電力を数値計算するための近似について考える．式 (111) の各項の平均電力の係数は，周波数が大きくなればなるほど極端に小さくなるので，式 (111) を

$$P(\widetilde{u_{sq}}) = 0.41P(\sin \omega t) + 0.045P(\sin 3\omega t) + 0.016P(\sin 5\omega t) \quad (112)$$

と近似する．ここで，0.41, 0.045, 0.016 はそれぞれ $P(\sin \omega t)$, $P(\sin 3\omega t)$, $P(\sin 5\omega t)$ の係数の概算値である．ある入力の振幅に対する平均電力は，共振点で最も大きくなるということを第2章で証明したので，極端な話式 (112) 内の $\omega, 3\omega, 5\omega$ が全て共振角周波数であれば $P(\widetilde{u_{sq}})$ は最大になるということが言える．しかし式 (112) は平均電力 (106) を第3項までの和と近似したものであり，共振周波数がただひとつ，もしくは複数の共振周波数がほぼ同じ位置に存在し，かつその周波数近傍のゲインが著しく高い場合は，高い電力を得るために電源である矩形波の周波数を共振周波数に合わせることは理に適っていると考えられる．言い換えれば，そのような場合は矩形波の基本周波数以外の周波数成分は，十分無視できるほど影響力が少ないといえる [1, 2]．

しかし，ワイヤレス給電回路の中には共振周波数が複数存在するものや，ゲインが緩やかに大きくなるものがあり，このような場合は基本周波数による平均電力と同じようにそれ以外の周波数による平均電力も大きくなるようにしたい．図 32 中の矩形波入力による平均電力の変化を見ると，共振角周波数 (10^6rad/sec) の3分の1付近の角周波数を用いた場合にも大きい電力を得ていることがわかるが，これは矩形波が基本角周波数の3倍の角周波数の正弦波を持っており，その角周波数が共振角周波数となっているからである．要するに，式 (112) の右辺の第2項が大きい値になっているということである．同様に共振角周波数 (10^6rad/sec) の5分の1の角周波数を矩形波の角周波数とした場合でも大きい平均電力を示しているが，この場合は式 (112) の右辺の第3項の値が大きいということである．このような状況は，他の文献を見ても考察されていない．

一方効率に関しては，電力が最大になる条件が共振現象を用いて議論できる事に対し，直接共振現象と結びつけることができないということを第2章，第3章で述べてきた．よって本章のように共振現象という観点からではなく，[4, 5, 6] が正弦波入力を用いた際の効率を最大にする周波数について述べているのと同様に，矩形波入力時についても考えなければならない．矩形波入力を用いた際であっても，正弦波入力時と同様にそのような周波数と共振周波数とが一般的に一致するという根拠は無く，矩形波入力を用いたワイヤレス給電に関しての別の重要な論点であると言える．

(a) $n = 10$ (b) $n = 30$ (c) $n = 100$ 図 33: $n = 10, 30, 100$ の場合の \widetilde{u}_{sq}

4.5 他の数値例

本章では、なぜ矩形波入力を用いた際の平均電力が共振周波数以外の周波数で大きくなるのかを検討した。しかしこれはあくまで1つの回路に関する考察であり、他の回路構成の場合についての解析も行うべきである。そのため本小章では次に示す図34と図36の回路についての電力と効率の数値計算を行い、その結果をそれぞれ図35と図37に示す。図34に示す回路は、前小章で用いた回路と違い2次側の回路が並列になっている。また図36のような中継回路を1次側と2次側との間に含むようなワイヤレス給電回路は、送電の距離を大きくすることに貢献する [7]。

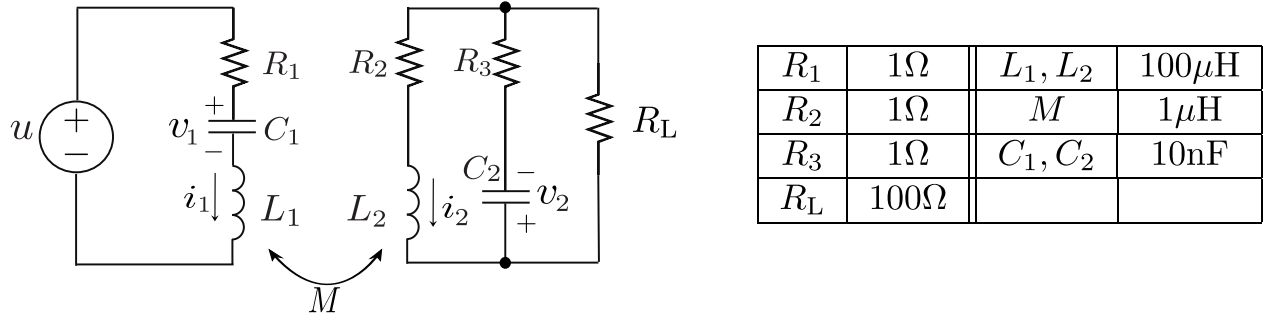


図 34: 抵抗負荷側が並列回路になっているワイヤレス給電回路

これまでと同様に回路方程式を立てることで、図34の回路の状態方程式が次のように導かれる。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (113)$$

$$x = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\Delta}{(R_3+R_L)C_2} & 0 & \frac{\Delta R_L}{(R_3+R_L)C_2} \\ -L_2 & \frac{R_L M}{R_3+R_L} & -R_1 L_2 & \frac{(R_2 R_3 + R_2 R_L + R_3 R_L) M}{R_3+R_L} \\ M & -\frac{R_L L_1}{R_3+R_L} & R_1 M & -\frac{(R_2 R_3 + R_2 R_L + R_3 R_L) L_1}{R_3+R_L} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_2 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$\Delta = L_1 L_2 - M^2.$$

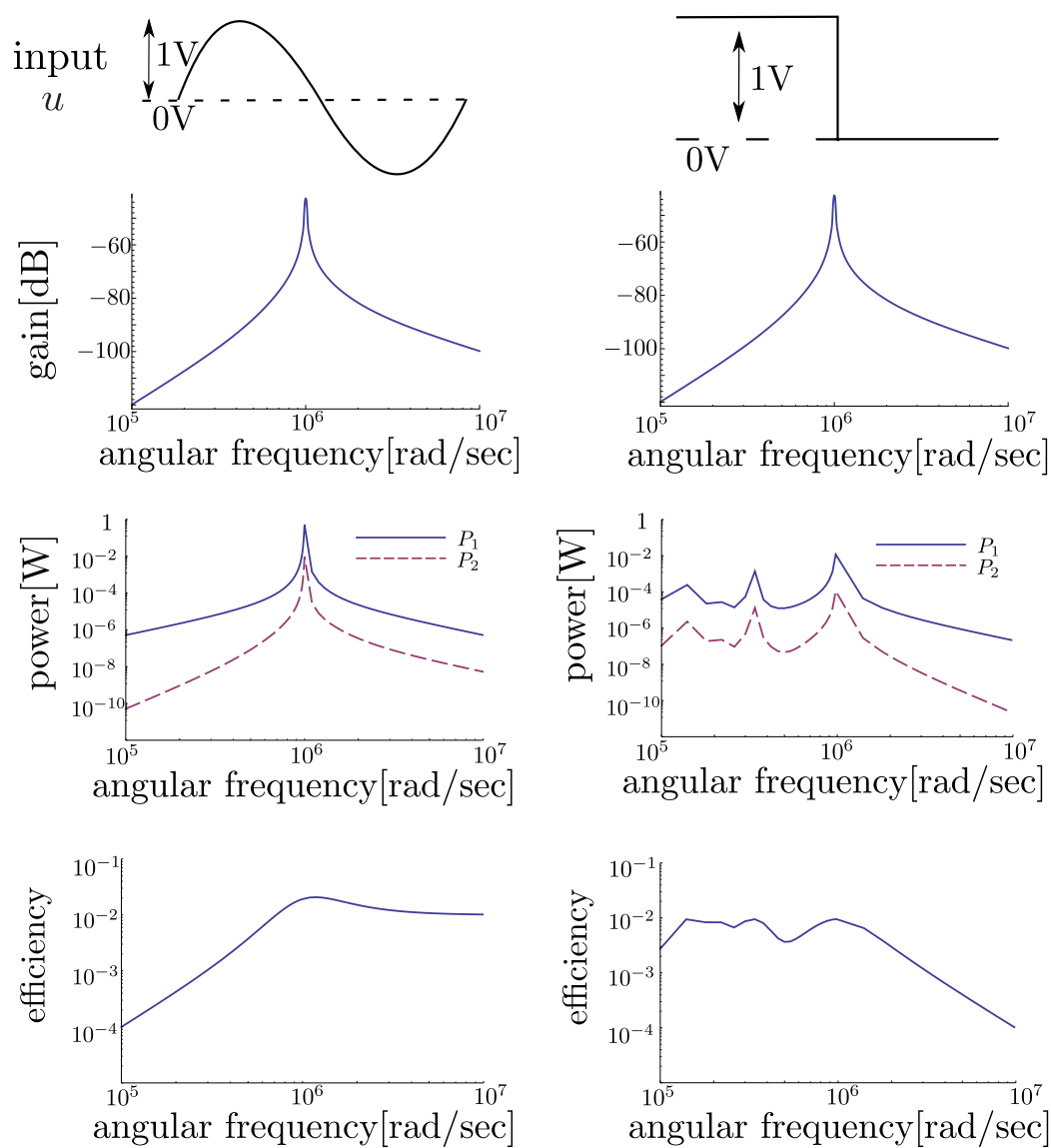
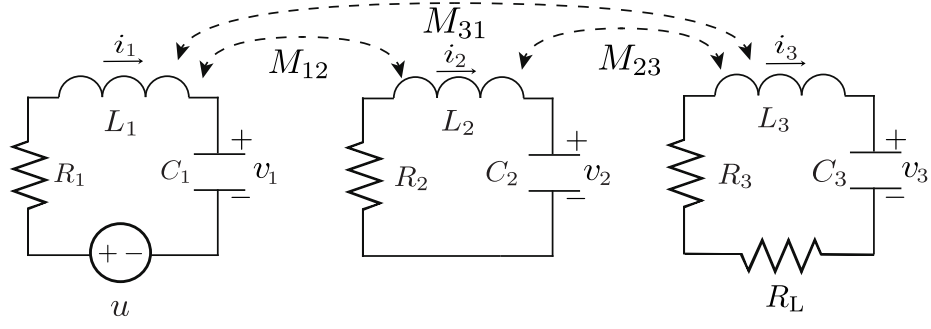


図 35: 抵抗負荷側が並列回路になっているワイヤレス給電回路のボード線図と電力・効率



R_1, R_2	1Ω	L_1, L_2, L_3	$100\mu\text{H}$
R_3	0.1Ω	M_{12}, M_{23}	$10\mu\text{H}$
R_L	100Ω	M_{31}	$1\mu\text{H}$
C_1, C_2, C_3	10nF		

図 36: 中継回路を挟んだワイヤレス給電回路

同様の方法により，図 36 の回路の状態方程式は次のように導かれる．

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix}^T \quad (114)$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta}{C_3} \\ -\Lambda_{23} & \Gamma_3 & \Gamma_2 & -\Lambda_{23}R_1 & \Gamma_3R_2 & \Gamma_2R_4 \\ \Gamma_3 & -\Lambda_{31} & \Gamma_1 & \Gamma_3R_1 & -\Lambda_{31}R_2 & \Gamma_1R_4 \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & -\Lambda_{12} & \Gamma_2R_1 & \Gamma_1R_2 & -\Lambda_{12}R_4 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Lambda_{23} \\ -\Gamma_3 \\ -\Gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = L_1L_2L_3 - L_1M_{23}^2 - L_2M_{31}^2 - L_3M_{12}^2 + 2M_{12}M_{23}M_{31}$$

$$\Lambda_{12} = L_1L_2 - M_{12}^2, \Lambda_{23} = L_2L_3 - M_{23}^2, \Lambda_{31} = L_3L_1 - M_{31}^2$$

$$\Gamma_1 = L_1M_{23} - M_{12}M_{31}, \Gamma_2 = L_2M_{31} - M_{12}M_{23}, \Gamma_3 = L_3M_{12} - M_{31}M_{23}$$

$$R_4 = R_3 + R_L.$$

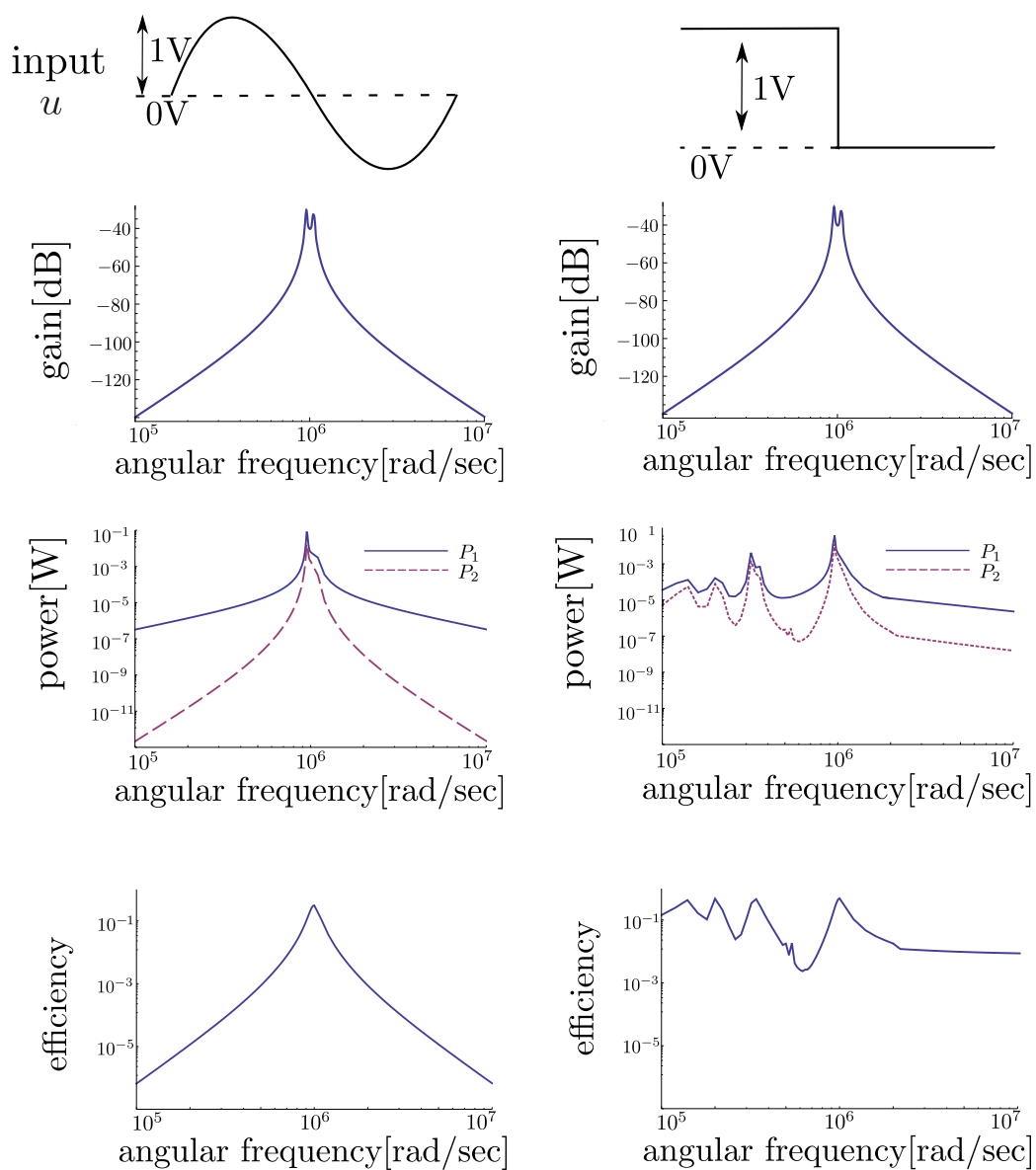


図 37: 中継回路を挟んだワイヤレス給電回路のボード線図と電力・効率

4.6 おわりに

本章では、ワイヤレス給電の電源を正弦波、矩形波とした場合の電力と効率の違いについて考察した。その比較のために、まずは両波形の振幅について考えた。これらが純抵抗に対し同じ電力を発するようにするために振幅を調節した。それを元に、回路内の各素子に数値を代入し、正弦波入力・矩形波入力時の電力と効率の数値計算を行った。その結果、矩形波入力時に複数の電力のピークが見られたが、この理由をフーリエ級数を用いて考察した。まず異なる周波数を持つ正弦波同士の直交性より、複数の周波数を持つ入力を電源として用いた場合の平均電力について考え、矩形波入力時の平均電力は矩形波に含まれる正弦波を入力として用いた場合の電力の和で表現できることを証明した。最終的に、なぜ共振角周波数以外の周波数を持つ矩形波入力が高電力をもたらすのかを理解した。なお、効率に関しては前章までに述べた通り共振現象とは直接的には関係ないので、ここでは平均電力のみの考察を行った。

参考文献

- [1] 畑勝裕, 居村岳広, 堀洋一, “長距離伝送における走行中ワイヤレス給電を目指した二次側 DC-DC コンバータによる最大効率制御,” 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 114, pp. 51-56 頁, 2014.
- [2] J. de Boeij, E. Lomonova, J. L. Duarte, and A. J. A. Vandenput, “Contactless power supply for moving sensors and actuators in high-precision mechatronic systems with long-stroke power transfer capability in x-y plane”, *Sensors and Actuators A: Physical*, vol. 148, pp. 319-328, 2008.
- [3] 井上雄貴, 河村祐輔, 庄山正仁, “矩形波電源を用いた電磁共振ワイヤレス電力伝送回路における高調波の影響について”, 電子情報通信学会技術研究報告, vol. 113, pp. 13-18 頁, 2014.
- [4] K. Yamaguchi, T. Hirata, Y. Yamamoto, and I. Hodaka, “Resonance and efficiency in wireless power transfer system”, *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, vol. 13, pp. 218-223, 2014.
- [5] S. G. Lee, H. Hoang, Y. H. Choi, and F. Bien, “Efficiency improvement for magnetic resonance based wireless power transfer with axial-misalignment”, *Electronics Letters*, vol. 48, pp. 339-340, 2012.
- [6] K. Yamaguchi, Y. Yamamoto, T. Hirata, E. Setiawan, and I. Hodaka, “Mathematical Expression of Optimal Frequencies for Wireless Power Transfer”, *Proceedings of The 3rd International Conference on Computer Engineering & Mathematical Sciences*, pp. 826-827, 2014.
- [7] D. Niu, K. Shuang, and W. Li, “Magnetic Resonant Coupling for Magnetic Induction Wireless Communication”, *IETE Journal of Research*, vol. 59, pp. 624-630, 2013.

5 結論

本論文では、ワイヤレス給電の電力・効率について様々な観点から考察した。1章で本論文に関する式の導出、理論の準備を行い、2章で共振現象が必ずしも効率を最大にするとは限らないことを数値例を用いて示し、3章で効率を最大にする周波数を数式表現することにより一般的なことを論じ、4章ではそれまでの正弦波入力時のワイヤレス給電と違い矩形波入力によるワイヤレス給電について共振現象の観点から電力について論じ、状況に応じて入力波形を使い分けるべきであると結論づけた。

2章にて電源の周波数を回路の共振周波数に合わせた際に、ある振幅の入力に対する抵抗負荷の平均電力は最大になるが、必ずしも共振現象が高効率をもたらすわけではない、ということの数値例を示すことで証明した。複数の論文がワイヤレス給電のために共振を用いて、さらに効率を最大にするためには共振現象を用いればよいと主張しているが、その主張は正しくないことを明らかにした。そのため、置かれている状況に最も合った周波数をその都度選ぶべきであると結論づけた。例えば、もし電源が十分大きな電力を発生させられるのなら、共振現象を用いて抵抗負荷の平均電力を大きくすればいい。一方、もし電源が高い電力を発生させることができないのなら、可能な限り電力輸送のロスを抑えたいため、効率を高くすることが望ましい。

3章でワイヤレス給電における電力と効率をそれぞれ最大にする角周波数を回路定数を用いて数式表現し、さらに最大効率の値を数式表現した。これにより、扱ったワイヤレス給電回路について効率を最大にするにはどのような電源の周波数を選べばよいかが明白となった。さらに、共振周波数が必ずしも高効率を与えるわけではないということを一般的に証明できた。今回は電力・効率を最大化することを目的としたが、どの要素についてこれらの最大化を行えばよいかは状況により異なるので、例えば大きな効率を実現するためにはどのような電源の周波数を選べば良いのか、あるいは大きな電力を得るためにはどのような負荷を接続すればよいのか、等の要求を正しく把握し、それぞれの値を決定すべきである。

4章では、ワイヤレス給電のAC電源として正弦波・矩形波のいずれかを用いた際に、電力と効率とがそれらの選択によりどのような影響を受けるのかを調べ、より良いワイヤレス給電のためにはどちらの波形を用いればよいかを論じた。もし正弦波を入力として用いている場合ならば、多くの論文が論じているように電源の周波数を共振周波数に合わせればよい。しかしながら、共振周波数が非常に大きい場合等は、電源の周波数を共振周波数に合わせることができない場合がある。例えば、小型の装置が給電対象である場合は、装置に含まれるインダクタンスやキャパシタンスが小さくなるため、結果的に共振周波数が非常に高くなってしまう。そのような状況では、矩形波が多くの周波数を持つという性質をうまく利用し、高電力を得るべきである。前章で考察した電源周波数の選び方等と共に、この章で考察した高電力を実現するためのAC電源の波形の選び方にも焦点を当てるべきである。

6 今後の展望

第4章にて矩形波入力時のワイヤレス給電回路の解析を行ったが、ここでは電力と共振という観点にのみに着目し、効率の観点からは考察を行わなかった。これは矩形波入力を用いたワイヤレス給電に関する電力や効率の数式表現を、第3章のように正弦波入力時の電力・効率のように得ているが、複雑すぎて一般的状況で解析することができなかったためである。正弦波入力時と異なり、矩形波入力時では定常解の数式の中に行列指数関数が含まれており、対角化等の行列指数関数特有の困難な計算が含まれていたため計算機で処理できなかったことが原因であると考察できる。解決法として、考える状況をある程度制限し、何らかの近似を施すということがあげられる。式(14)に定義されるように行列指数関数は無限級数で書かれるので、例えば式(14)の場合は At が十分小さい状況では $e^{At} \simeq I + At$ と線形近似できる。このような何らかの近似を用いて、電力・効率の計算を進めることを検討する。

また、今回は1次側、2次側の両コイルは同軸上に存在するという仮定で行ったが、これは相互インダクタンスの計算時に幾何学的な対称性を利用するためであった。しかし、実際の場合を考慮すると両コイルを同軸上に設置できるとは限らない。さらに、電気自動車を走行中に充電するというものを考慮すると、必然的にコイル同士が同軸上に存在しない場合も考慮すべきである。ある1巻のコイルがある1点に作る磁束密度は式(54)のように書かれるので、その後の面積分をどのように計算するかが論点となる。この考察を元にワイヤレス給電回路をモデリングし、前章までと同様に電力・効率の式を導出できれば、なんらかの素子を電源の側に向きを考慮せず置いたとしても、また素子の位置が時間とともに変わったとしても、その度に電力と効率を計算し最適な周波数を見つけることができるようになる。

1次側、2次側のコイルの位置関係で相互インダクタンスが変化することに関連して、コイル自身の形状の違いもワイヤレス給電を行う際に考慮すべきである。本論文でのコイルの形状は一貫して円形であった。一般的なコイルとは円形であり、なおかつインダクタンスの計算時に円の幾何的な対称性を用いることで、線積分・面積分の計算が比較的安易に行えるからである。しかし、コイルの役割は電気エネルギーを電磁波エネルギーに変え負荷側に送るというものであり、その形状が常に円形でなければならないということは述べられていない。形状が変われば磁場の向き、強さが変わり、それにより自己インダクタンス・相互インダクタンスが変化することで、電力・効率に何らかの影響を及ぼすと考えられる。

コイル間の位置関係、コイルの形状の他に、コイル間に存在する磁性体もインダクタンスに影響を与えると考えられる。本論文では1次側と2次側のコイル間は真空であると仮定しているが、つまり透磁率を $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ として計算しているが、実際は何かしらの遮蔽物がコイル間に置かれる可能性がある。磁性体の存在は磁場の大きさと向きを変化させるので、当然インダクタンスが変化し電力や効率の式が変化すると思われる。今回は全空間で真空の場合の透磁率の値を用いてインダクタンスの計算を行ったが、何らかの磁性体が含まれる場合は空間の中の一部のみにその磁性体が存在するとして計算しなければならない。あるいは、磁性体以外にも電力・効率に影響を及ぼす物質が存在すれば、それらも考慮しなくてはならない。それらの物質がどのようにワイヤレス給電の電力と効率の値を良くするのか、あるいは悪くするのかを考察することで、回路周りの物質の有無による違いを理解することができると期待できる。

負荷を自由に置くということに関して、通常の有線で行う充電と比べワイヤレス給電を用いた充電では、複数のデバイスを同時に充電できるという利点があった。これは通常の給電法には無いワイヤレス給電特有の事例であるため、このシステムを解析し数式表現すること

ができれば、ワイヤレス給電の利便性という意味でも大きな恩恵を得ることができると思われる。本論文では1次側と2次側の回路の間に中継回路を含むことは考慮したが、2次側が複数存在する状況は一切考慮していない。よって、1次側の電流が複数の2次側の回路へ与える影響を、電磁気学の諸定理を用いて考慮することが必須であると考えられる。それぞれのデバイスがどの位置に存在するのか、どの向きに置かれているか、あるデバイスが他のデバイスに与える影響はどの程度なのか等を考慮に入れ解析を行う必要があると思われる。

さらに充電する対象である負荷について、今回は2次側の負荷を純抵抗として扱ったが、実際の負荷を考慮するとインダクタンス、もしくはキャパシタンスの寄生要素を含んでいると考えられる。よって、純抵抗な負荷は現実的なモデルであるとは言いがたい。そこで、本論文では1次側と2次側の回路内それぞれに内部抵抗、内部容量を寄生要素として設置したが、それらと同じく2次側の負荷にも寄生要素が存在するということを考慮すべきである。当然、状態空間モデルを作成する際に行列のサイズが大きくなる、2次側の負荷の電力計算が困難になる、寄生インダクタンスが送受電コイルに与える影響が現れる等の問題点が考えられる。

回路内のインダクタンス、キャパシタンスの値が小さくなればそれだけ動作周波数が大きくなる。本論文で述べたように、高電力なワイヤレス給電の実現のためには共振現象との関連付けが重要であり、共振現象は電源の周波数を回路の共振周波数に合わせる必要があり、その値はインダクタンスやキャパシタンスが小さければそれだけ大きくなるからである。実際、現在考えられているワイヤレス給電システムの電源の周波数は、数kHzから数MHzという範囲のものが非常に多い。そのように電源の周波数が高周波になると生じる問題が、電磁波の位相である。電源の周波数が高くなると、ある点とそれとはまた別の点とでの位相差が無視できないほど大きくなり、本論文で行った計算の一部が影響を受けると考えられる。また、表皮効果のために導線の内部抵抗が大きくなる事も考えられる。数式で示したように、回路内の内部抵抗の値は小さければ小さいほど効率が上がるため、この要素についての考察も行うべきである。

謝辞

本研究を進めるにあたり、主指導教員かつ主査である工学部環境ロボティクス学科・穂高一条教授には学部3年次からこれまでの約6年半に渡る長い期間、熱心な研究指導を行っていただき、心より感謝の意を申し上げます。私一人の力では解決するのが困難だった問題に直面した際に幾度と無く助言をくださり、その結果ここまでの研究成果を残すことができました。また、副指導教員かつ副査である工学部環境ロボティクス学科・田村宏樹教授、同じく環境ロボティクス学科・佐藤治教授、農学部森林緑地環境科学科・多炭雅博教授、副査である工学部電気システム工学科・淡野公一教授の4名の先生方にも、研究の進捗を確認していただき、その都度助言をいただき、それまでの研究の見直しと以降の研究課題を明確にすることに繋がり感謝申し上げます。そして普段の研究活動において共に意見を交換しあった自動制御研の研究生達にも、この場で礼を申し上げます。最後に、宮崎大学に在籍していた9年間、生活面等での支援を惜しまず行ってくれた家族全員に大きな謝意を表し、謝辞の言葉とさせていただきます。